Burndy

SUR LA

DÉFORMATION ÉLECTRIQUE DES CRISTAUX,

PAR P. DUHEM.

Dans mes *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, j'ai montré brièvement (Livre XII, Chap. IV) comment la théorie que j'ai donnée, au sujet des déformations électriques des corps isotropes, pouvait s'étendre de manière à rendre compte des changements de forme que les cristaux éprouvent dans un champ électrique; j'ai développé particulièrement le cas où le cristal étudié est assez faiblement diélectrique pour que l'on puisse négliger, dans l'expression des six déformations, les termes du second ordre par rapport à l'intensité de la polarisation.

Ce cas avait déjà été traité, peu de temps auparavant, par une méthode analogue, dans un écrit de M. F. Pockels (1), *privat-docent* à l'Université de Gœttingue; au moment où j'ai rédigé mes *Leçons*, je ne connaissais pas cet article, qu'une aimable Communication de l'auteur m'a révélé récemment.

On sait comment ont été découverts les phénomènes auxquels s'applique la théorie donnée par M. F. Pockels. MM. P. et J. Curie avaient montré que certains cristaux s'électrisaient lorsqu'on les soumettait à une compression; M. Lippmann démontra théoriquement que, *si une certaine face d'une lame cristalline s'électrise positivement lorsqu'on soumet cette face à une compression normale, inversement, la lame se dila-*

(1) F. POCKELS, *Ueber die Aenderungen des optischen Verhaltens und die elastischen Deformationen dielektrischer Krystalle im elektrischen Felde* (*Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palæontologie*. Beilageband VII, p. 201; 1890).

tera dans la direction normale à la force, si l'on électrise cette face positivement [1]. MM. P. et J. Curie [2] soumirent cette conséquence théorique à des vérifications expérimentales.

La loi de réciprocité de M. G. Lippmann apparaît comme un cas particulier du *Principe du déplacement de l'équilibre*, que M. F. Braun [3] fait découler de la notion générale de stabilité, et dont j'ai donné récemment [4] une démonstration fondée sur la théorie du potentiel thermodynamique. Mais, si l'on voit immédiatement que la loi de réciprocité entre les phénomènes piézo-électriques et les déformations électriques des cristaux hémièdres doit découler du principe général sur le déplacement de l'équilibre, la démonstration directe de cette loi présente, cependant, certaines difficultés. M. Pockels a exposé cette démonstration pour le cas simple étudié par M. G. Lippmann. Nous nous proposons de l'aborder ici dans toute sa généralité.

Imaginons que l'on ait donné à un cristal *piézo-électrique* homogène de petites déformations quelconques, qui le laissent homogène. Soient

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad D_2 = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad D_3 = \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$G_1 = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad G_2 = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad G_3 = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

les six déformations, qui ont la même valeur en tout point (x, y, z) du cristal.

La polarisation $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ aura aussi la même intensité et la même direction en tous les points du cristal. Les composantes de cette polarisation seront, en conservant les notations de nos *Leçons sur l'Électri-*

---

(1) G. Lippmann, *Principe de la conservation de l'Électricité* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXIV, p. 145; 1881).

(2) P. et J. Curie, *Déformations électriques du quartz* (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 914; 1882).

(3) F. Braun, *Ueber einen allgemeinen qualitativen Satz für Zustandsänderungen nebst einigen sich anschliessenden Bemerkungen, insbesondere über nicht eindeutige Systeme* (*Wiedemann's Annalen*, t. XXXIII, p. 337; 1888).

(4) P. Duhem, *Sur le déplacement de l'équilibre* (*Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, t. IV, N; 1890).

cité et le Magnétisme (t. II, p. 396-397), données par les équations

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu),\\
\mathcal{B} &= -\frac{1}{T}(\delta_{21}\lambda + \delta_{22}\mu + \delta_{23}\nu),\\
\mathcal{C} &= -\frac{1}{T}(\delta_{31}\lambda + \delta_{32}\mu + \delta_{33}\nu)
\end{aligned}
\right.
$$

avec

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda &= l_1 D_1 + l_2 D_2 + l_3 D_3 + l_4 G_1 + l_5 G_2 + l_6 G_3,\\
\mu &= m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 + m_4 G_1 + m_5 G_2 + m_6 G_3,\\
\nu &= n_1 D_1 + n_2 D_2 + n_3 D_3 + n_4 G_1 + n_5 G_2 + n_6 G_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Imaginons maintenant le cristal soustrait à l'action de toute force extérieure; plaçons-le dans un champ magnétique uniforme, tel que les composantes de sa polarisation prennent en chaque point les valeurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Il éprouvera des déformations qui le laisseront homogène; soient

$$
\Delta_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \Delta_3 = \frac{\partial w}{\partial z},
$$

$$
\Gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \Gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \Gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}
$$

les six déformations qui auront la même valeur en tout point du cristal. Ces six déformations seront données par les égalités [*loc. cit.*, p. 472, égalités (12)]

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + a_{13}\Delta_3 + a_{14}\Gamma_1 + a_{15}\Gamma_2 + a_{16}\Gamma_3 &= l_1\mathcal{A} + m_1\mathcal{B} + n_1\mathcal{C},\\
a_{21}\Delta_1 + a_{22}\Delta_2 + a_{23}\Delta_3 + a_{24}\Gamma_1 + a_{25}\Gamma_2 + a_{26}\Gamma_3 &= l_2\mathcal{A} + m_2\mathcal{B} + n_2\mathcal{C},\\
a_{31}\Delta_1 + a_{32}\Delta_2 + a_{33}\Delta_3 + a_{34}\Gamma_1 + a_{35}\Gamma_2 + a_{36}\Gamma_3 &= l_3\mathcal{A} + m_3\mathcal{B} + n_3\mathcal{C},\\
a_{41}\Delta_1 + a_{42}\Delta_2 + a_{43}\Delta_3 + a_{44}\Gamma_1 + a_{45}\Gamma_2 + a_{46}\Gamma_3 &= l_4\mathcal{A} + m_4\mathcal{B} + n_4\mathcal{C},\\
a_{51}\Delta_1 + a_{52}\Delta_2 + a_{53}\Delta_3 + a_{54}\Gamma_1 + a_{55}\Gamma_2 + a_{56}\Gamma_3 &= l_5\mathcal{A} + m_5\mathcal{B} + n_5\mathcal{C},\\
a_{61}\Delta_1 + a_{62}\Delta_2 + a_{63}\Delta_3 + a_{64}\Gamma_1 + a_{65}\Gamma_2 + a_{66}\Gamma_3 &= l_6\mathcal{A} + m_6\mathcal{B} + n_6\mathcal{C}.
\end{aligned}
\right.
$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (3) par D_1,
les deux membres de la deuxième égalité (3) par D_2,
les deux membres de la troisième égalité (3) par D_3,
les deux membres de la quatrième égalité (3) par G_1,
les deux membres de la cinquième égalité (3) par G_2,
les deux membres de la sixième égalité (3) par G_3.

Ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Le premier membre de l'égalité résultante pourra s'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + a_{13}D_3 + a_{14}G_1 + a_{15}G_2 + a_{16}G_3)\Delta_1 \\ &+ (a_{21}D_1 + a_{22}D_2 + a_{23}D_3 + a_{24}G_1 + a_{25}G_2 + a_{26}G_3)\Delta_2 \\ &+ (a_{31}D_1 + a_{32}D_2 + a_{33}D_3 + a_{34}G_1 + a_{35}G_2 + a_{36}G_3)\Delta_3 \\ &+ (a_{41}D_1 + a_{42}D_2 + a_{43}D_3 + a_{44}G_1 + a_{45}G_2 + a_{46}G_3)\Gamma_1 \\ &+ (a_{51}D_1 + a_{52}D_2 + a_{53}D_3 + a_{54}G_1 + a_{55}G_2 + a_{56}G_3)\Gamma_2 \\ &+ (a_{61}D_1 + a_{62}D_2 + a_{63}D_3 + a_{64}G_1 + a_{65}G_2 + a_{66}G_3)\Gamma_3. \end{aligned}\right.$$

Le second membre deviendra, en vertu des égalités (1) et (2),

$$(4\ bis)\qquad -\frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda^2 + \delta_{22}\mu^2 + \delta_{33}\nu^2 + 2\delta_{23}\mu\nu + 2\delta_{31}\nu\lambda + 2\delta_{12}\lambda\mu).$$

Cette quantité (4 *bis*) n'est autre chose que ce que devient la fonction

$$-2(\varphi_{11}\alpha^2 + \varphi_{22}\beta^2 + \varphi_{33}\gamma^2 + 2\varphi_{23}\beta\gamma + 2\varphi_{31}\gamma\alpha + 2\varphi_{12}\alpha\beta)$$

par la substitution linéaire

$$\begin{aligned} 2(\varphi_{11}\alpha + \varphi_{12}\beta + \varphi_{13}\gamma) &= \lambda, \\ 2(\varphi_{21}\alpha + \varphi_{22}\beta + \varphi_{23}\gamma) &= \mu, \\ 2(\varphi_{31}\alpha + \varphi_{32}\beta + \varphi_{33}\gamma) &= \nu, \end{aligned}$$

qui donne (*loc. cit.*, p. 298)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu), \\ \beta &= \frac{1}{T}(\delta_{21}\lambda + \delta_{22}\mu + \delta_{23}\nu), \\ \gamma &= \frac{1}{T}(\delta_{31}\lambda + \delta_{32}\mu + \delta_{33}\nu). \end{aligned}$$

Or, la distribution d'équilibre diélectrique sur le cristal n'est stable (*loc. cit.*, p. 312) que si la surface

$$\varphi_{11}\alpha^2 + \varphi_{22}\beta^2 + \varphi_{33}\gamma^2 + 2\varphi_{23}\beta\gamma + 2\varphi_{31}\gamma\alpha + 2\varphi_{12}\alpha\beta = 1$$

est un *ellipsoïde réel*. La forme

$$\varphi_{11}\alpha^2 + \varphi_{22}\beta^2 + \varphi_{33}\gamma^2 + 2\varphi_{23}\beta\gamma + 2\varphi_{31}\gamma\alpha + 2\varphi_{12}\alpha\beta$$

est donc une forme quadratique définie et *positive*, et la quantité (4 *bis*) est une forme quadratique définie et *négative*.

Soient

$$N_1, \quad N_2, \quad N_3, \qquad T_1, \quad T_2, \quad T_3$$

les six composantes des pressions à l'intérieur du cristal, lorsque les six déformations ont les valeurs

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \qquad G_1, \quad G_2, \quad G_3.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}
a_{11} D_1 + a_{12} D_2 + a_{13} D_3 + a_{14} G_1 + a_{15} G_2 + a_{16} G_3 + N_1 = 0,\\
a_{21} D_1 + a_{22} D_2 + a_{23} D_3 + a_{24} G_1 + a_{25} G_2 + a_{26} G_3 + N_2 = 0,\\
a_{31} D_1 + a_{32} D_2 + a_{33} D_3 + a_{34} G_1 + a_{35} G_2 + a_{36} G_3 + N_3 = 0,\\
a_{41} D_1 + a_{42} D_2 + a_{43} D_3 + a_{44} G_1 + a_{45} G_2 + a_{46} G_3 + T_1 = 0,\\
a_{51} D_1 + a_{52} D_2 + a_{53} D_3 + a_{54} G_1 + a_{55} G_2 + a_{56} G_3 + T_2 = 0,\\
a_{61} D_1 + a_{62} D_2 + a_{63} D_3 + a_{64} G_1 + a_{65} G_2 + a_{66} G_3 + T_3 = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte de ces égalités et si l'on se souvient que la quantité (4) est toujours négative, on trouve l'inégalité

$$N_1 \Delta_1 + N_2 \Delta_2 + N_3 \Delta_3 + T_1 \Gamma_1 + T_2 \Gamma_2 + T_3 \Gamma_3 > 0.$$

Multiplions par $dx\,dy\,dz$; intégrons pour le volume entier du cristal et nous aurons

$$(5) \qquad \int (N_1 \Delta_1 + N_2 \Delta_2 + N_3 \Delta_3 + T_1 \Gamma_1 + T_2 \Gamma_2 + T_3 \Gamma_3)\, dx\, dy\, dz > 0.$$

Remplaçons Δ_1, Δ_2, Δ_3, T_1, T_2, T_3 par leurs valeurs en fonction de u, v, w, et effectuons des intégrations par parties. Le premier membre de l'inégalité (5) deviendra

$$\begin{aligned}
-\mathbf{S}\Big\{ & [N_1 \cos(n_i, x) + T_3 \cos(n_i, y) + T_2 \cos(n_i, z)]\, u \\
& + [T_3 \cos(n_i, x) + N_2 \cos(n_i, y) + T_1 \cos(n_i, z)]\, v \\
& + [T_2 \cos(n_i, x) + T_1 \cos(n_i, y) + N_3 \cos(n_i, z)]\, w \Big\}\, dS \\
-\int \Big[& \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\right) u \\
& + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}\right) v \\
& + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}\right) w \Big]\, dx\, dy\, dz,
\end{aligned}$$

dS étant un élément de la surface du cristal et n_i la normale à cet élément vers l'intérieur du cristal.

Mais si l'on désigne par

$$\rho X\, dv, \quad \rho Y\, dv, \quad \rho Z\, dv$$

les composantes de la force appliquée à l'élément de masse $\rho\, dv$ du cristal ainsi déformé, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} &= \rho X, \\
\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \rho Y, \\
\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} &= \rho Z.
\end{aligned}$$

D'autre part, si l'on désigne par

$$P\cos(P, x)\, dS, \quad P\cos(P, y)\, dS, \quad P\cos(P, z)\, dS$$

les composantes de la force extérieure appliquée à l'élément dS de la surface du cristal, on aura

$$\begin{aligned}
N_1 \cos(n_i, x) + T_3 \cos(n_i, y) + T_2 \cos(n_i, z) &= P\cos(P, x), \\
T_3 \cos(n_i, x) + N_2 \cos(n_i, y) + T_1 \cos(n_i, z) &= P\cos(P, y), \\
T_2 \cos(n_i, x) + T_1 \cos(n_i, y) + N_3 \cos(n_i, z) &= P\cos(P, z).
\end{aligned}$$

L'inégalité (5) peut donc s'écrire

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{S}\, P[u\cos(P, x) + v\cos(P, y) + w\cos(P, z)]\, dS \\ & \qquad + \int \rho(Xu + Yv + Zw)\, dx\, dy\, dz < 0. \end{aligned} \right.$$

Que signifie cette inégalité?

Pour imposer au cristal les déformations

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad G_1, \quad G_2, \quad G_3,$$

il faut appliquer à chaque élément dS de sa surface une force dont les composantes sont

$$P\cos(P, x)\, dS, \quad P\cos(P, y)\, dS, \quad P\cos(P, z)\, dS$$

et à chaque élément dv de son volume une force dont les composantes sont

$$\rho X\,dv,\quad \rho Y\,dv,\quad \rho Z\,dv.$$

Appelons ce système le *système des forces* F.

Soumis au système des forces F, et soustrait à toute influence électrique extérieure, le cristal prend une polarisation diélectrique uniforme dont les composantes sont $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Inversement, le cristal, soustrait à l'action de toute force extérieure et placé dans un champ électrique qui lui fait prendre la polarisation $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, éprouve des déformations

$$\Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \Delta_3,\quad \Gamma_1,\quad \Gamma_2,\quad \Gamma_3,$$

résultant du déplacement (u, v, w) appliqué à chaque point du cristal. Appelons ce système de déformation le *système des déformations* Δ.

Si l'on imposait ces mêmes déformations Δ *au cristal soumis aux forces* F, *les forces* F *effectueraient, dans cette modification, un travail négatif.*

En d'autres termes :

Lorsqu'on fait agir certaines forces F *sur un cristal piézo-électrique, soustrait à toute influence électrique, il se développe à l'intérieur de ce cristal une certaine polarisation diélectrique. Si, par l'action d'un champ électrique, on développait la même polarisation à l'intérieur du cristal, le cristal éprouverait certaines déformations* Δ. *Les forces* F *sont telles que leur action s'oppose aux déformations* Δ.

On reconnaît immédiatement dans cet énoncé une conséquence de la loi générale du déplacement de l'équilibre.

On serait tenté d'y voir la généralisation de l'énoncé donné par M. G. Lippmann; nous allons voir qu'il n'en est rien et que, au contraire, la proposition démontrée par M. G. Lippmann est *en contradiction* avec la précédente.

Lorsque le cristal est soumis à l'action des forces F, il prend une polarisation uniforme qui exerce sur les points extérieurs au cristal la même action qu'une couche électrique fictive. La densité superficielle

de cette couche fictive a pour valeur (*loc. cit.*, p. 397)

$$(7)\quad \begin{cases} \Sigma = \frac{1}{T}[& (\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu)\cos(n_i, x) \\ & + (\delta_{21}\lambda + \delta_{22}\mu + \delta_{23}\nu)\cos(n_i, y) \\ & + (\delta_{31}\lambda + \delta_{32}\mu + \delta_{33}\nu)\cos(n_i, z)], \end{cases}$$

λ, μ, ν étant définis au moyen des égalités (2).

Imaginons que le cristal ait la forme d'une lame à faces parallèles indéfinies, comprise entre deux plans S_1, S_2 perpendiculaires à l'axe des x. Deux plans S'_1, S'_2 sont infiniment voisins des faces de la lame. Sur le plan S'_1, que rencontre d'abord l'axe des x, nous distribuons une couche électrique uniforme de densité

$$\Sigma_1 = \frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu).$$

Sur le plan S'_2 nous distribuons une couche électrique uniforme de densité

$$\Sigma_2 = -\frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu).$$

D'après l'égalité (7), ces *couches réelles* sont identiques aux *couches fictives* qui recouvriraient les faces S_1, S_2 de la lame soumise aux forces F.

Ces couches produisent entre les deux plans S'_1, S'_2 un champ uniforme, parallèle à l'axe des x, et ayant pour intensité

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu).$$

Sous l'influence de ce champ, la lame cristalline prend une polarisation uniforme dont les composantes sont (*loc. cit.*, p. 299)

$$(8)\quad \begin{cases} \mathcal{A}' = -\frac{\varepsilon}{T}\delta_{11}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi\varepsilon}{T^2}\delta_{11}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu), \\ \mathcal{B}' = -\frac{\varepsilon}{T}\delta_{12}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi\varepsilon}{T^2}\delta_{12}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu), \\ \mathcal{C}' = -\frac{\varepsilon}{T}\delta_{13}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi\varepsilon}{T^2}\delta_{13}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu). \end{cases}$$

Les six déformations à l'intérieur de la lame auront des valeurs

$$\Delta'_1,\quad \Delta'_2,\quad \Delta'_3,\quad \Gamma'_1,\quad \Gamma'_2,\quad \Gamma'_3,$$

données par les égalités, analogues aux égalités (3),

$$
\begin{aligned}
a_{11}\Delta'_1 + a_{12}\Delta'_2 + a_{13}\Delta'_3 + a_{14}\Gamma'_1 + a_{15}\Gamma'_2 + a_{16}\Gamma'_3 &= l_1\mathcal{A}' + m_1\mathcal{B}' + n_1\mathcal{C}',\\
a_{21}\Delta'_1 + a_{22}\Delta'_2 + a_{23}\Delta'_3 + a_{24}\Gamma'_1 + a_{25}\Gamma'_2 + a_{26}\Gamma'_3 &= l_2\mathcal{A}' + m_2\mathcal{B}' + n_2\mathcal{C}',\\
a_{31}\Delta'_1 + a_{32}\Delta'_2 + a_{33}\Delta'_3 + a_{34}\Gamma'_1 + a_{35}\Gamma'_2 + a_{36}\Gamma'_3 &= l_3\mathcal{A}' + m_3\mathcal{B}' + n_3\mathcal{C}',\\
a_{41}\Delta'_1 + a_{42}\Delta'_2 + a_{43}\Delta'_3 + a_{44}\Gamma'_1 + a_{45}\Gamma'_2 + a_{46}\Gamma'_3 &= l_4\mathcal{A}' + m_4\mathcal{B}' + n_4\mathcal{C}',\\
a_{51}\Delta'_1 + a_{52}\Delta'_2 + a_{53}\Delta'_3 + a_{54}\Gamma'_1 + a_{55}\Gamma'_2 + a_{56}\Gamma'_3 &= l_5\mathcal{A}' + m_5\mathcal{B}' + n_5\mathcal{C}',\\
a_{61}\Delta'_1 + a_{62}\Delta'_2 + a_{63}\Delta'_3 + a_{64}\Gamma'_1 + a_{65}\Gamma'_2 + a_{66}\Gamma'_3 &= l_6\mathcal{A}' + m_6\mathcal{B}' + n_6\mathcal{C}'.
\end{aligned}
$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après les avoir multipliées respectivement par D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3. Nous trouverons, en tenant compte des égalités (2) et (8),

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + a_{13}D_3 + a_{14}G_1 + a_{15}G_2 + a_{16}G_3)\Delta'_1\\
&+ (a_{21}D_1 + a_{22}D_2 + a_{23}D_3 + a_{24}G_1 + a_{25}G_2 + a_{26}G_3)\Delta'_2\\
&+ (a_{31}D_1 + a_{32}D_2 + a_{33}D_3 + a_{34}G_1 + a_{35}G_2 + a_{36}G_3)\Delta'_3\\
&+ (a_{41}D_1 + a_{42}D_2 + a_{43}D_3 + a_{44}G_1 + a_{45}G_2 + a_{46}G_3)\Gamma'_1\\
&+ (a_{51}D_1 + a_{52}D_2 + a_{53}D_3 + a_{54}G_1 + a_{55}G_2 + a_{56}G_3)\Gamma'_2\\
&+ (a_{61}D_1 + a_{62}D_2 + a_{63}D_3 + a_{64}G_1 + a_{65}G_2 + a_{66}G_3)\Gamma'_3\\
&= \frac{4\pi\varepsilon}{T^2}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu)^2.
\end{aligned}
$$

Le second membre de cette égalité est essentiellement positif; il en est donc de même du premier. En raisonnant comme nous l'avons fait pour démontrer la proposition précédente, nous verrons sans peine que le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer de la manière suivante :

Les forces qui imposent à la lame cristalline les déformations

$$D_1,\quad D_2,\quad D_3,\quad G_1,\quad G_2,\quad G_3$$

effectueraient un travail *positif* si l'on imposait à la lame les déformations

$$\Delta'_1,\quad \Delta'_2,\quad \Delta'_3,\quad \Gamma'_1,\quad \Gamma'_2,\quad \Gamma'_3.$$

Ainsi, *si l'on soumet une lame cristalline piézo-électrique à un certain système de forces extérieures* F, *la lame prend, sur ses deux faces, une certaine électrisation apparente. Si l'on communique une électrisation réelle, analogue à cette électrisation apparente, à deux plaques métalliques infiniment voisines des faces de la lame, la lame subit certaines déformations, les déformations* Δ'. *Si l'on imposait les déformations* Δ' *à une lame soumise aux forces* F, *les forces* F *effectueraient un travail positif; elles tendent donc à favoriser les modifications* Δ'.

Ce résultat est analogue à celui qu'a obtenu M. Lippmann, mais *de sens contraire*. D'après la proposition de M. Lippmann, les forces F tendent *à s'opposer* aux modifications Δ' et non pas à les favoriser.

Il est aisé de voir en quoi la démonstration de M. Lippmann est inexacte.

M. Lippmann définit l'état du cristal soumis à l'action des forces F par les déformations Δ et par l'*état d'électrisation* de la surface du cristal. Mais, dans ce cas, la surface du cristal n'est pas électrisée. La masse du cristal est dans un état de polarisation qui équivaut, pour les points extérieurs, *mais non pour les points intérieurs*, à l'action de deux couches électriques réparties sur les faces de la lame. De cette confusion découle la conclusion erronée que nous venons de rappeler.

La proposition que nous venons de substituer à celle de M. Lippmann semble, au premier abord, en contradiction avec la loi du déplacement de l'équilibre; il est aisé de voir qu'il n'en est rien et de lui donner une forme qui mette en évidence la concordance de ces deux vérités.

Imaginons les deux surfaces S'_1 et S'_2 mises en communication métallique l'une avec l'autre. Lorsque, sur la lame, on fera agir les forces F, les surfaces S_1, S_2 s'électriseront comme nous l'avons vu; les surfaces S'_1, S'_2 se recouvriront par influence de densités électriques égales et de signe contraire à celles qui recouvrent les surfaces S_1, S_2. Dès lors, on peut déduire de la proposition précédente celle-ci, qui est tout à fait conforme au principe du déplacement de l'équilibre :

Si l'on soumet la lame cristalline à l'action du système de forces F, *les deux surfaces* S'_1, S'_2, *réunies métalliquement, se recouvrent de certaines couches électriques; si l'on suppose, au contraire, la lame soustraite à toute force extérieure et si l'on communique la même électrisation aux deux surfaces* S'_1, S'_2, *la lame éprouve un système de déformations* $(-\Delta')$. *Les forces* F *tendent à s'opposer à ces déformations* $(-\Delta')$.

M. F. Pockels a montré, dans l'article que nous avons cité, l'opposition qui existe entre la proposition énoncée par M. Lippmann et celle que nous avons établie ici; mais il a regardé la première comme exacte et la seconde comme erronée.

SUR LES

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE,

PAR P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

INTRODUCTION.

Clausius [1] avait déjà consacré un Mémoire à un exposé systématique des équations de la Thermodynamique. Depuis, bien des physiciens ont fait de cet exposé l'objet de leurs travaux; rappelons seulement les noms de ceux qui ont fait sur ce sujet les plus importantes recherches.

Au premier rang, il convient de citer M. F. Massieu [2]; il a obtenu un résultat capital, à savoir que toutes les équations de la Thermodynamique peuvent être écrites au moyen d'une seule *fonction caractéristique* et de ses dérivées partielles, cette fonction changeant d'ailleurs avec les variables indépendantes adoptées.

M. Gibbs [3], dans le Travail célèbre où il a démontré que les fonctions caractéristiques de M. Massieu pouvaient jouer le rôle de potentiels dans la détermination des états d'équilibre du système, a fourni

---

(1) R. CLAUSIUS, *Sur diverses formes des équations fondamentales de la Thermodynamique, qui sont commodes dans l'application* (*Théorie mécanique de la chaleur*. Trad. Folie, Mémoire IX).

(2) F. MASSIEU, *Sur les fonctions caractéristiques* (*Comptes rendus*, t. LXIX, p. 858 et 1057; 1869). — *Mémoire sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs* (*Savants étrangers*, t. XXII; 1876).

(3) J. WILLARD GIBBS, *On the equilibrium of heterogeneous substances* (*Transactions of the Connecticut Academy*, t. III; 1875-1876).

également de profondes idées sur les équations de la Thermodynamique prises sous la forme la plus générale.

M. H. von Helmholtz [1] a développé de son côté des idées analogues.

Enfin, M. Arthur von Oettingen [2] a donné un exposé de la Thermodynamique d'une remarquable généralité; il a cherché, dans cet exposé, à mettre nettement en évidence le caractère dualistique que présente le développement de la Thermodynamique, caractère déjà marqué par M. Massieu.

Malgré l'importance des travaux que nous venons de citer, nous voulons tenter à notre tour de donner des équations générales de la Thermodynamique un exposé systématique. En faisant autrement que les illustres physiciens dont les noms viennent d'être cités, nous n'avons pas la prétention de faire mieux; mais nous pensons qu'il y a intérêt à présenter l'enchaînement analytique de la Théorie mécanique de la chaleur, en adoptant successivement des méthodes très différentes; chacune de ces méthodes met particulièrement en évidence l'une ou l'autre des idées qui ont présidé au développement de la Science.

Le Travail que nous publions aujourd'hui n'est pas nouveau : nous l'avons rédigé en 1888, comme fragment d'une étude fort étendue sur la Thermodynamique, pour les besoins de notre enseignement de la Faculté des Sciences de Lille. Ce premier Mémoire, très général, traitera des systèmes définis par un nombre limité, mais quelconque d'ailleurs, de paramètres quelconques. Dans un Mémoire ultérieur, pour éclairer cette théorie générale par un exemple, nous en ferons l'application aux systèmes définis seulement par deux paramètres que l'on étudie dans les Traités de Thermodynamique.

---

(1) H. von Hemlholtz, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge* (*Sitzungsber. der Berl. Akademie*, t. I, p. 23; 1882).

(2) Arthur von Oettingen, *Die thermodynamischen Beziehungen, antuthetisch entwickelt* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XXIII; 1885).

CHAPITRE I.

ÉTUDE THERMIQUE D'UN SYSTÈME DONT ON SE DONNE LES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE.

Considérons un système, de dimensions finies ou infiniment petites, ayant en tous ses points la même température. Soit ϑ cette température, lue sur un thermomètre quelconque. Nous supposerons que l'état de ce système soit défini *sans ambiguïté*, lorsqu'on se donne les valeurs d'un certain nombre *limité* de paramètres arbitraires, qui sont la température ϑ et n autres variables indépendantes $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Nous supposerons que l'on puisse appliquer à ce système les deux principes fondamentaux de la Thermodynamique, sous leur forme ordinaire; cela suppose que le système remplit les conditions suivantes :

1° Ce système, étant placé dans une enceinte dont la température ϑ est égale à la sienne, on peut le maintenir en équilibre en lui appliquant certaines forces extérieures convenablement choisies;

2° Ces forces sont déterminées sans ambiguïté lorsqu'on connaît les valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Cette dernière condition peut s'énoncer d'une manière plus précise sous la forme suivante :

Si l'on donne aux paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$ des variations infiniment petites arbitraires $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\vartheta$, les forces susceptibles de maintenir le système en équilibre effectuent un travail virtuel

$$d\mathfrak{T}_e = \mathrm{A}\,\delta\alpha + \mathrm{B}\,\delta\beta + \ldots + \mathrm{L}\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\vartheta;$$

les quantités

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{L},\ \Theta$$

sont des fonctions uniformes, finies et continues des variables

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ \vartheta.$$

Supposons que l'on connaisse, par l'expérience ou par une autre voie, ces $(n+1)$ fonctions

$$(1)\quad \begin{cases} A = f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ B = f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L = f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta). \end{cases}$$

Nous dirons alors que l'on connaît les *équations d'équilibre* du système.

Supposons qu'un semblable système subisse une modification infiniment petite, correspondant aux variations $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$, $\delta\vartheta$ des paramètres; il dégagera une quantité de chaleur dQ.

Soit U la fonction uniforme, finie et continue de α, β, ..., λ, ϑ, qui représente l'énergie interne du système; posons

$$(2)\quad \begin{cases} R_\alpha = \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{A}{E}, \\ R_\beta = \dfrac{\partial U}{\partial \beta} - \dfrac{B}{E}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda = \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{L}{E}, \\ C\ = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} - \dfrac{\Theta}{E}, \end{cases}$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur; nous aurons

$$dQ = -(R_\alpha\,\delta\alpha + R_\beta\,\delta\beta + \ldots + R_\lambda\,\delta\lambda + C\,\delta\vartheta).$$

Si donc nous connaissons les quantités

$$R_\alpha,\quad R_\beta,\quad \ldots,\quad R_\lambda,\quad C,$$

nous saurons calculer la quantité de chaleur dégagée ou absorbée dans une modification infiniment petite quelconque subie par le système à partir d'un état d'équilibre déterminé. Nous dirons alors que *l'étude thermique du système en équilibre est faite*.

Nous donnerons aux coefficients R_α, R_β, ..., R_λ, C le nom de *coefficients calorifiques du système*. Il en est un qui se distinguera des autres

par des propriétés particulières : c'est le coefficient C; nous le nommerons *capacité calorifique du système, pour le système de variables* α, $\beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Des équations (2) nous déduisons des égalités de la forme

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} = -\frac{1}{E}\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \vartheta} - \frac{\partial C}{\partial \alpha} = -\frac{1}{E}\left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\right). \tag{3'}$$

Ces égalités sont des conséquences des égalités (2), c'est-à-dire du principe de l'équivalence de la chaleur et du travail. Réciproquement, si l'on prend $(n+1)$ fonctions A, B, ..., L, Θ et $(n+1)$ autres fonctions R_α, R_β, ..., R_λ, C, le système qui serait en équilibre sous l'action de forces extérieures, dont le travail virtuel aurait pour expression

$$d\mathcal{T}_e = A\,\partial\alpha + B\,\partial\beta + \ldots + L\,\partial\lambda + \Theta\,\partial\vartheta,$$

et qui dégagerait, dans toute modification, une quantité de chaleur

$$dQ = -(R_\alpha\,\partial\alpha + R_\beta\,\partial\beta + \ldots + R_\lambda\,\partial\lambda + C\,\partial\vartheta),$$

serait soumis au principe de l'équivalence de la chaleur et du travail ; en effet, d'après les équations (3) et (3'), il existerait une fonction uniforme U de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, telle que l'on ait

$$E(dQ + dU) = d\mathcal{T}_e.$$

Imaginons maintenant que S soit la fonction uniforme, finie et continue de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui représente l'entropie du système.

La définition même de l'entropie nous donnera

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{R_\alpha}{F(\vartheta)} = -\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}, \\[2ex] \dfrac{R_\beta}{F(\vartheta)} = -\dfrac{\partial S}{\partial \beta}, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots, \\[1ex] \dfrac{R_\lambda}{F(\vartheta)} = -\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}, \\[2ex] \dfrac{C}{F(\vartheta)} = -\dfrac{\partial S}{\partial \vartheta}, \end{array}\right. \tag{4}$$

$F(\vartheta)$ étant la *température absolue du système*.

De ces égalités (4), nous déduirons des égalités de la forme suivante :

$$(5) \qquad \frac{1}{F(\vartheta)}\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

$$(5') \qquad \frac{1}{F(\vartheta)}\frac{\partial R_\alpha}{\partial \vartheta} - \frac{F'(\vartheta)}{[F(\vartheta)]^2}R_\alpha = \frac{1}{F(\vartheta)}\frac{\partial C}{\partial \alpha}.$$

Ces égalités sont des conséquences des égalités (4), c'est-à-dire du principe de Carnot.

Réciproquement, si l'on donne un système dans lequel le dégagement de chaleur élémentaire, à partir d'un état d'équilibre, est donné par l'expression

$$dQ = -(R_\alpha\,\delta\alpha + R_\beta\,\delta\beta + \ldots + R_\lambda\,\delta\lambda + C\,\delta\vartheta),$$

si les fonctions R_α, R_β, ..., R_λ, C vérifient les égalités (5) et (5′), il existe une fonction uniforme S de l'état du système telle que

$$\frac{dQ}{F(\vartheta)} = dS,$$

et le système satisfait au principe de Carnot.

De là la conséquence suivante :

Prenons un système dont l'équilibre est assuré par des forces ayant pour travail virtuel la quantité

$$d\mathfrak{T}_e = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\vartheta,$$

et dans lequel une transformation élémentaire à partir d'un état d'équilibre dégage une quantité de chaleur

$$dQ = -(R_\alpha\,\delta\alpha + R_\beta\,\delta\beta + \ldots + R_\lambda\,\delta\lambda + C\,\delta\vartheta);$$

pour que ce système vérifie les deux principes fondamentaux de la Thermodynamique, il faut et il suffit que les deux quantités

$$\left(R_\alpha + \frac{A}{E}\right)d\alpha + \left(R_\beta + \frac{B}{E}\right)d\beta + \ldots + \left(R_\lambda + \frac{L}{E}\right)d\lambda + \left(C + \frac{\Theta}{E}\right)d\vartheta,$$

$$\frac{R_\alpha}{F(\vartheta)}d\alpha + \frac{R_\beta}{F(\vartheta)}d\beta + \ldots + \frac{R_\lambda}{F(\vartheta)}d\lambda + \frac{C}{F(\vartheta)}d\vartheta$$

soient deux différentielles totales.

Cette méthode, propre à exprimer qu'un système vérifie les deux principes fondamentaux de la Thermodynamique, est connue depuis longtemps.

Dès 1854, dans le Mémoire même où il étendait le second principe de la Thermodynamique à tous les cycles fermés, Clausius ([1]) faisait usage de cette méthode. En 1858, G. Kirchhoff ([2]) en montrait la fécondité par de magnifiques applications à l'étude des changements d'état. En 1863, Clausius ([3]) écrivait un Mémoire spécialement destiné à montrer comment toutes les équations de la Thermodynamique pouvaient s'établir par cette méthode unique. C'est également la méthode suivie par Reech ([4]) dans son grand Mémoire sur la Thermodynamique.

En comparant les équations (3) et (5), nous arrivons à une série d'égalités de la forme

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0. \tag{6}$$

Ce sont là des relations que les quantités A, B, ..., L, qui figurent dans les égalités (1), doivent avoir entre elles; ces quantités ne sont donc pas indépendantes. On ne peut pas choisir arbitrairement les $(n+1)$ fonctions f_α, f_β, ..., f_λ, f_ϑ qui doivent figurer dans les équations d'équilibre (1) du système. Le système que l'on imaginerait ainsi ne pourrait pas rentrer, en général, parmi ceux auxquels sont applicables les propositions de la Thermodynamique.

Les égalités (6) conduisent à la conclusion suivante :

Il existe une fonction uniforme, finie et continue

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$$

([1]) R. Clausius, *Sur une autre forme du second principe de la Théorie mécanique de la chaleur* (*Théorie mécanique de la chaleur*, 1re édition. Trad. Folie, t. I, p. 154).

([2]) G. Kirchhoff, *Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. CIII; 1858).

([3]) R. Clausius, *Sur diverses formes des équations fondamentales de la Théorie mécanique de la chaleur, qui sont commodes dans l'application* (*Théorie mécanique de la chaleur*, 1re édition. Trad. Folie, t. I, Mémoire IX).

([4]) Reech, *Théorie des effets dynamiques de la chaleur* (*Journal de Liouville*, t. XVIII, p. 357; 1853).

des $(n+1)$ *paramètres* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, *qui définissent l'état d'un système auquel les propositions de la Thermodynamique sont applicables, telle que les équations d'équilibre du système puissent s'écrire de la manière suivante*

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \mathrm{B} = \dfrac{\partial}{\partial\beta}\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{L} = \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \Theta = \quad f_\vartheta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \end{cases}$$

la fonction f_ϑ *étant indépendante de la fonction* $\mathfrak{F}$.

Nous n'insisterons pas davantage, pour le moment, sur cette remarque que nous retrouverons plus loin sous une autre forme.

En comparant les relations (3′) et (5′), nous trouvons la série des relations

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{R}_\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{E}}\dfrac{\mathrm{F}(\vartheta)}{\mathrm{F}'(\vartheta)}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial\vartheta}\right), \\ \mathrm{R}_\beta = \dfrac{1}{\mathrm{E}}\dfrac{\mathrm{F}(\vartheta)}{\mathrm{F}'(\vartheta)}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\beta} - \dfrac{\partial\mathrm{B}}{\partial\vartheta}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{R}_\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{E}}\dfrac{\mathrm{F}(\vartheta)}{\mathrm{F}'(\vartheta)}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial\mathrm{L}}{\partial\vartheta}\right). \end{cases}$$

Ces égalités (8) nous montrent que, *lorsqu'on connaît les équations d'équilibre du système, c'est-à-dire les expressions des quantités* A, B, ..., L, Θ, *on peut calculer complètement tous les coefficients calorifiques du système, sauf la capacité calorifique.*

La première relation de la forme (8) qui ait été donnée en Thermodynamique est la relation entre la chaleur de vaporisation d'un liquide, sa tension de vapeur saturée et les volumes spécifiques du liquide et de la vapeur. Cette relation, déduite en 1834 par Clapeyron des idées de Carnot, a été corrigée et complétée par Clausius et W. Thomson. Nous retrouvons ici l'idée de Clapeyron sous sa forme la plus générale.

La capacité calorifique C n'est pas entièrement déterminée par la

seule connaissance des équations d'équilibre (1) du système; mais les équations (3'), jointes aux équations (8), nous donnent les égalités suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \alpha} &= \frac{1}{E}\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\right)\left[1 - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\right] - \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha\, \partial \vartheta}\right)\right\},\\
\frac{\partial C}{\partial \beta} &= \frac{1}{E}\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}\right)\left[1 - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\right] - \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \beta\, \partial \vartheta}\right)\right\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\frac{\partial C}{\partial \lambda} &= \frac{1}{E}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}\right)\left[1 - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\right] - \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \lambda\, \partial \vartheta}\right)\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (9) conduisent à la conclusion suivante :

Lorsqu'on connaît les équations d'équilibre d'un système, on peut calculer les dérivées partielles de la capacité calorifique du système par rapport à tous les paramètres qui définissent l'état du système, sauf sa dérivée par rapport à la température; la capacité calorifique est déterminée à une fonction près de la température.

Pour achever de connaître la capacité calorifique C, il faudrait connaître la valeur de cette quantité pour un système particulier de valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et pour toutes les valeurs de ϑ.

Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante :

Lorsqu'on connaît les équations d'équilibre d'un système, qui ne peuvent d'ailleurs pas être données arbitrairement, mais doivent être de la forme (7), *pour achever complètement l'étude thermique du système supposé en équilibre, il est nécessaire et suffisant de déterminer la suite de valeurs que prend la capacité calorifique* C *pour un système particulier de* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *et pour toute valeur de* ϑ.

Nous avons supposé la température ϑ lue sur un thermomètre quelconque. Prenons pour température la température absolue elle-même, cas auquel nous poserons

$$\vartheta = T.$$

Dans ce cas, nous aurons identiquement

$$F(T) = T.$$

Les égalités (8) deviendront simplement

$$(10)\quad \begin{cases} R_\alpha = -\dfrac{T}{E}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial A}{\partial T}\right), \\ R_\beta = -\dfrac{T}{E}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\beta} - \dfrac{\partial B}{\partial T}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda = -\dfrac{T}{E}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial L}{\partial T}\right). \end{cases}$$

Les égalités (9) prendront la forme beaucoup moins compliquée

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial\alpha} = \dfrac{T}{E}\left(\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial T} - \dfrac{\partial^2 A}{\partial T^2}\right), \\ \dfrac{\partial C}{\partial\beta} = \dfrac{T}{E}\left(\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial T} - \dfrac{\partial^2 B}{\partial T^2}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial C}{\partial\lambda} = \dfrac{T}{E}\left(\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\lambda\,\partial T} - \dfrac{\partial^2 L}{\partial T^2}\right). \end{cases}$$

Les équations (9) se simplifient également beaucoup dans un cas particulier qui a un grand intérêt : c'est celui où les paramètres α, β, ..., λ ont été choisis de telle sorte que, si l'on fait varier la seule température ϑ, en les maintenant constants, tous les points du système demeurent immobiles. Dans ce cas, la seule variation du paramètre ϑ ne peut entraîner aucun travail des forces extérieures; on a donc

$$\Theta = 0.$$

Dès lors, les équations (8) deviennent

$$(12)\quad \begin{cases} R_\alpha = -\dfrac{1}{E}\dfrac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\dfrac{\partial A}{\partial\vartheta}, \\ R_\beta = -\dfrac{1}{E}\dfrac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\dfrac{\partial B}{\partial\vartheta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda = -\dfrac{1}{E}\dfrac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\dfrac{\partial L}{\partial\vartheta}; \end{cases}$$

Les équations (9) deviennent

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \alpha} &= \frac{1}{E}\left\{\left[1-\frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\right]\frac{\partial A}{\partial \vartheta}-\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\frac{\partial^2 A}{\partial \vartheta^2}\right\},\\
\frac{\partial C}{\partial \beta} &= \frac{1}{E}\left\{\left[1-\frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\right]\frac{\partial B}{\partial \vartheta}-\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\frac{\partial^2 B}{\partial \vartheta^2}\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial C}{\partial \lambda} &= \frac{1}{E}\left\{\left[1-\frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\right]\frac{\partial L}{\partial \vartheta}-\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\frac{\partial^2 L}{\partial \vartheta^2}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Si, dans ces égalités (12) et (13), on pose

$$\vartheta = T,$$

on trouve les égalités très simples

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
R_\alpha &= -\frac{T}{E}\frac{\partial A}{\partial T},\\
R_\beta &= -\frac{T}{E}\frac{\partial B}{\partial T},\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
R_\lambda &= -\frac{T}{E}\frac{\partial L}{\partial T},
\end{aligned}\right.$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \alpha} &= -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2},\\
\frac{\partial C}{\partial \beta} &= -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 B}{\partial T^2},\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial C}{\partial \lambda} &= -\frac{E}{T}\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}.
\end{aligned}\right.$$

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DONT L'ÉTUDE THERMIQUE EST SUPPOSÉE FAITE.

Supposons maintenant, à l'inverse de ce que nous avons supposé au Chapitre précédent, que nous ayons un système défini par les $(n+1)$ paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, et que l'étude thermique du système ait été faite pour toute modification du système pris dans un état d'équilibre.

Si les paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, varient de $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\vartheta$, le système étant primitivement en équilibre, il se dégage une quantité de chaleur

$$dQ = -(R_\alpha\,\delta\alpha + R_\beta\,\delta\beta + \ldots + R_\lambda\,\delta\lambda + C\,\delta\vartheta),$$

R_α, $R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C étant des fonctions connues de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Nous nous proposons de rechercher si l'on peut déterminer les valeurs des quantités $A, B, \ldots, L, \Theta$, qui déterminent l'équilibre du système lorsque les paramètres dont dépend son état ont les valeurs $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Nous avons, pour effectuer cette détermination, les équations suivantes :

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} = -\frac{1}{E}\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \vartheta} - \frac{\partial C}{\partial \alpha} = -\frac{1}{E}\left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\right), \tag{3'}$$

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial R_\alpha}{\partial \alpha} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \vartheta} - \frac{F'(\vartheta)}{F(\vartheta)} R_\alpha = \frac{\partial C}{\partial \alpha}, \tag{5'}$$

qui nous donnent les deux séries d'égalités

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0, \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = -\, E\,\frac{F'(\vartheta)}{F(\vartheta)}\,R_\alpha,\\
&\frac{\partial B}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = -\, E\,\frac{F'(\vartheta)}{F(\vartheta)}\,R_\beta,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial L}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} = -\, E\,\frac{F'(\vartheta)}{F(\vartheta)}\,R_\lambda.
\end{aligned}\right. \tag{8 bis}$$

Les valeurs de A, B, ..., L, Θ, qui conviennent à l'équilibre du système, vérifient ces égalités (6) et (8 *bis*); mais ces égalités ne peuvent-elles pas être vérifiées par d'autres déterminations de A, B, ..., L, Θ? Pour répondre à cette question, proposons-nous d'intégrer d'une manière générale les équations (6) et (8 *bis*).

D'après les égalités (5), il doit exister une fonction uniforme

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta),$$

telle que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned}
&R_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}\,\mathcal{G}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta),\\
&R_\beta = \frac{\partial}{\partial \beta}\,\mathcal{G}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&R_\lambda = \frac{\partial}{\partial \lambda}\,\mathcal{G}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta).
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

On intégrera de la manière la plus générale les égalités (6) en posant

$$\left\{\begin{aligned}
&A = \frac{\partial}{\partial \alpha}\,\mathcal{F}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta),\\
&B = \frac{\partial}{\partial \beta}\,\mathcal{F}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&L = \frac{\partial}{\partial \lambda}\,\mathcal{F}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta),
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ étant une fonction uniforme *arbitraire* de α, $\beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Parmi les fonctions $\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ qui vérifient les égalités (16), choisissons-en une; en vertu des égalités (16) et (17), les égalités (8 *bis*) deviendront

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \text{E}\frac{\text{F}'(\vartheta)}{\text{F}(\vartheta)}\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)\right],$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\partial \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \text{E}\frac{\text{F}'(\vartheta)}{\text{F}(\vartheta)}\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \text{E}\frac{\text{F}'(\vartheta)}{\text{F}(\vartheta)}\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)\right];$$

d'où

$$\Theta = \frac{\partial \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \text{E}\frac{\text{F}'(\vartheta)}{\text{F}(\vartheta)}\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta) + \varphi(\vartheta), \tag{18}$$

$\varphi(\vartheta)$ étant une fonction uniforme *arbitraire* de la variable ϑ.

La fonction $\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ est déterminée; mais les fonctions $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ et $\varphi(\vartheta)$ sont arbitraires; *il y a donc une infinité de systèmes de valeurs des quantités*

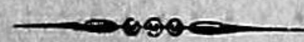
$$\text{A}, \quad \text{B}, \quad \ldots, \quad \text{L}, \quad \Theta,$$

qui intègrent les équations (6) *et* (8 *bis*), *l'expression de ces fonctions dépend de deux fonctions arbitraires, l'une des* $(n+1)$ *variables* α, $\beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, *l'autre de la seule variable* ϑ; *parmi ces systèmes, un et un seul est tel que les forces dont le travail virtuel a pour expression*

$$d\mathfrak{T}_e = \text{A}\,\partial\alpha + \text{B}\,\partial\beta + \ldots + \text{L}\,\partial\lambda + \Theta\,\partial\vartheta$$

maintiennent le système en équilibre.

Ainsi une étude thermique complète d'un système en équilibre est loin de fournir des renseignements suffisants pour qu'il soit possible d'écrire les équations d'équilibre du système.



CHAPITRE III.

DU POTENTIEL THERMODYNAMIQUE.

Considérons un système qui soit soumis aux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse appliquer les théorèmes de la Thermodynamique sous leur forme habituelle.

Supposons qu'une transformation fasse passer ce système de l'état initial 1 à l'état final 2. A un instant quelconque de la transformation, le système est supposé avoir la même température en tous ses points; cette température peut d'ailleurs varier d'un instant à l'autre.

Pendant une des transformations élémentaires en lesquelles peut se décomposer cette transformation finie, le système a la température ϑ; il dégage une quantité de chaleur dQ; sa force vive croît de $\delta \sum \frac{mv^2}{2}$.

La transformation tout entière fait passer l'entropie du système de la valeur S_1 à la valeur S_2.

Pour toute transformation réalisable nous devons avoir [1]

$$P = \int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\vartheta)} \left(dQ + \frac{1}{E} \delta \sum \frac{mv^2}{2} \right) + S_2 - S_1, \tag{19}$$

P étant une quantité essentiellement positive à laquelle Clausius a donné le nom de *transformation non compensée*. Cette quantité devient égale à o lorsque la modification est *réversible*.

On peut donner à l'expression d'une transformation non compensée une forme différente de celle qui est formée par l'égalité (19).

Le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail nous fournit l'égalité

$$d\mathfrak{T}_e = E\,dQ + \delta \sum \frac{mv^2}{2} + E\,\delta U,$$

[1] P. Duhem, *Étude sur les travaux thermodynamiques de M. Willard Gibbs*, égalité (14) (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XI; 1887).

U désignant l'énergie interne du système. Donc, au lieu d'écrire, comme expression de la transformation non compensée, l'égalité (19), on peut écrire

$$(20) \qquad P = \frac{1}{E}\int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{F(\mathfrak{S})}(d\mathfrak{T}_e - E\,\delta U) + S_2 - S_1.$$

Cette forme (20) devient particulièrement remarquable si la modification est *isothermique*. Dans ce cas, on a

$$F(\mathfrak{S}) = \text{const.},$$

et l'égalité (20) devient

$$(21) \qquad EF(\mathfrak{S})P = E[U_1 - F(\mathfrak{S})S_1] - E[U_2 - F(\mathfrak{S})S_2] + \int_{(1)}^{(2)} d\mathfrak{T}_e.$$

Le second membre renferme un travail

$$\int_{(1)}^{(2)} d\mathfrak{T}_e.$$

Le premier membre est donc une grandeur de même espèce qu'un travail. Dès lors, pour une modification quelconque, isothermique ou non, nous donnerons à la quantité

$$d\tau = EF(\mathfrak{S})P$$

le nom de *travail non compensé* accompli durant la transformation.

L'égalité (21) peut alors s'énoncer ainsi :

Dans une modification isothermique quelconque, le travail non compensé est la somme :

1° Du travail des forces extérieures;

2° De la variation changée de signe d'une fonction *uniforme* de l'état du système définie par l'égalité

$$(22) \qquad \mathfrak{F} = E[U - F(\mathfrak{S})S].$$

Ce travail est donc égal au travail mécanique qui serait accompli dans la modification considérée si le système était soumis :

1° Aux mêmes forces extérieures;

2° A des forces intérieures admettant un potentiel égal à $\mathfrak{F}$.

De là le nom de *potentiel thermodynamique interne* que nous donnerons à la fonction $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité (22).

Cette fonction a été, pour la première fois, étudiée par M. Massieu, qui lui a donné le nom de *fonction caractéristique*. M. Gibbs, qui en a fait usage ensuite, lui a donné le nom de *fonction de force à température constante*. Maxwell, puis M. von Helmholtz l'ont nommé *énergie libre*.

Dans toute transformation réalisable, le travail non compensé est positif. Par conséquent, *si un système, dont la température est maintenue constante, se trouve dans un état tel que toute modification isothermique virtuelle entraîne un travail non compensé négatif, le système est assurément en équilibre.*

Il arrive souvent que le travail effectué dans une modification isothermique réelle ou virtuelle par les forces extérieures appliquées au système se trouve être la variation changée de signe d'une certaine fonction Ω, déterminée d'une manière uniforme par l'état du système

$$d\mathfrak{T} = -\,\delta\Omega.$$

Les forces extérieures appliquées au système admettent, à température constante, un potentiel Ω.

L'égalité (21) devient, dans ce cas,

$$\begin{aligned} \mathrm{E\,F}(\vartheta)\mathrm{P} = {} & \mathrm{E}[\mathrm{U}_1 - \mathrm{F}(\vartheta)\mathrm{S}_1] + \Omega_1 \\ & - \mathrm{E}[\mathrm{U}_2 - \mathrm{F}(\vartheta)\mathrm{S}_2] - \Omega_2, \end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$\Phi = \mathrm{E}[\mathrm{U} - \mathrm{F}(\vartheta)\mathrm{S}] + \Omega, \tag{23}$$

$$\mathrm{E\,F}(\vartheta)\mathrm{P} = \Phi_1 - \Phi_2. \tag{24}$$

Le travail non compensé accompli dans une modification isothermique quelconque est alors la variation changée de signe d'une fonction uniforme de l'état du système; nous donnerons à cette fonction le nom de *potentiel thermodynamique du système*.

D'après cette définition, *si un système, dont la température est maintenue constante, se trouve dans un état tel que son potentiel thermodyna-*

mique ait une valeur minimum parmi toutes celles qu'il peut prendre à la même température, le système est en équilibre.

Le potentiel thermodynamique interne est défini par l'égalité

$$\mathfrak{F} = E[U - F(\vartheta)S]; \tag{22}$$

le potentiel thermodynamique total est défini par l'égalité

$$\Phi = E[U - F(\vartheta)S] + \Omega. \tag{23}$$

Chacune des trois fonctions U, S, Ω est définie à une constante près. Il en résulte qu'à chacun des deux potentiels thermodynamiques on peut toujours ajouter une quantité de la forme

$$A F(\vartheta) + B,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME DONT LE POTENTIEL THERMODYNAMIQUE EST SUPPOSÉ CONNU.

Considérons un système défini par $(n+1)$ paramètres, au nombre desquels figure la température ϑ; soient

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad \vartheta$$

ces paramètres. Supposons que l'on connaisse le potentiel thermodynamique interne de ce système. Ce sera une fonction *uniforme* des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$,

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta).$$

Peut-on, en premier lieu, déterminer les forces extérieures qui main-

tiennent ce système en équilibre, c'est-à-dire les $(n+1)$ fonctions

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L, \quad \Theta,$$

telles que

$$d\mathcal{T}_e = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\vartheta$$

représente le travail virtuel de ces forces?

Supposons le système soumis à ces forces; si les paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda$$

varient de

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \ldots, \quad \delta\lambda,$$

tandis que ϑ demeure constant, nous obtiendrons une modification isothermique, *réversible*, infiniment petite, dans laquelle le travail non compensé doit être égal à o,

$$E\,F(\vartheta)\,dP = 0.$$

Or, dans toute modification isothermique,

$$E\,F(\vartheta)\,dP = -\,\delta\mathcal{F} + d\mathcal{T}_e.$$

Dans le cas actuel,

$$\delta\mathcal{F} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\beta}\delta\beta + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\delta\lambda,$$

$$d\mathcal{T}_e = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda.$$

On doit donc avoir, quelles que soient les valeurs de $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda$,

$$\left(A - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\right)\delta\alpha + \left(B - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\beta}\right)\delta\beta + \ldots + \left(L - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\right)\delta\lambda = 0,$$

ce qui entraîne les égalités

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta),\\ B &= \frac{\partial}{\partial\beta}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ L &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta). \end{aligned}\right.$$

Ces égalités (25), dans lesquelles les seconds membres sont des fonc-

tions uniformes de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, déterminent le travail virtuel des forces extérieures propres à maintenir le système en équilibre, *sauf le terme* $\Theta\,\delta\vartheta$.

Pour achever l'étude mécanique du système, il faudra, d'une manière quelconque, déterminer la quantité Θ, c'est-à-dire joindre aux égalités (25) une égalité de la forme

$$\Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta). \tag{26}$$

Les équations d'équilibre une fois déterminées par les égalités (25) et (26), les coefficients calorifiques

$$R_\alpha, \quad R_\beta, \quad \ldots, \quad R_\lambda$$

seront déterminés par les égalités (8), qui deviendront

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} R_\alpha &= \frac{1}{E}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial f_\vartheta}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial \vartheta}\right), \\ R_\beta &= \frac{1}{E}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial f_\vartheta}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta\, \partial \vartheta}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda &= \frac{1}{E}\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial f_\vartheta}{\partial \lambda} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\, \partial \vartheta}\right). \end{aligned} \right.$$

L'égalité que définit $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = E[U - F(\vartheta)S] \tag{22}$$

donne

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} = E\left[\frac{\partial U}{\partial \vartheta} - F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right] - E\,F'(\vartheta)S.$$

Mais on a évidemment

$$E\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = EC + \Theta, \qquad \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \frac{C}{F(\vartheta)}.$$

On a donc

$$S = \frac{1}{E}\frac{1}{F'(\vartheta)}\left(f_\vartheta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}\right), \tag{28}$$

$$U = \frac{1}{E}\left[\mathcal{F} + \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(f_\vartheta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}\right)\right], \tag{29}$$

$$C = \frac{1}{E}\left\{\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial f_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta^2}\right) - \frac{F(\vartheta)\,F''(\vartheta)}{[F'(\vartheta)]^2}\left(f_\vartheta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}\right)\right\}. \tag{30}$$

On voit donc que, *si l'on connaît le potentiel thermodynamique interne d'un système et si l'on connaît en outre la fonction* f_ϑ, *on sait déterminer les conditions d'équilibre du système, l'énergie, l'entropie et les coefficients calorifiques du système en équilibre*, en sorte que l'*étude mécanique et thermique du système en équilibre est complète.*

Les égalités (27), (28), (29), (30) ont été démontrées en supposant que les égalités (25) et (26) étaient vérifiées, c'est-à-dire que le système était soumis aux forces extérieures qui en assurent l'équilibre.

Cette restriction devra toujours être observée lorsqu'on voudra faire usage des égalités (27) et (30). Mais nous allons voir que les égalités (28) et (29) peuvent, au contraire, être démontrées sans faire aucune hypothèse sur les forces extérieures auxquelles le système est soumis.

Supposons le système soumis à des forces extérieures *quelconques ;* lorsque les paramètres α, β, ..., λ, ϑ éprouvent des variations $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$, $\delta\vartheta$, le travail extérieur effectué a pour expression

$$d\mathcal{T}'_e = \mathbf{A}'\,\delta\alpha + \mathbf{B}'\,\delta\beta + \ldots + \mathbf{L}'\,\delta\lambda + \mathbf{\Theta}'\,\delta\vartheta,$$

A', B', ..., L', Θ' étant des fonctions uniformes de α, β, ..., λ, ϑ, généralement différentes de A, B, ..., L, Θ.

Dans la modification considérée, l'énergie interne augmente de

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\delta\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\delta\lambda + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\delta\vartheta.$$

Calculons la variation δS que subit, dans la même transformation, l'entropie du système. On a, par définition,

$$\delta S = -\frac{dQ}{F(\vartheta)},$$

dQ étant la quantité de chaleur que dégagerait le système, si, durant la modification, il était soumis aux forces extérieures propres à le maintenir en équilibre, c'est-à-dire aux forces dont le travail a pour expression

$$d\mathcal{T}_e = \mathbf{A}\,\delta\alpha + \mathbf{B}\,\delta\beta + \ldots + \mathbf{L}\,\delta\lambda + \mathbf{\Theta}\,\delta\vartheta.$$

On a donc

$$dQ = -\,\delta U + \frac{1}{E}\,d\mathfrak{T}_e = -\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\,\delta\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}}\,\delta\mathfrak{S}\right)$$
$$+ \frac{1}{E}(A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\mathfrak{S})$$

et, par conséquent,

$$\delta S = \frac{1}{F(\mathfrak{S})}\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\,\delta\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}}\,\delta\mathfrak{S}\right)$$
$$- \frac{1}{E}\,\frac{1}{F(\mathfrak{S})}(A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\mathfrak{S}).$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$, $\delta\mathfrak{S}$. Si l'on y remplace A, B, ..., L, Θ par leurs valeurs (25) et (26), on obtient les égalités suivantes, qui doivent avoir lieu quelles que soient les forces extérieures appliquées au système

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{F(\mathfrak{S})}\,\frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{1}{E}\,\frac{1}{F(\mathfrak{S})}\,\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{1}{F(\mathfrak{S})}\,\frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{1}{E}\,\frac{1}{F(\mathfrak{S})}\,\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{F(\mathfrak{S})}\,\frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{1}{E}\,\frac{1}{F(\mathfrak{S})}\,\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda},$$
$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} = \frac{1}{F(\mathfrak{S})}\,\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - \frac{1}{E}\,\frac{1}{F(\mathfrak{S})}\,f_{\mathfrak{S}}.$$

La généralité de ces égalités étant démontrée, il nous suffit de remarquer que l'on a toujours, d'après la définition de $\mathfrak{F}$ donnée par l'égalité (22),

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}} = E\left[\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - F(\mathfrak{S})\,\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}}\right] - E\,F'(\mathfrak{S})\,S,$$

pour voir que *l'on a toujours, quelles que soient les forces extérieures appliquées au système,*

$$S = \frac{1}{E}\,\frac{1}{F'(\mathfrak{S})}\left(f_{\mathfrak{S}} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}}\right), \tag{28}$$

$$U = \frac{1}{E}\left[\mathfrak{F} - \frac{F(\mathfrak{S})}{F'(\mathfrak{S})}\left(f_{\mathfrak{S}} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}}\right)\right]. \tag{29}$$

Lorsque le système est soumis aux forces extérieures quelconques définies par les fonctions A', B', ..., L', Θ', un système de variations

$$\delta\alpha,\quad \delta\beta,\quad \ldots,\quad \delta\lambda,\quad \delta\vartheta$$

des paramètres entraîne un dégagement de chaleur dQ' qui a pour valeur, *si la force vive est nulle au début et à la fin de la modification*,

$$dQ' = -\,\delta U + \frac{1}{E}(A'\,\delta\alpha + B'\,\delta\beta + \ldots + L'\,\delta\lambda + \Theta'\,\delta\vartheta).$$

Si nous mettons cette quantité sous la forme

$$dQ' = -\,(R'_\alpha\,\delta\alpha + R'_\beta\,\delta\beta + \ldots + R'_\lambda\,\delta\lambda + C'\,\delta\vartheta),$$

les quantités R'_α, R'_β, ..., R'_λ, C' différeront, en général, des quantités R_α, R_β, ..., R_λ, C qui représentent les coefficients calorifiques dans le cas particulier où le système est soumis aux forces qui le maintiennent en équilibre.

Ces quantités R'_α, R'_β, ..., R'_λ, C' auront respectivement pour valeur

$$\begin{aligned}
R'_\alpha &= \frac{\partial U}{\partial\alpha} - \frac{1}{E}A',\\
R'_\beta &= \frac{\partial U}{\partial\beta} - \frac{1}{E}B',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
R'_\lambda &= \frac{\partial U}{\partial\lambda} - \frac{1}{E}L',\\
C' &= \frac{\partial U}{\partial\vartheta} - \frac{1}{E}\Theta',
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (29),

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
R'_\alpha &= \frac{1}{E}\left[\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial f_\vartheta}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha} - A'\right],\\
R'_\beta &= \frac{1}{E}\left[\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial f_\vartheta}{\partial\beta} - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta\,\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\beta} - B'\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
R'_\lambda &= \frac{1}{E}\left[\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial f_\vartheta}{\partial\lambda} - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda} - L'\right],\\
C' &= \frac{1}{E}\left(\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial f_\vartheta}{\partial\vartheta} - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\vartheta^2}\right) + \left\{1 - \frac{F(\vartheta)\,F''(\vartheta)}{[F'(\vartheta)]^2}\right\}\left(f_\vartheta - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\vartheta} - \Theta'\right).
\end{aligned}\right.$$

Si nous comparons ces égalités aux égalités (27) et (30), nous voyons que, pour que l'une des quantités R', la quantité R'_α par exemple, devienne égale à R_α, il n'est pas du tout nécessaire que les forces qui agissent sur le système soient celles qui en assurent l'équilibre; pour que l'on ait

$$R'_\alpha = R_\alpha,$$

il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$A' = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} = A;$$

de même, pour que l'on ait

$$C' = C,$$

il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\Theta' = f_\vartheta = \Theta.$$

Nous venons d'étudier une modification que n'accompagne aucune variation de force vive. *Dans le cas où la force vive pourrait varier*, on aurait

$$dQ' = -dU + \frac{1}{E}(A'\,\delta\alpha + B'\,\delta\beta + \ldots + L'\,\delta\lambda + \Theta'\,\delta\vartheta) - \frac{1}{E}\,\delta \sum \frac{mv^2}{2}.$$

Si le système se meut librement sous l'action des forces extérieures déterminées par les quantités A', B', ..., L', Θ', on démontre que l'on a

$$\delta \sum \frac{mv^2}{2} = (A' - A)\,\delta\alpha + (B' - B)\,\delta\beta + \ldots + (L' - L)\,\delta\lambda.$$

L'égalité précédente devient donc, *pour un système qui se meut librement sous l'action de forces extérieures quelconques*,

$$dQ' = dQ. \tag{32}$$

Nous avons vu au Chapitre I qu'un cas particulier intéressant était celui où les paramètres α, β, ..., λ, ϑ étaient choisis de telle sorte que tous les points du système demeurent immobiles lorsque ϑ varie seul.

Dans ce cas, on a nécessairement, que le système soit ou non en équilibre,

$$\Theta' = \Theta' = f_\vartheta = 0.$$

Soit $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ le potentiel thermodynamique du système. Son énergie interne $U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ est donnée par l'égalité (29), qui devient

$$U = \frac{1}{E}\left[\mathfrak{F} - \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\right]. \tag{33}$$

D'après l'égalité (28), l'entropie $S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ du système devient

$$S = -\frac{1}{E}\frac{1}{F'(\vartheta)}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}. \tag{34}$$

Dans une transformation quelconque, effectuée sous l'action de forces extérieures $A', B', \ldots, L', \Theta'$, le système dégage une quantité de chaleur dQ' donnée par

$$E\,dQ' + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\delta\left[\mathfrak{F} - \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\right] + A'\,\delta\alpha + B'\,\delta\beta + \ldots + L'\,\delta\lambda. \tag{35}$$

Si le système se meut librement sous l'action des forces extérieures, cette égalité se réduit à

$$E\,dQ = -\delta\left[\mathfrak{F} - \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\right] + A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda.$$

En vertu des équations (25), on a

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta}\delta\beta + \ldots + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda}\delta\lambda = \delta\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\delta\vartheta.$$

On a donc

$$E\,dQ = \delta\left[\frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\right] - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\delta\vartheta \tag{36}$$

Dans le cas particulier où la modification est *isothermique*, cette égalité se réduit à

$$E\,dQ = \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\,\delta\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}. \tag{37}$$

D'après les égalités (27) et (30), les coefficients calorifiques du

système en équilibre ont pour valeurs

$$(38)\quad \begin{cases} R_\alpha = -\dfrac{1}{E}\dfrac{F(\Im)}{F'(\Im)}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\Im}, \\ R_\beta = -\dfrac{1}{E}\dfrac{F(\Im)}{F'(\Im)}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\beta\,\partial\Im}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda = -\dfrac{1}{E}\dfrac{F(\Im)}{F'(\Im)}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\Im}, \\ C = -\dfrac{1}{E}\left\{\dfrac{F(\Im)}{F'(\Im)}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\Im^2} - \dfrac{F(\Im)F''(\Im)}{[F'(\Im)]^2}\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial\Im}\right\}. \end{cases}$$

Nous arrivons ainsi à cette belle proposition de M. Massieu :

Lorsque les paramètres sont choisis comme nous venons de l'indiquer, l'énergie interne du système, son entropie, les coefficients mécaniques et thermiques du système en équilibre, s'expriment tous au moyen des dérivées partielles du premier et du second ordre de son potentiel thermodynamique interne.

Imaginons un système dans lequel les paramètres sont choisis comme nous venons de l'indiquer; lorsque $\Im$ varie seul, les forces extérieures n'effectuent aucun travail; supposons ce système soumis à des forces A', B', ..., L', qui sont ou ne sont pas celles qui peuvent le maintenir en équilibre; supposons enfin que, lorsque la température est maintenue constante, ces forces admettent un potentiel Ω, fonction de $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \Im$, de telle sorte que l'on ait

$$A' = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha},$$
$$B' = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$L' = -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}.$$

L'égalité (35) deviendra alors

$$E\,dQ' + \delta\sum\frac{mv^2}{2} = -\delta\left[\mathcal{F} - \frac{F(\Im)}{F'(\Im)}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Im}\right] - \delta\Omega + \frac{\partial\Omega}{\partial\Im}\,\delta\Im.$$

Mais, dans ce cas, le système admet un potentiel thermodynamique

total, défini par l'égalité

$$\Phi = \mathfrak{F} + \Omega. \tag{23}$$

On a donc

$$E\,dQ' + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\delta\left[\Phi - \frac{F(\mathfrak{S})}{F'(\mathfrak{S})}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{S}}\right] - \delta\left[\frac{F(\mathfrak{S})}{F'(\mathfrak{S})}\right] + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{S}}\,\delta\mathfrak{S}. \tag{39}$$

Dans le cas particulier où la fonction Ω ne dépend pas de $\mathfrak{S}$, on a

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{S}} = 0$$

et cette formule prend la forme beaucoup plus simple

$$E\,dQ' + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\delta\left[\Phi - \frac{F(\mathfrak{S})}{F'(\mathfrak{S})}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{S}}\right]. \tag{40}$$

Toutes nos formules se simplifient si nous prenons pour température la température absolue elle-même ; nous avons alors

$$\mathfrak{S} = T, \qquad F(\mathfrak{S}) = T;$$

si nous nous plaçons, en outre, dans les conditions où

$$\Theta' = \Theta = f_{\mathfrak{S}} = 0,$$

nos formules (33), (34), (31), (35), (36), (39) et (40) deviennent

$$U = \frac{1}{E}\left(\mathfrak{F} - T\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}\right), \tag{33 bis}$$

$$S = -\frac{1}{E}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}, \tag{34 bis}$$

$$\left\{\begin{aligned} R_\alpha &= -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha\,\partial T}, \\ R_\beta &= -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha\,\partial T}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda &= -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda\,\partial T}, \\ C &= -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T^2}. \end{aligned}\right. \tag{31 bis}$$

$$(35\ bis)\qquad \mathrm{E}\,dQ' + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\,\delta\left(\mathcal{F} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}\right) + \mathrm{A}'\delta\alpha + \mathrm{B}'\delta\beta + \ldots + \mathrm{L}'\delta\lambda,$$

$$(36\ bis)\qquad \mathrm{E}\,dQ = \mathrm{T}\,\delta\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}},$$

$$(39\ bis)\qquad \mathrm{E}\,dQ' + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\,\delta\left(\Phi - \mathrm{T}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{T}}\right) - \mathrm{T}\,\delta\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{T}},$$

$$(40\ bis)\qquad \mathrm{E}\,dQ' + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\,\delta\left(\Phi - \mathrm{T}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{T}}\right).$$

Ces diverses formules sont fréquemment employées dans les applications.

CHAPITRE V.

D'UN CHANGEMENT DE VARIABLES.

Supposons que les paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$ qui définissent un système aient été choisis de manière que la seule variation du paramètre ϑ n'entraîne aucun travail des forces extérieures appliquées au système. Soit

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$$

le potentiel thermodynamique interne de ce système.

Posons

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta). \end{cases}$$

Le système sera en équilibre si on le soumet aux forces extérieures

ayant pour le travail virtuel

$$d\mathfrak{T}_e = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda,$$

A, B, ..., L étant définis par les égalités

$$(42)\quad \begin{cases} A = f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ B = f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L = f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta). \end{cases}$$

Nous savons que les fonctions $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$ sont des fonctions *uniformes* des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

On peut supposer les équations (42) résolues par rapport à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. On aura alors

$$(43)\quad \begin{cases} \alpha = h_A(A, B, \ldots, L, \vartheta), \\ \beta = h_B(A, B, \ldots, L, \vartheta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda = h_L(A, B, \ldots, L, \vartheta). \end{cases}$$

Ces équations définissent les valeurs que prennent, à la température ϑ, les paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, lorsque le système est en équilibre sous l'action de forces extérieures, ayant pour travail virtuel

$$d\mathfrak{T}_e = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda.$$

Il peut fort bien se faire que les fonctions $h_A, h_B, \ldots, h_L$ *ne soient pas des fonctions uniformes des variables* A, B, ..., L, ϑ. A un même système de valeurs de A, B, ..., L, ϑ peuvent correspondre plusieurs systèmes ou même une infinité de systèmes de valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

On peut se proposer d'étudier le système, en prenant, pour le définir, les paramètres A, B, ..., L, ϑ, au lieu des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$. Nous allons donner quelques formules générales relatives à cette étude.

Considérons l'expression

$$(44)\quad H = \mathcal{F} - (A\alpha + B\beta + \ldots + L\lambda),$$

qui est une fonction *uniforme* de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$. Si, au moyen des égalités (43), nous y remplaçons $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ par leurs expressions en fonction de A, B, ..., L, ϑ, nous obtiendrons une fonction de ces

nouvelles variables, *qui peut fort bien n'être plus uniforme*. Désignons-la par

$$\mathfrak{H}(A, B, \ldots, L, \mathfrak{T}).$$

Si les quantités A, B, ..., L sont maintenues constantes, on aura

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda = \delta(A\alpha + B\beta + \ldots + L\lambda).$$

Dans ce cas, par conséquent, les forces extérieures constantes A, B, ..., L admettent un potentiel

$$\Omega = -(A\alpha + B\beta + \ldots + L\lambda),$$

et la fonction

$$\mathfrak{H}(A, B, \ldots, L)$$

est le *potentiel thermodynamique total d'un système soumis aux forces constantes* A, B, ..., L.

L'égalité (44) nous donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial A} = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial A} + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial A} + \ldots + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial A} \\ - A\frac{\partial\alpha}{\partial A} - B\frac{\partial\beta}{\partial A} - \ldots - L\frac{\partial\lambda}{\partial A} - \alpha.\end{aligned}$$

Mais les égalités (41) et (42) donnent

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha} - A = 0, \\ \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\beta} - B = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda} - L = 0.\end{gathered}$$

On obtient donc ainsi la première des égalités

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial A}, \\ \beta &= -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial B}, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda &= -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial L};\end{aligned}\right.$$

les autres s'établissent d'une manière analogue; d'où la proposition suivante :

Lorsque, pour un système donné, on connaît la fonction

$$\mathfrak{H}(A, B, \ldots, L, \vartheta),$$

on peut, par de simples différentiations, obtenir les valeurs que prennent les paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, *lorsque ce système est en équilibre, à la température* ϑ, *sous l'action des forces extérieures* A, B, ..., L.

Si les paramètres $A, B, \ldots, L, \vartheta$ varient de $\delta A, \delta B, \ldots, \delta L, \delta\vartheta$, le système, supposé constamment en équilibre, éprouve une modification infiniment petite et dégage une quantité de chaleur infiniment petite

$$dQ = -(\rho_A\,\delta A + \rho_B\,\delta B + \ldots + \rho_L\,\delta L + \gamma\,\delta\vartheta).$$

$\rho_A, \rho_B, \ldots, \rho_L, \gamma$ sont, dans le nouveau système de variables, les *coefficients calorifiques* du système; γ est la capacité calorifique relative au système de variables $A, B, \ldots, L, \vartheta$.

On a évidemment, entre les paramètres

$$R_\alpha, \quad R_\beta, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad C$$

et les paramètres

$$\rho_A, \quad \rho_B, \quad \ldots, \quad \rho_L, \quad \gamma,$$

les relations

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
R_\alpha &= \rho_A \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \rho_B \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \ldots + \rho_L \frac{\partial L}{\partial \alpha},\\
R_\beta &= \rho_A \frac{\partial A}{\partial \beta} + \rho_B \frac{\partial B}{\partial \beta} + \ldots + \rho_L \frac{\partial L}{\partial \beta},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
R_\lambda &= \rho_A \frac{\partial A}{\partial \lambda} + \rho_B \frac{\partial B}{\partial \lambda} + \ldots + \rho_L \frac{\partial L}{\partial \lambda},\\
C &= \rho_A \frac{\partial A}{\partial \vartheta} + \rho_B \frac{\partial B}{\partial \vartheta} + \ldots + \rho_L \frac{\partial L}{\partial \vartheta} + \gamma,
\end{aligned}\right.$$

ou bien encore

$$(47)\qquad \begin{cases} \rho_A = R_\alpha \dfrac{\partial \alpha}{\partial A} + R_\beta \dfrac{\partial \beta}{\partial A} + \ldots + R_\lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial A}, \\ \rho_B = R_\alpha \dfrac{\partial \alpha}{\partial B} + R_\beta \dfrac{\partial \beta}{\partial B} + \ldots + R_\lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial B}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \rho_L = R_\alpha \dfrac{\partial \alpha}{\partial L} + R_\beta \dfrac{\partial \beta}{\partial L} + \ldots + R_\lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial L}, \\ \gamma = R_\alpha \dfrac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{T}} + R_\beta \dfrac{\partial \beta}{\partial \mathfrak{T}} + \ldots + R_\lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathfrak{T}} + C. \end{cases}$$

Ces égalités permettent de passer des coefficients calorifiques relatifs à un système de variables aux coefficients calorifiques relatifs à l'autre système, et inversement.

L'égalité

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} + A\alpha + B\beta + \ldots + L\lambda$$

donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} = {} & \frac{\partial A}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A^2}\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{T}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\, \partial B}\frac{\partial B}{\partial \mathfrak{T}} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\, \partial L}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{T}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\, \partial \mathfrak{T}}\right) \\ & + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\, \partial A}\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{T}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B^2}\frac{\partial B}{\partial \mathfrak{T}} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\, \partial L}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{T}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\, \partial \mathfrak{T}}\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\partial L}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\, \partial A}\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{T}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\, \partial B}\frac{\partial B}{\partial \mathfrak{T}} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L^2}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{T}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\, \partial \mathfrak{T}}\right) \\ & + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial A}\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial B}\frac{\partial^2 B}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} + \ldots + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial L}\frac{d^2 L}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} \\ & + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} + \beta \frac{\partial^2 B}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} + \ldots + \lambda \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} \\ & + \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{T}}. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte des égalités (45), certains termes disparaissent,

et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{I}} = {} & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial A}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial L}{\partial\alpha} \\ & + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial A}\right)\frac{\partial A}{\partial\mathfrak{I}} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial B}\right)\frac{\partial B}{\partial\mathfrak{I}} + \ldots + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial L}\right)\frac{\partial L}{\partial\alpha} \\ & + \frac{\partial A}{\partial\mathfrak{I}}.\end{aligned}$$

Mais, d'après les égalités (45), on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial A}\right) &= -\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha} = -1, \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial B}\right) &= -\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial L}\right) &= -\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 0.\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{I}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial A}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial L}{\partial\alpha}.$$

D'autre part, d'après la première des égalités (38), on a

$$R_\alpha = -\frac{1}{E}\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{I}}.$$

On a donc la première des égalités

$$\begin{aligned}R_\alpha &= -\frac{1}{E}\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial A}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial L}{\partial\alpha}\right), \\ R_\beta &= -\frac{1}{E}\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial B}{\partial\beta} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial L}{\partial\beta}\right), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda &= -\frac{1}{E}\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial A}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial B}{\partial\lambda} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\,\partial\mathfrak{I}}\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right);\end{aligned}$$

les autres s'obtiennent de même.

En comparant ces égalités aux égalités (46), on voit immédiatement que l'on doit avoir

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho_A &= -\frac{1}{E}\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\,\partial \mathfrak{I}},\\ \rho_B &= -\frac{1}{E}\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\,\partial \mathfrak{I}},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \rho_L &= -\frac{1}{E}\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\,\partial \mathfrak{I}}. \end{aligned}\right.$$

L'égalité

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} + A\alpha + B\beta + \ldots + L\lambda$$

donne

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}} + \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial A} + \alpha\right)\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{I}} + \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial B} + \beta\right)\frac{\partial B}{\partial \mathfrak{I}} + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial L} + \lambda\right)\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{I}},$$

ou, en tenant compte des égalités (45),

$$(49)\qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}}.$$

L'égalité (34) donne alors

$$(50)\qquad S = -\frac{1}{E}\frac{1}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}}.$$

On a d'ailleurs

$$E[U - F(\mathfrak{I})S] = \mathfrak{H} + A\alpha + B\beta + \ldots + L\lambda.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (45) et (50), donne

$$(51)\qquad U = \frac{1}{E}\left[\mathfrak{H} - \frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}} - A\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial A} - B\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial B} - \ldots - L\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial L}\right].$$

L'égalité

$$(49)\qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}}$$

donne aussi

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\, \partial \mathfrak{I}} \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{I}} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\, \partial \mathfrak{I}} \frac{\partial B}{\partial \mathfrak{I}} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\, \partial \mathfrak{I}} \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{I}}.$$

On en déduit, en tenant compte des égalités (48),

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{E}\left\{\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}^2} - \frac{F(\mathfrak{I})F''(\mathfrak{I})}{[F'(\mathfrak{I})]^2}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}}\right\} \\ & = -\frac{1}{E}\left\{\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}^2} - \frac{F(\mathfrak{I})F''(\mathfrak{I})}{[F'(\mathfrak{I})]^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}}\right\} \\ & \quad + \rho_A \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{I}} + \rho_B \frac{\partial B}{\partial \mathfrak{I}} + \ldots + \rho_L \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{I}}, \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte de la dernière des égalités (38) et de la dernière des égalités (46),

$$\gamma = -\frac{1}{E}\left\{\frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}^2} - \frac{F(\mathfrak{I})F''(\mathfrak{I})}{[F'(\mathfrak{I})]^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{I}}\right\}. \tag{52}$$

Les égalités (45), (48), (50), (51), (52) conduisent à la conclusion suivante :

Si, pour un système, on connaît la fonction

$$\mathfrak{H}(A, B, \ldots, L, \mathfrak{I}),$$

on sait, par de simples différentiations, obtenir les valeurs que les paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ *prennent, à la température* $\mathfrak{I}$, *dans le système en équilibre sous l'action des forces* A, B, ..., L, *l'énergie interne du système, son entropie et tous ses coefficients calorifiques.*

C'est à M. Massieu qu'est due cette belle proposition.

Le rôle que joue la fonction $\mathfrak{H}$ lorsque l'on prend pour variables les quantités A, B, ..., L, $\mathfrak{I}$ est tout à fait analogue au rôle que joue la fonction $\mathfrak{F}$ lorsque l'on prend pour variables les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{I}$. Aussi M. Massieu donne-t-il aux deux fonctions $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{H}$ le nom de *fonctions caractéristiques.*

Si l'on prend pour température la température absolue, les égalités (48), (50), (51), (52) deviennent

$$(48\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_A &= -\frac{1}{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial A\, \partial T},\\ \rho_B &= -\frac{1}{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial B\, \partial T},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \rho_L &= -\frac{1}{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial L\, \partial T},\end{aligned}\right.$$

$$(50\ bis)\qquad S = -\frac{1}{E}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial T},$$

$$(51\ bis)\qquad U = \frac{1}{E}\left(\mathfrak{H} - T\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial T} - A\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial A} - B\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial B} - \ldots - L\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial L}\right),$$

$$(52\ bis)\qquad \gamma = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial T^2}.$$

Sur la pression dans les milieux diélectriques ou magnétiques.

PAR P. DUHEM, *Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.*

INTRODUCTION.

Tous les physiciens connaissent la théorie des pressions dans les milieux polarisés qu'a imaginée Maxwell; perfectionnée par H. von Helmholtz, par G. Kirchhoff, par M. E. Lorberg, cette théorie ne peut éviter des difficultés et des contradictions qui ont été signalées par M. Beltrami, par E. Mathieu, par M. M. Brillonin.

Nous avons tenté, dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, de donner une théorie des pressions dans les milieux magnétiques ou diélectriques, distincte de celle que Maxwell a indiquée et exempte des difficultés que cette dernière présente; la méthode que nous avons suivie, fondée sur l'emploi du principe des vitesses virtuelles, paraît hors de contestation; malheureusement, une erreur s'est glissée dans nos calculs; en estimant la variation virtuelle du potentiel magnétique d'un système, nous avons négligé, comme infiniment petit du second ordre, une quantité qui était en réalité un infiniment petit du premier ordre; il résulte de cette erreur que les conditions d'équilibre qui se réfèrent aux divers points de la surface limite d'un milieu polarisé ont été données par nous d'une manière inexacte; au contraire, les conditions d'équilibre qui se réfèrent aux points situés à l'intérieur de la masse magnétique ou diélectrique ont été exactement données. La même erreur entache les conditions aux limites que nous avons établies en étudiant les solutions d'un sel magnétique.*

Cette erreur a été signalée par M. Liénard.† M. Liénard a donné une évaluation du terme négligé par nous; cette évaluation le conduit à une conséquence

---

* Sur les dissolutions d'un sel magnétique (Annales de l'Ecole Normale Sup^{e}. 3e série, t. VII, p. 289. 1890).

† Liénard, *Pressions à l'intérieur des aïmants et des diélectriques.* (La lumière électrique. Tome LII, p. 7 et p. 67, 1894.)

remarquable : pour maintenir en équilibre un fluide polarisé, il faut appliquer à chacun des éléments de la surface qui le limite une pression dont la direction est normale à l'élément, mais *dont la grandeur dépend de l'orientation de l'élément ;* la grandeur de cette pression en un point de l'élément est $2\pi\varepsilon M^2 \cos^2(M, N_i)$, ε étant la constante des lois de Coulomb et M l'intensité de polarisation.

Lorsque le corps est assez faiblement polarisé pour que l'on puisse négliger son potentiel sur lui même, cette pression introduite par M. Liénard devient proportionnelle au carré de l'intensité du champ et *au carré du coefficient de polarisation* du corps ; au contraire, tous les autres termes que la polarisation conduit à introduire dans l'étude des pressions sont proportionnels au carré de l'intensité du champ et *à la première puissance du coefficient de polarisation ;* le terme complémentaire introduit par M. Liénard peut donc être négligé lorsque l'on considère des corps faiblement diélectriques ou faiblement magnétiques ; pour de tels corps, la théorie que nous avons donnée subsiste en entier. Au contraire, pour les corps fortement magnétiques tels que le fer doux, le terme complémentaire a une grande valeur.

Les belles recherches de M. Liénard nous ont amené à reprendre, à notre tour, l'étude des pressions dans les milieux polarisés ; cette étude repose, comme du reste la mise en équation de tous les problèmes relatifs aux corps magnétiques ou diélectriques, sur l'expression de la variation infiniment petite qu'éprouve le potentiel d'un système polarisé sur lui même, lorsque ce système éprouve une modification infiniment petite ; cette expression, qui était incomplète dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, nous avons cherché à l'établir avec rigueur.

La méthode qui sert à traiter avec précision les questions relatives à la fonction potentiel ou au potentiel d'un *système polarisé*, où A, B, C, sont les composantes de la polarisation au point (x, y, z), est bien connue ; elle consiste à ramener, au moyen d'intégrations par parties, la question proposée à une question analogue relative à un *système électrisé*, portant, en chaque point de sa masse, une densité électrique solide,

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) \tag{1}$$

et, en chaque point de sa surface, une densité électrique superficielle,

$$\sigma = -\left[A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\right]. \tag{2}$$

Cette méthode ramène la question que nous nous étions proposée à celle-ci :

trouver l'expression de la variation infiniment petite qu'éprouve le potentiel électrostatique d'un système lorsque la forme, la position et l'électrisation de ce système éprouvent des modifications infiniment petites. Ce dernier problème peut, d'ailleurs, être regardé comme le problème fondamental de l'électrostatique; il serait donc désirable que la solution en soit donnée avec la rigueur que Gauss, Bouquet et M. O. Holder ont apporté dans les démonstrations relatives à la fonction potentielle; cette solution, qui n'avait jamais été donnée à notre connaissance, est l'objet du Chapître I du présent Mémoire.

Au Chapître II, nous avons montré brièvement comment on pouvait déduire de la formule trouvée quelques unes des lois fondamentales de l'Electrostatique.

Repasser, au moyen des formules (1) et (2), de l'expression de la variation infiniment petite d'un potentiel électrostatique à l'expression de la variation du potentiel d'un système polarisé sur lui même, c'est l'objet du Chapître III.

Au Chapître IV, nous faisons usage des résultats obtenus pour traiter le problème de l'équilibre d'un fluide incompressible doué de force coercitive; dans nos *Leçons sur l'Electricité et la Magnétisme*, nous avions déjà obtenu les conditions de cet équilibre; mais l'une de ces conditions était faussée par l'omission du terme complémentaire introduit par M. Liénard, et la démonstration des autres laissait à désirer au point de vue de la rigueur.

Enfin, au Chapître V, nous établissons les conditions générales de l'équilibre d'un fluide compressible dénué de force coercitive.

Dans les deux premiers Chapîtres de ce Mémoire, nous avons évité d'examiner le cas où la surface de contact de deux corps porte une *couche électrique double;* l'étude des couches électriques doubles présente des difficultés spéciales que nous examinerons dans un travail spécial.

Dans les deux derniers Chapîtres, nous avons borné notre exposé aux fluides polarisés; l'équilibre des solides élastiques polarisés se traitera sans peine en suivant les méthodes indiquées dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme* et en corrigeant, au moyen des calculs donnés ici, la forme des conditions aux limites.

Nous n'avons pas repris, non plus, l'étude de l'influence que le magnétisme exerce sur une dissolution d'un sel magnétique dans un liquide non magnétique; le lecteur trouvera sans peine de quelle manière les conditions aux limites doivent être corrigées par l'introduction du terme complémentaire de M. Liénard; dans le cas, seul réalisable pratiquement, où le sel est peu magnétique, ce terme

est négligeable ; dans ce cas, les résultats que nous avons donnés autrefois deviennent tous exacts.

CHAPÎTRE I.

Variation du Potentiel électrostatique d'un Système.

Considérons un système électrisé portant à la fois une distribution électrique solide à l'intérieur des masses continues qui le forment et une distribution superficielle sur les surfaces de discontinuité qui limitent ces masses ; nous laisserons de côté, dans le présent travail, le cas où ces surfaces porteraient une *couche électrique double ;* nous nous proposons de consacrer à ce cas un mémoire spécial.

Soient : M_1 un point situé à l'intérieur de l'une des masses continues qui forment le système :

dv_1, un élément de volume entourant le point M_1 ;
ρ_1, la densité électrique solide au point M_1 ;
μ_1, un point situé sur une surface de discontinuité ;
dS_1, une aire élémentaire découpée sur cette surface, autour du point μ_1 ;
σ_1, la densité électrique superficielle au point μ_1.

Au point $M(x, y, z)$, la distribution électrique solide aura pour fonction potentielle,

$$U(M) = U(x, y, z) = \int \frac{\rho_1}{r_1} dv_1, \tag{1}$$

r_1 étant la distance $\overline{MM_1}$ et l'intégrale s'étendant à tout espace rempli par une masse continue électrisée.

Au point $M(x, y, z)$, la distribution électrique superficielle aura pour fonction potentielle,

$$W(M) = W(x, y, z) = \mathrm{S} \frac{\sigma_1}{r_1} dS_1, \tag{2}$$

r_1 désignant la distance $\overline{M\mu_1}$ et l'intégrale s'étendant à toutes les surfaces de discontinuité électrisées.

La fonction potentielle totale aura pour valeur, au point $M(x, y, z)$,

$$V(x, y, z) = V(M) = U(M) + W(M)$$
$$= \int \frac{\rho_1}{r_1} dv_1 + \mathrm{S} \frac{\sigma_1}{r_1} dS_1. \tag{3}$$

Le Potentiel électrostatique du système a pour valeur,

$$Y = \frac{\varepsilon}{2}\int \rho\, U dv + \varepsilon \mathbf{S} \sigma\, U dS + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{S} \sigma\, W dS, \tag{4}$$

ε étant la constante fondamentale de l'électrostatique.

Il est la somme de trois termes :

1°. Le Potentiel de la distribution solide sur elle même : $\frac{\varepsilon}{2}\int \rho\, U dv$;

2°. Le Potentiel de la distribution solide sur la distribution superficielle : $\varepsilon \mathbf{S} \sigma\, U dS$;

3°. Le Potentiel de la distribution superficielle sur elle même : $\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{S} \sigma\, W dS$.

Prenons maintenant deux états du système infiniment voisins l'un de l'autre.

Entre chaque point *géométrique* M du système dans le premier état et chaque point *géométrique* M' dans le second état, établissons une correspondance univoque assujettie aux conditions suivantes :

1°. Deux points correspondants M, M', sont toujours infiniment voisins l'un de l'autre.

2°. A tout volume v du premier système, tout entier compris à l'intérieur d'une même masse continue, correspond un volume v' du second système, tout entier compris à l'intérieur d'une même masse continue, et réciproquement.

3°. A toute aire S du premier système, tout entière tracée sur une même surface de discontinuité, correspond une aire S' du second système, tout entière tracée sur une même surface de discontinuité, et réciproquement.

(Ces deux conditions excluent la possibilité de toute scission, de toute déchirure, durant la déformation.)

4°. En tout point d'un volume tel que v, la déformation fait naître des dilatations et des glissements qui sont infiniment petits.

5°. En tout point d'une aire telle que S, qui se transforme en sa correspondante S', les déformations sont infiniment petites.

6°. Les densités électriques solides ρ, ρ', en deux points correspondants M, M', diffèrent infiniment peu l'une de l'autre.

7°. Les densités électriques superficielles σ, σ', en deux points correspondants μ, μ', diffèrent infiniment peu l'une de l'autre.*

---

* Dans un grand nombre de cas, les hypothèses précédentes seront vérifiées, si l'on fait correspondre entre eux les deux points *géométriques* M, M', positions initiale et finale d'un même point *matériel* ; on pourra alors, si on le juge utile, adopter ce mode de correspondance, mais on ne sera jamais tenu de la faire ; on pourra toujours, si l'on y trouve avantage, en établir un autre.

Soient Y la valeur du potentiel électrostatique du système dans le premier état et Y' la valeur du potentiel électrostatique du système dans le second état. Nous allons chercher à calculer l'infiniment petit principal de la différence $(Y' - Y)$, infiniment petit principal que nous désignerons par δY.

1°. *Calcul du terme principal de* $[U'(M') - U(M)]$.

En un point M du système, pris dans le premier état, la distribution électrique solide que porte le système dans cet état admet une fonction potentielle $U(M)$; au point correspondant M' du système pris dans le second état, la distribution électrique solide que porte le système dans cet état admet une fonction potentielle $U'(M')$. *La différence* $[U'(M') - U(M)]$ *est infiniment petite;* cette proposition est évidente lorsque le point M et, par conséquent, le point M', sont extérieurs aux masses électrisées; une démonstration est nécessaire dans le cas où le point M, et, partant, le point M', appartiennent à une masse électrisée.

Soit P la limite supérieure des valeurs absolues que peut prendre la densité électrique solide ρ en un point quelconque du système et en l'un quelconque des états compris dans l'ensemble d'états que l'on veut considérer.

Soit m un point quelconque du système en l'un de ses états. Du point m comme centre, décrivons une sphère Σ de rayon R; la fonction potentielle au point m de la distribution électrique solide répandue à l'intérieur de cette sphère sera inférieure, en valeur absolue, à $2\pi PR^2$. On peut donc prendre R assez petit pour que cette fonction potentielle soit inférieure en valeur absolue à une quantité donnée d'avance η. R étant ainsi déterminé, prenons le second état du système assez voisin du premier pour que $\overline{MM'}$ soit inférieur à R. Posons :

$$U(M) = u(M) + \mathfrak{U}(M),$$

$u(M)$ étant, au point M, la fonction potentielle de la distribution solide que renferme, dans le premier état du système, une sphère de rayon R ayant le point M pour centre et $\mathfrak{U}(M)$ étant la fonction potentielle de la distribution solide qui demeure extérieure à cette sphère. Posons de même

$$U'(M') = u'(M') + \mathfrak{U}'(M'),$$

$u'(M')$ étant, au point M', la fonction potentielle de la distribution solide que renferme, dans le second état du système, une sphère de rayon R ayant le point M' pour centre et $\mathfrak{U}'(M')$ étant la fonction potentielle de la distribution superficielle qui demeure extérieure à cette sphère. Nous aurons sûrement

$$|u(M)| < \eta, \quad |u'(M')| < \eta.$$

D'autre part, le point M est intérieur à la sphère de rayon R ayant le point M' pour centre et le point M' est intérieur à la sphère de rayon R ayant le point M pour centre ; il est alors évident que $\mathfrak{U}'(M')$ tend d'une manière continue vers $\mathfrak{U}(M)$, lorsque le second état du système tend vers le premier ; on peut par conséquent prendre le second état assez voisin du premier pour que l'on ait

$$|\mathfrak{U}'(M') - \mathfrak{U}(M)| < \eta.$$

On aura, alors

$$|U'(M') - U(M)| < 3\eta.$$

On peut donc prendre le second état du système assez voisin du premier pour que la différence $[U'(M') - U(M)]$ soit inférieure en valeur absolue à une quantité donnée d'avance ; cette différence est donc infiniment petite, comme nous l'avions annoncé.

Nous sommes assurés que la différence $[U'(M') - U(M)]$ peut être regardée comme un infiniment petit du premier ordre ; nous allons maintenant évaluer le terme principal de cette quantité.

Nous avons

$$U'(M') - U(M) = \int \frac{\rho_1'}{\overline{M'M_1'}} dv_1' - \int \frac{\rho_1}{\overline{MM_1}} dv_1,$$

la seconde intégrale s'étendant à tous les éléments dv_1 du premier état, et la première à tous les éléments *correspondants* dv_1' du second état.

Nous pouvons exprimer cette différence au moyen d'intégrales toutes étendues aux éléments dv_1 du premier état, et écrire :

$$\begin{aligned} U'(M') - U(M) = & \int \frac{\rho_1' - \rho_1}{\overline{MM_1}} dv_1 \\ & + \int \rho_1 \left(\frac{1}{\overline{M'M_1'}} - \frac{1}{\overline{MM_1}} \right) dv_1 \\ & + \int \frac{\rho_1}{\overline{MM_1}} \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} dv_1 + K, \end{aligned} \tag{5}$$

avec

$$\begin{aligned} K = & \int \left(\frac{\rho_1'}{\overline{M'M_1'}} - \frac{\rho_1}{\overline{MM_1}} \right) \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} dv_1 \\ & + \int (\rho_1' - \rho_1) \left(\frac{1}{\overline{M'M_1'}} - \frac{1}{\overline{MM_1}} \right) dv_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Posons

$$\lambda_1 = \lambda(M_1) = \frac{dv_1'}{dv_1}; \tag{7}$$

$\lambda(M_1)$ sera, d'après nos conventions, une fonction du point M_1, qui gardera, pour tous les points M_1, une valeur infiniment voisine de 1.

Nos conventions nous permettent également d'écrire

$$\frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} = \theta\varpi(M_1) = \theta\varpi_1, \tag{8}$$

$$\rho_1' - \rho_1 = \vartheta p(M_1) = \vartheta p_1, \tag{9}$$

θ et ϑ étant deux facteurs infiniment petits indépendants du point M_1, tandis que $\varpi(M_1)$ et $p(M_1)$ sont deux fonctions finies du point M_1.

Nous pouvons alors écrire l'égalité (6) sous la forme

$$\begin{aligned} K = \theta\Big(\int \frac{\lambda_1\varpi_1\rho_1'}{\overline{M'M_1'}}\,dv_1' - \int \frac{\varpi_1\rho_1}{\overline{MM_1}}\,dv_1\Big) \\ + \vartheta\Big(\int \frac{\lambda_1 p_1}{\overline{M'M_1'}}\,dv_1' - \int \frac{p_1}{\overline{MM_1}}\,dv_1\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

La différence

$$\int \frac{\lambda_1\varpi_1\rho_1'}{\overline{M'M_1'}}\,dv_1' - \int \frac{\varpi_1\rho_1}{\overline{MM_1}}\,dv_1$$

est ce que deviendrait la différence $[U'(M') - U(M)]$ si, au point M_1 du système pris dans le premier état, la densité électrique solide avait la valeur finie $\varpi_1\rho_1$ et si, au point correspondant M_1' du système pris dans le second état, la densité électrique solide avait la valeur, infiniment voisine de la précédente, $\lambda_1\varpi_1\rho_1$; dès lors, nous savons que cette différence est infiniment petite.

La différence

$$\int \frac{\lambda_1 p_1}{\overline{M'M_1'}}\,dv_1' - \int \frac{p_1}{\overline{MM_1}}\,dv_1$$

est ce que deviendrait la différence $[U'(M') - U(M)]$, si, au point M_1 du système pris dans le premier état, la densité électrique solide avait la valeur finie p_1 et si, au point correspondant M_1' du système pris dans le second état, la densité électrique solide avait la valeur, infiniment voisine de la précédente, $\lambda_1 p_1$; dès lors, nous savons que cette différence est infiniment petite.

Comme ϑ et θ sont deux facteurs infiniment petits, l'égalité (10) nous apprend que *K est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.*

Le terme principal de $[U'(M') - U(M)]$ est donc formé par l'ensemble des termes explicitement écrits au second membre de l'égalité (5).

2°. *Variation du potentiel de la distribution électrique solide sur elle-même.*

Nous aurons

$$\delta\int U\rho dv = \int U'\rho' dv' - \int U\rho dv$$
$$= \int (U' - U)\rho dv$$
$$+ \int (\rho' - \rho)\, U dv$$
$$+ \int \rho U \frac{dv' - dv}{dv} dv + H, \tag{11}$$

avec

$$H = \int (U' - U)(\rho' dv' - \rho dv) + \int U(\rho' - \rho)\frac{dv' - dv}{dv} dv. \tag{12}$$

En vertu des égalités (8) et (9), nous pourrons écrire

$$H = \theta\int (U' - U)\,\varpi\rho dv + \vartheta\int (U' - U)\, y dv$$
$$+ \theta\vartheta\int U' p\varpi dv. \tag{13}$$

La différence

$$U' - U = U'(M) - U(M)$$

étant infiniment petite, ainsi que les deux facteurs θ et ϑ, cette égalité (13) montre que *tous les termes qui composent la quantité H sont infiniment petits d'ordre supérieur au premier.* Le terme principal de $\delta\int U\rho dv$ est donc représenté par l'ensemble des termes explicitement écrits au second membre de l'égalité (11). On peut d'ailleurs, dans le premier de ces termes, remplacer la différence $(U' - U)$ par son infiniment petit principal, c'est-à-dire par l'ensemble des termes explicitement écrits au second membre de l'égalité (5). On obtient ainsi l'égalité suivante:

$$\delta\int U\rho dv = \int (\rho' - \rho)\, U dv$$
$$+ \int\int \frac{\rho_1' - \rho_1}{MM_1}\rho dv_1 dv$$
$$+ \int\int \rho_1\left(\frac{1}{M'M_1'} - \frac{1}{MM_1}\right)\rho dv_1 dv$$
$$+ \int\int \frac{\rho_1}{MM_1}\,\frac{dv_1' - dv_1}{dv_1}\rho dv_1 dv$$
$$+ \int \rho U \frac{dv' - dv}{dv} dv. \tag{14}$$

Transformons cette égalité (14).

Plaçons, au point M_1, une densité électrique solide $R_1 = \rho_1' - \rho_1$; soit

$$\mathfrak{u}(M) = \int \frac{R_1}{\overline{MM_1}} dv_1$$

la valeur, au point M, de la distribution ainsi obtenue. Une identité bien connue, due à Gauss, nous donnera

$$\int \mathfrak{u} \rho dv = \int U R dv,$$

ou bien

$$\int\int \frac{\rho_1' - \rho_1}{\overline{MM_1}} \rho dv_1 dv = \int (\rho' - \rho)\, U dv. \tag{15}$$

Nous aurons identiquement

$$\begin{aligned}\int\int \frac{\rho_1}{\overline{MM_1}} \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} \rho dv_1 dv &= \int\int \frac{\rho}{\overline{M_1 M}} \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} \rho_1 dv\, dv_1 \\ &= \int \rho_1 U_1 \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} dv_1 \\ &= \int \rho U \frac{dv' - dv}{dv} dv. \end{aligned} \tag{16}$$

Enfin nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int\int \rho\rho_1 \left(\frac{1}{\overline{M'M_1'}} - \frac{1}{\overline{MM_1}}\right) dv\, dv_1 &= -\int\int \frac{\overline{M'M_1'}^2 - \overline{MM_1}^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 \\ = -\int\int \frac{(x_1'-x')^2+(y_1'-y')^2+(z_1'-z')^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2-(z_1-z)^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} &\rho\rho_1 dv\, dv_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}&\int\int \frac{(x_1'-x')^2 - (x_1-x)^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 \\ &= \int\int \frac{[(x_1'-x_1) - (x'-x)](x_1' - x' + x_1 - x)}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 \\ &= \int \rho_1 (x_1' - x_1)\left[\int \frac{x_1' - x' + x_1 - x}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho dv\right] dv_1 \\ &+ \int \rho (x' - x)\left[\int \frac{x' - x_1' + x - x_1}{\overline{M_1M}.\overline{M_1'M'}(\overline{M_1M} + \overline{M_1'M'})} \rho_1 dv_1\right] dv \\ &= 2\int \rho (x' - x)\left[\int \frac{x' - x_1' + x - x_1}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'} + (\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho_1 dv_1\right] dv. \end{aligned} \tag{18}$$

Mais il résulte des hypothèses faites que les rapports $\frac{x' - x_1'}{x - x_1}$, $\frac{\overline{M'M_1'}}{\overline{MM_1}}$, diffèrent

infiniment peu de 1, même lorsque $(x - x_1)$ et $\overline{MM_1}$ sont infiniment petits ; on peut donc écrire

$$\int \frac{x' - x'_1 + x - x_1}{\overline{MM_1} . \overline{M'M'_1} (\overline{MM_1} + \overline{M'M'_1})} \rho_1 dv_1$$
$$= \int \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1 + \int K \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1, \qquad (19)$$

K étant infiniment petit. Au second membre de cette égalité (19), le premier terme est évidemment fini et le second infiniment petit. Cette égalité, jointe à l'égalité (18), montre alors qu'en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on peut écrire la première des égalités

$$\left.\begin{aligned}
&\int\int \frac{(x'_1 - x')^2 - (x_1 - x)^2}{\overline{MM_1} . \overline{M'M'_1} (\overline{MM_1} + \overline{M'M'_1})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 = 2 \int \rho (x' - x) \left(\int \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1 \right) dv, \\
&\int\int \frac{(y'_1 - y')^2 - (y_1 - y)^2}{\overline{MM_1} . \overline{M'M'_1} (\overline{MM_1} + \overline{M'M'_1})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 = 2 \int \rho (y' - y) \left(\int \frac{y - y_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1 \right) dv, \\
&\int\int \frac{(z'_1 - z')^2 - (z_1 - z)^2}{\overline{MM_1} . \overline{M'M'_1} (\overline{MM_1} + \overline{M'M'_1})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 = 2 \int \rho (z' - z) \left(\int \frac{z - z_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1 \right) dv;
\end{aligned}\right\} (20)$$

les deux autres s'établisent d'une manière analogue.

Posons

$$\left.\begin{aligned}
\xi(x, y, z) &= \xi(M) = \varepsilon \int \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1, \\
\eta(x, y, z) &= \eta(M) = \varepsilon \int \frac{y - y_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1, \\
\zeta(x, y, z) &= \zeta(M) = \varepsilon \int \frac{z - z_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

et les égalités (17) et (20) nous permettront d'écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\varepsilon \int\int \rho\rho_1 \left(\frac{1}{\overline{M'M'_1}} - \frac{1}{\overline{MM_1}} \right) dv\, dv_1 = -2 \int \rho \left[\xi (x' - x) + \eta (y' - y) + \zeta (z' - z) \right] dv. \; (22)$$

Les égalités (14), (15), (16) et (22) donnent, en dernière analyse,

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} \delta \int U \rho dv = \varepsilon \int (\rho' - \rho) \, U dv \\
+ \varepsilon \int \rho U \frac{dv' - dv}{dv} dv \\
- \int \rho \left[\xi (x' - x) + \eta (y' - y) + \zeta (z' - z) \right] dv.
\end{aligned} \qquad (23)$$

Nous avons eu soin, au cours des raisonnements qu'on vient de lire, d'invoquer seulement des propriétés communes aux distributions électriques solides et aux distributions électriques superficielles; nous pourrons alors nous abstenir de développer de nouveau ces raisonnements dans les deux cas qui nous restent à traiter.

3°. *Variation du potentiel de la distribution solide sur la distribution superficielle.*

En posant

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &= \varepsilon \int \frac{x - x_1}{\overline{M\mu_1}^3} \sigma_1 dS_1, \\ \mathfrak{Y}(M) &= \varepsilon \int \frac{y - y_1}{\overline{M\mu_1}^3} \sigma_1 dS_1, \\ \mathfrak{Z}(M) &= \varepsilon \int \frac{z - z_1}{\overline{M\mu_1}^3} \sigma_1 dS_1, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

nous trouverons pour expression de la variation de la distribution solide sur la distribution superficielle:

$$\begin{aligned} \varepsilon\delta \int \sigma U dS = {} & \varepsilon \int (\sigma' - \sigma) U dS \\ & + \varepsilon \int (\rho' - \rho) W dv \\ & + \varepsilon \int U\sigma \frac{dS' - dS}{dS} dS \\ & + \varepsilon \int W\rho \frac{dv' - dv}{dv} dv \\ & - \int \sigma [\xi(x' - x) + \eta(y' - y) + \zeta(z' - z)] dS \\ & - \int \rho [\mathfrak{X}(x' - x) + \mathfrak{Y}(y' - y) + \mathfrak{Z}(z' - z)] dv. \end{aligned} \tag{25}$$

4°. *Variation du potentiel de la distribution superficielle sur elle même.*

Nous aurons de même

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \delta \int \sigma W dS = {} & \varepsilon \int (\sigma' - \sigma) W dS \\ & + \varepsilon \int W\sigma \frac{dS' - dS}{dS} dS \\ & - \int \sigma [\mathfrak{X}(x' - x) + \mathfrak{Y}(y' - y) + \mathfrak{Z}(z' - z)] dS. \end{aligned} \tag{26}$$

5°. *Variation du potentiel électrostatique d'un système.*

Posons

$$\left.\begin{aligned}
X(M) &= \xi(M) + \mathfrak{X}(M) = \varepsilon\int \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3}\rho_1 dv_1 + \varepsilon \mathbf{S} \frac{x - x_1}{\overline{M\mu_1}^3}\sigma_1 dS_1, \\
Y(M) &= \eta(M) + \mathfrak{Y}(M) = \varepsilon\int \frac{y - y_1}{\overline{MM_1}^3}\rho_1 dv_1 + \varepsilon \mathbf{S} \frac{y - y_1}{\overline{M\mu_1}^3}\sigma_1 dS_1, \\
Z(M) &= \zeta(M) + \mathfrak{Z}(M) = \varepsilon\int \frac{z - z_1}{\overline{MM_1}^3}\rho_1 dv_1 + \varepsilon \mathbf{S} \frac{z - z_1}{\overline{M\mu_1}^3}\sigma_1 dS_1.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Posons, en outre,

$$\rho' - \rho = \delta\rho, \quad x' - x = \delta x, \quad y' - y = \delta y, \quad z' - z = \delta z.$$

Une formule connue nous donnera

$$\frac{dv' - dv}{dv} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}.$$

Les égalitées (4), (23), (25) et (26) nous donneront l'expression suivante pour la variation du potentiel électrostatique d'un système

$$\begin{aligned}
\delta Y = \varepsilon\int V\delta\rho\, dv &+ \varepsilon \mathbf{S}\, V\delta\sigma\, dS \\
- \int \rho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dv &- \mathbf{S}\, \sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dS \\
+ \varepsilon\int V\rho\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dv &+ \varepsilon \mathbf{S}\, V\sigma \frac{dS' - dS}{dS}\, dS.
\end{aligned} \tag{28}$$

Dans certains cas, il y a avantage à transformer cette égalité au moyen de relations que nous allons écrire.

En tout point *intérieur* à une masse continue électrisée, on a

$$X = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{29}$$

Ces égalités perdent tout sens en un point pris sur une surface de discontinuité électrisée.

Soient 1 et 2 les deux régions de l'espace qui sont situées de part et d'autre de la surface S; soient N_1 la demi-normale menée vers l'intérieur de la région 1 et N_2 la demi-normale menée vers l'intérieur de la région 2. La surface S est une surface de discontinuité pour les dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle. Si M est le point de la surface S auquel se rapportent les

quantités X, Y, Z; si $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sont deux points infiniment voisins du point M et situés le premier dans la région 1, le second dans la région 2, on a

$$\left.\begin{aligned} X &= -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial x_1} + 2\pi\sigma\cos(N_1, x)\right] = -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial x_2} + 2\pi\sigma\cos(N_2, x)\right], \\ Y &= -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial y_1} + 2\pi\sigma\cos(N_1, y)\right] = -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial y_2} + 2\pi\sigma\cos(N_2, y)\right], \\ Z &= -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial z_1} + 2\pi\sigma\cos(N_1, z)\right] = -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial z_2} + 2\pi\sigma\cos(N_2, z)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Les identités

$$\begin{aligned} \cos(N_1, x) + \cos(N_2, x) &= 0, \\ \cos(N_1, y) + \cos(N_2, y) &= 0, \\ \cos(N_1, z) + \cos(N_2, z) &= 0, \end{aligned}$$

permettent de transformer les égalités (30) en

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\right), \\ Y &= -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\right), \\ Z &= -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z_1} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

De ces égalités (30) et (31) nous pouvons encore déduire les égalités

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} &= -4\pi\sigma\cos(N_1, x), \\ \frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial y_2} &= -4\pi\sigma\cos(N_1, y), \\ \frac{\partial V}{\partial z_1} - \frac{\partial V}{\partial z_2} &= -4\pi\sigma\cos(N_1, z). \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Ces diverses formules nous seront utiles par la suite.

CHAPÎTRE II.

Application de la Formule précédente à quelques Questions d'Électrostatique.

§1.— *Conditions de l'équilibre électrique.*

Le potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé a pour expression

$$F = F_0 + \int \Theta\rho dv + \mathsf{S}\, \Theta\rho dS + Y, \quad (1)$$

Θ étant une quantité qui, sur un conducteur, varie d'un point à l'autre et F_0 la valeur que prendrait le potentiel thermodynamique interne du système ramené à l'état neutre.

Comme nous ne voulons pas, dans le présent mémoire, introduire la considération de couches électriques doubles, nous nous limiterons au cas où Θ *varie d'une manière continue d'un point à l'autre de toute masse conductrice connexe.*

Supposons que le conducteur se compose de deux masses conductrices séparément connexes, 1 et 2, limitées respectivement par les surfaces S_1, S_2. Imposons à ce système une variation de distribution électrique, sans changement de position ni de forme des corps conducteurs qui le constituent. Faisons correspondre les deux points *géométriques* M, M', où un même point *matériel* se trouve au début et à la fin de la modification; les deux points M et M' coïncideront. En vertu de l'égalité (28) du Chapître I et de l'égalité (1), nous aurons

$$\delta F = \int (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\rho_1\, dv_1 + \mathsf{S} (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\sigma_1\, dS_1$$
$$+ \int (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\rho_2\, dv_2 + \mathsf{S} (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\sigma_2\, dS_2.$$

Les conditions d'équilibre s'obtiendront en exprimant que δF est égal à 0 pour toutes les variations virtuelles de la distribution électrique.

Si l'on désigne par Q_1 et Q_2 les charges *invariables* des corps 1 et 2, on aura

$$\int \rho_1\, dv_1 + \mathsf{S}\, \sigma_1\, dS_1 = Q_1,$$
$$\int \rho_2\, dv_2 + \mathsf{S}\, \sigma_2\, dS_2 = Q_2,$$

en sorte que les variations virtuelles de la distribution électrique seront assujetties aux conditions

$$\int \delta\rho_1\, dv_1 + \mathsf{S}\, \delta\sigma_1\, dS_1 = 0,$$
$$\int \delta\rho_2\, dv_2 + \mathsf{S}\, \delta\sigma_2\, dS_2 = 0.$$

C'est seulement lorsque ces conditions sont remplies que δF doit être égal à 0. Il doit donc exister deux constantes C_1, C_2, telles que l'on ait *identiquement*

$$\int (\varepsilon V + \Theta + C_1)\, \delta\rho_1\, dv_1 + \mathsf{S} (\varepsilon V + \Theta + C_1)\, \delta\sigma_1\, dS_1$$
$$+ \int (\varepsilon V + \Theta + C_2)\, \delta\rho_2\, dv_2 + \mathsf{S} (\varepsilon V + \Theta + C_2)\, \delta\sigma_2\, dS_2 = 0.$$

Pour que cette identité ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait :

1°. En tout point du corps 1 ou de la surface qui le limite,

$$\varepsilon V + \Theta + C_1 = 0. \tag{2}$$

2°. En tout point du corps 2 ou de la surface qui le limite,

$$\varepsilon V + \Theta + C_2 = 0. \tag{2 bis}$$

On obtient ainsi, par une méthode entièrement rigoureuse, les équations connues de l'équilibre électrique.

§2.—*Actions qui s'exercent entre des corps dont la forme et l'électrisation demeurent invariables.*

Imaginons un système formés de corps qui se déplacent de manière que chacun d'eux garde une figure invariable et que chaque point matériel entraîne la charge qu'il porte ; tel est un système formé de solides parfaitement rigides et parfaitement mauvais conducteurs.

Prenons deux états voisins du système ; à chaque point géométrique M du premier état faisons correspondre un point géométrique M' du second état, de telle sorte qu'un même point matériel se trouve en M au début de la modification et en M' à la fin ; δx, δy, δz, sont alors, en chaque point géométrique, les composantes du déplacement subi par le point matériel qui se trouvait en ce point géométrique.

Les hypothèses faites nous donnent les égalités

$$\delta\rho = 0, \quad \delta\sigma = 0, \quad dv' - dv = 0, \quad dS' - dS = 0.$$

L'égalité (28) du Chapître I et l'égalité (1) donnent

$$\delta F = \delta F_0 - \int \rho (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dv - \mathbf{S}\, \sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dS.$$

Cette égalité nous montre que chaque élément matériel est soumis :

1°. Aux forces auxquelles il resterait soumis si le système était ramené à l'état neutre.

2°. A une force qui a pour composantes Xq, Yq, Zq, si l'on désigne par q la charge électrique totale de l'élément matériel considéré.

On retrouve ainsi, sous leur forme la plus générale, les lois de Coulomb, point de départ de l'électrostatique.

§3.—*Actions qui s'exercent sur des corps conducteurs électrisés.*

Nous supposerons, comme au §1, que d'un point à l'autre de toute masse conductrice connexe la quantité Θ varie d'une manière continue ; de plus, pour simplifier nos recherches, nous supposerons que chaque masse conductrice demeure homogène même au voisinage des surfaces terminales ; nous admettrons que Θ garde la même valeur en tout point de la masse conductrice, même au voisinage des surfaces terminales ; nous regarderons cette valeur de Θ comme fonction de la seule densité D de la matière conductrice, *et nous supposerons cette densité invariable.*

Pour éviter les formules trop longues, nous réduirons le système à un conducteur unique.

Enfin nous établirons la correspondance entre les points M, M', en suivant la règle qui nous a servi au § précédent.

Nous trouverons sans peine l'égalité

$$\delta\int \Theta\rho dv + \delta \mathbf{S}\, \Theta\sigma dS = \int \Theta\delta\rho dv + \mathbf{S}\, \Theta\delta\sigma\, dS + \int \Theta\rho \frac{dv'-dv}{dv} dv + \mathbf{S}\, \Theta\sigma \frac{dS'-dS}{dS} dS. \tag{3}$$

D'autre part, les égalités (28), (29) et (30) du Chapître I donnent l'égalité

$$\begin{aligned}\delta Y = &\int \varepsilon V \delta\rho\, dv + \mathbf{S}\, \varepsilon V \delta\sigma\, dS \\ &+ \int \varepsilon V\rho \frac{dv'-dv}{dv} dv + \mathbf{S}\, \varepsilon V\sigma \frac{dS'-dS}{dS} dS \\ &+ \int \varepsilon\rho \left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dv \\ &+ \mathbf{S}\, \varepsilon\sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z\right) dS \\ &+ \mathbf{S}\, 2\pi\varepsilon\sigma^2 \left[\cos(N_i, x)\,\delta x + \cos(N_i, y)\,\delta y + \cos(N_i, z)\,\delta z\right] dS,\end{aligned} \tag{4}$$

N_i désignant la demi-normale à la surface limite du conducteur, dirigée vers l'*intérieur* du conducteur, et (x_i, y_i, z_i) étant un point infiniment voisin de l'élément dS, mais situé à l'intérieur du conducteur.

Or l'égalité

$$\varepsilon V + \Theta + C = 0, \tag{2}$$

permet d'écrire, en tout point intérieur au conducteur,

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial z}=0. \tag{5}$$

Les égalités (1), (2), (3), (4) et (5) donnent alors l'égalité

$$\delta F=\delta F_0-C\left[\int\left(\delta\rho+\rho\frac{dv'-dv}{dv}\right)dv+\mathbf{S}\left(\delta\sigma+\sigma\frac{dS'-dS}{dS}\right)dS\right]$$
$$+2\pi\varepsilon\,\mathbf{S}\,\sigma^2\left[\cos(N_i,x)\,\delta x+\cos(N_i,y)\,\delta y+\cos(N_i,z)\,\delta z\right]dS. \tag{6}$$

Mais si l'on désigne par Q la charge électrique *invariable* du conducteur, on aura

$$\int\rho dv+\mathbf{S}\,\sigma dS=Q$$

et, par conséquent,

$$\int\left(\delta\rho+\rho\frac{dv'-dv}{dv}\right)dv+\mathbf{S}\left(\delta\sigma+\sigma\frac{dS'-dS}{dS}\right)dS=0. \tag{7}$$

Moyennant l'égalité (7), l'égalité (6) peut s'écrire

$$\delta F=\delta F_0+2\pi\varepsilon\,\mathbf{S}\,\sigma^2\left[\cos(N_i,x)\,\delta x+\cos(N_i,y)\,\delta y+\cos(N_i,z)\,\delta z\right]dS.$$

Cette égalité nous fournit la proposition suivante :

Les forces qui agissent sur un conducteur électrisé déformable, mais incompressible, se composent :

1°. *Des forces qui agiraient sur le conducteur ramené à l'état neutre.*

2°. *D'une force appliquée à chaque élément dS de la surface qui limite le conducteur ; cette force est normale à l'élément dS et dirigée vers l'extérieur du conducteur ; elle a pour valeur*

$$T=2\pi\varepsilon\sigma^2\,dS.$$

Ce théorème est bien connu.

CHAPÎTRE III.

Variation du Potentiel d'un Système de Diélectriques polarisés.

Nous allons maintenant—et c'est l'objet principal de ce mémoire—faire usage de l'égalité fondamentale obtenue au Chapître I pour étudier les milieux magnétiques ou diélectriques ; afin d'éviter toute confusion, nous supposerons constamment dans notre analyse qu'il s'agisse de corps diélectriques ; le lecteur apercevra sans peine les légères modifications qu'il faudrait faire subir à notre

exposé pour l'appliquer aux corps magnétiques ; la principale modification consisterait à faire égale à 1 la constante ε des lois de Coulomb.

Soient A, B, C, les composantes de la polarisation en un point (x, y, z) intérieur à un diélectrique. Le Théorème fondamental et bien connu sur lequel nous nous appuierons est le suivant :

On peut sans changer ni la fonction potentielle, ni le potentiel du système, remplacer la polarisation diélectrique par une distribution électrique fictive définie de la manière suivante :

La distribution fictive a pour densité solide, en tout point intérieur à une masse diélectrique continue

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right); \tag{1}$$

elle a pour densité superficielle, en tout point de la surface terminale d'un diélectrique,

$$\sigma = -\left[A \cos(N_i, x) + B \cos(N_i, y) + C \cos(N_i, z)\right], \tag{2}$$

N_i étant la demi-normale dirigée vers l'intérieur diélectrique ; elle a pour densité superficielle, en tout point de la surface de contact de deux masses diélectriques 1 *et* 2,

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & -\left[A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z)\right] \\ & -\left[A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z)\right], \end{aligned} \tag{3}$$

N_1, N_2, étant les deux demi-normales dirigées respectivement vers l'intérieur de la masse 1 *et vers l'intérieur de la masse* 2.

Imaginons deux diélectriques 1 et 2, dont S_1, S_2 sont les surfaces libres et dont S_{12} est la surface de contact. Soit Y le potentiel de la polarisation diélectrique sur elle même. En vertu des égalités (1), (2) et (3) du présent chapître et des égalités (28), (29), (30) et (31) du Chapître I, nous pourrons écrire

$$\begin{aligned} -\delta Y = & \; \varepsilon \int_1 V \delta \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right) dv_1 \\ & + \varepsilon \int_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dv_1 \\ & + \varepsilon \int_1 V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dv_1 \\ & + \varepsilon \, \mathrm{S}_{S_1} V \delta \left[A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)\right] dS_1 \\ & + \varepsilon \, \mathrm{S}_{S_{12}} V \delta \left[A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z)\right] dS_{12} \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon \mathrm{S}_{S_1} [A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)] \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z \right) dS_1$$

$$+ \varepsilon \mathrm{S}_{S_{12}} [A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z)] \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y_1} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z_1} \delta z \right) dS_{12}$$

$$- 2\pi\varepsilon \mathrm{S}_{S_1} [A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)]^2$$
$$\times [\cos(N_i, x)\, \delta x + \cos(N_i, y)\, \delta y + \cos(N_i, z)\, \delta z]\, dS_1$$

$$+ \varepsilon \mathrm{S}_{S_1} V [A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)] \frac{dS_1' - dS_1}{dS_1} dS_1$$

$+$ etc.,

$$- \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{S}_{S_{12}} [A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z)$$
$$- A_2 \cos(N_2, x) - B_2 \cos(N_2, y) - C_2 \cos(N_2, z)]$$
$$\times \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) \delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial y_2} \right) \delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1} - \frac{\partial V}{\partial z_2} \right) \delta z \right] dS_{12}$$

$$+ \varepsilon \mathrm{S}_{S_{12}} [A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z)$$
$$+ A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z)]\, V \frac{dS_{12}' - dS_{12}}{dS_{12}} dS_{12}. \quad (4)$$

Le symbole $+$ etc. remplace neuf termes qui se déduisent, en permutant les indices **1** et **2**, des neuf termes écrits avant ce symbole.

Nous allons transformer cette égalité.

Proposons nous d'abord d'évaluer la quantité $\delta \frac{\partial A}{\partial x}$.

Prenons deux états voisins du système.

Soient $M(x, y, z)$ et $M_1(x_1, y, z)$ deux points infiniment voisins du système pris dans le premier état ; la droite MM_1 est parallèle à l'axe des x. Aux deux points M, M_1 correspondent, dans le second état, deux points infiniment voisins $M'(x', y', z')$ et $M_1'(x_1', y_1', z_1')$; la droite $M'M_1'$ n'est plus, en général, parallèle à l'axe des x. Considérons les deux points $M_2'(x_2', y_2', z')$ et $M_3'(x_2', y', z')$. La droite $M'M_3'$ est parallèle à l'axe des x ; la droite $M_3'M_2'$ est parallèle à l'axe des y ; la droite $M_2'M_1'$ est parallèle à l'axe des z.

Soient A, A_1, A', A_1', A_2', A_3' les valeurs aux points M, M_1, M', M_1', M_2', M_3' de la composante parallèle à Ox de l'intensité de polarisation ; les valeurs non accentuées se rapportent au premier état du système et les valeurs accentuées au second.

Formons la quantité

$$J = \frac{A'_3 - A'}{x'_1 - x'} - \frac{A_1 - A}{x_1 - x}.$$

Si, laissant invariables les deux états du système, nous faisons tendre le point M_1 vers le point M, le point M'_3 tendra en même temps vers le point M' et la quantité J tendra vers $\left(\frac{\partial A'}{\partial x'} - \frac{\partial A}{\partial x}\right)$. Si, ensuite, nous faisons tendre le second état du système vers le premier, cette différence deviendra une quantité infiniment petite dont le terme principal sera précisément $\delta \frac{\partial A}{\partial x}$.

Ce terme principal peut s'évaluer de la manière suivante :

On vérifie sans peine l'identité

$$\begin{aligned}\frac{A'_3 - A'}{x'_1 - x'} - \frac{A_1 - A}{x_1 - x} = & \frac{A'_3 - A'_2}{y'_3 - y'_2}\frac{y'_3 - y'_2}{x'_1 - x'} \\ & + \frac{A'_2 - A'_1}{z'_2 - z'_1}\frac{z'_2 - z'_1}{x'_1 - x'} \\ & - \frac{(A'_1 - A')[(x'_1 - x_1) - (x' - x)]}{(x_1 - x)(x'_1 - x')} \\ & + \frac{(A'_1 - A_1) - (A' - A)}{x_1 - x}.\end{aligned}$$

Les identités

$$y'_2 = y'_1, \quad y'_3 = y', \quad z'_2 = z',$$

permettent d'écrire le second membre de cette égalité sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{(A'_1 - A_1) - (A' - A)}{x_1 - x} \\ &- \frac{1}{1 + \frac{(x'_1 - x_1) - (x' - x)}{x_1 - x}}\Bigg\{\frac{A'_3 - A'_2}{y'_3 - y'_2}\frac{(y'_1 - y_1) - (y' - y)}{x_1 - x} \\ &\qquad + \frac{A'_2 - A'_1}{z'_2 - z'_1}\frac{(z'_1 - z_1) - (z' - z)}{x_1 - x} \\ &+ \left[\frac{A_1 - A}{x_1 - x} - \frac{(A'_1 - A_1) - (A' - A)}{x_1 - x}\right]\frac{(x'_1 - x') - (x_1 - x)}{x_1 - x}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Laissons invariables les deux états du système et faisons tendre de point M_1 vers

le point M. On voit sans peine que la quantité précédente tendra vers la limite

$$\frac{\partial(A'-A)}{\partial x} - \frac{1}{1+\frac{\partial(x'-x)}{\partial x}}\left\{\frac{\partial A'}{\partial y'}\frac{\partial(y'-y)}{\partial x} + \frac{\partial A'}{\partial z'}\frac{\partial(z'-z)}{\partial x} + \left[\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial(A'-A)}{\partial x}\right]\frac{\partial(x'-x)}{\partial x}\right\}.$$

Faisons maintenant tendre le second état du système vers le premier et cette quantité deviendra un infiniment petit dont le terme principal sera

$$\frac{\partial \delta A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial x}.$$

On trouve ainsi la première des égalités

$$\left.\begin{aligned}
\delta\frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial \delta A}{\partial x} - \left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right),\\
\delta\frac{\partial B}{\partial y} &= \frac{\partial \delta B}{\partial y} - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial y}\right),\\
\delta\frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{\partial \delta C}{\partial z} - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces égalités (5) permettent d'écrire l'égalité

$$\begin{aligned}
&\int_1 V\delta\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)dv_1\\
&+\int_1 V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)dv_1\\
&=\int_1 V\left(\frac{\partial \delta A_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta B_1}{\partial y} + \frac{\partial \delta C_1}{\partial z}\right)dv_1\\
&+\int_1 V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial \delta y}{\partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial \delta z}{\partial z} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right.\\
&\qquad + \frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial \delta z}{\partial z} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial \delta x}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial y}\\
&\qquad \left. + \frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial \delta x}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial \delta y}{\partial y} - \frac{\partial C_1}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)dv_1.
\end{aligned}$$

Des intégrations par parties permettent de transformer cette égalité en la suivante :

$$\int_1 V\delta\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)dv_1$$

$$+\int V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_1$$

$$=-\int_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta A_1+\frac{\partial V}{\partial y}\delta B_1+\frac{\partial V}{\partial z}\delta C_1\right)dv_1$$

$$-\int_1\Big[\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial C_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta x$$

$$+\left(\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial C_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta y$$

$$+\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial B_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta z\Big]dv_1$$

$$-\mathsf{S}_{S_1}V[\cos(N_i,x)\delta A_1+\cos(N_i,y)\delta B_1+\cos(N_i,z)\delta C_1]\,dS_1$$

$$-\mathsf{S}_{S_{12}}V[\cos(N_1,x)\delta A_1+\cos(N_1,y)\delta B_1+\cos(N_1,z)\delta C_1]\,dS_{12}$$

$$-\mathsf{S}_{S_1}V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)[\cos(N_i,x)\delta x+\cos(N_i,y)\delta y+\cos(N_i,z)\delta z]\,dS_1$$

$$-\mathsf{S}_{S_{12}}V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)[\cos(N_1,x)\delta x+\cos(N_1,y)\delta y+\cos(N_1,z)\delta z]\,dS_{12}$$

$$+\mathsf{S}_{S_1}V\Big[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial A_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial A_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i,x)$$

$$+\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial B_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial B_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i,y)$$

$$+\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial C_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial C_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i,z)\Big]\,dS_1$$

$$+\mathsf{S}_{S_{12}}V\Big[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial A_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial A_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_1,x)$$

$$+\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial B_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial B_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_1,y)$$

$$+\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial C_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial C_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_1,z)\Big]\,dS_{12}. \qquad (6).$$

D'autre part, on a les identités suivantes :

$$\int_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right) dv_1$$

$$-\int_1 \left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta x\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial C_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta y$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta z\right] dv_1$$

$$= \int_1 \left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial A_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial A_1}{\partial z}\,\delta z\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial B_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial B_1}{\partial z}\,\delta z\right)\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\left. + \left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial C_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial C_1}{\partial z}\,\delta z\right)\frac{\partial V}{\partial z}\right] dv_1 \tag{7}$$

et

$$\mathbf{S}_{S_1} V\left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial A_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial A_1}{\partial z}\,\delta z\right)\cos(N_i, x)\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial B_1}{\partial z}\,\delta x + \frac{\partial B_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial B_1}{\partial z}\,\delta z\right)\cos(N_i, y)$$

$$\left. + \left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial C_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial C_1}{\partial z}\,\delta z\right)\cos(N_i, z)\right] dS_1$$

$$+ \mathbf{S}_{S_1} [A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)]$$

$$\times \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y_i}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z_i}\,\delta z\right) dS_1$$

$$= \mathbf{S}_{S_1} \left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(A_1 V)\,\delta x + \frac{\partial}{\partial y_i}(A_1 V)\,\delta y + \frac{\partial}{\partial z_i}(A_1 V)\,\delta z\right]\cos(N_i, x)\right.$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(B_1 V)\,\delta x + \frac{\partial}{\partial y_i}(B_1 V)\,\delta y + \frac{\partial}{\partial z_i}(C_1 V)\,\delta z\right]\cos(N_i, y)$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(C_1 V)\,\delta x + \frac{\partial}{\partial y_i}(C_1 V)\,\delta y + \frac{\partial}{\partial z_i}(C_1 V)\,\delta z\right]\cos(N_i, z)\right\} dS_1. \tag{8}$$

On peut, en outre, écrire, en tout point de la surface S_{12}, une égalité analogue à la précédente ; nous la désignerons par (8 bis).

Enfin les égalités (32) du Chapître I, jointes à l'égalité (3) du présent Chapître donnent l'égalité :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} = 4\pi\,[\mathrm{A}_1 \cos(N_1, x) + \mathrm{B}_1 \cos(N_1, y) + \mathrm{C}_1 \cos(N_1, z)] \cos(N_1, x)$$
$$+ 4\pi\,[\mathrm{A}_2 \cos(N_2, x) + \mathrm{B}_2 \cos(N_2, y) + \mathrm{C}_2 \cos(N_2, z)] \cos(N_2, x), \qquad (9)$$

et deux égalités analogues pour $\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial y_2}\right)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial z_1} - \frac{\partial V}{\partial z_2}\right)$.

Moyennant les égalités (6), (7), (8), (8 bis) et (9), l'égalité (4) devient :

$$\begin{aligned}
-\delta Y = &-\varepsilon\int_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta\mathrm{A}_1 + \frac{\partial V}{\partial y}\delta\mathrm{B}_1 + \frac{\partial V}{\partial z}\delta\mathrm{C}_1\right) dv_1 \\
&+ \varepsilon\int_1 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z}\delta z\right)\right. \\
&\qquad + \frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial z}\delta z\right) \\
&\qquad \left.+ \frac{\partial V}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial z}\delta z\right)\right] dv_1 \\
&- \varepsilon \mathrm{S}_{S_1} V\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial z_i}\right) \\
&\qquad \times [\cos(N_i, x)\,\delta x + \cos(N_i, y)\,\delta y + \cos(N_i, z)\,\delta z]\, dS_1 \\
&+ \varepsilon \mathrm{S}_{S_1} \left\{\left[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\right]\cos(N_i, x)\right. \\
&\qquad + \left[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\right]\cos(N_i, y) \\
&\qquad \left.+ \left[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\right]\cos(N_i, z)\right\} dS_1 \\
&+ \varepsilon \mathrm{S}_{S_1} V[\mathrm{A}_1\delta\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\delta\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\delta\cos(N_i, z)]\, dS_1 \\
&+ \varepsilon \mathrm{S}_{S_1} V[\mathrm{A}_1\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\cos(N_i, z)]\,\frac{dS_1' - dS_1}{dS_1}\, dS_1 \\
&- 2\pi\varepsilon \mathrm{S}_{S_1} [\mathrm{A}_1\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\cos(N_i, z)]^2 \\
&\qquad \times [\cos(N_i, x)\,\delta x + \cos(N_i, y)\,\delta y + \cos(N_i, z)\,\delta z]\, dS_1 \\
&+ \text{etc.,} \\
&- \varepsilon \mathrm{S}_{S_{12}} V\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial z_1} - \frac{\partial \mathrm{A}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{B}_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \mathrm{C}_2}{\partial z_2}\right) \\
&\qquad \times [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_{12}} \Big[\Big\{ \Big[\frac{\partial (\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_1} - \frac{\partial (\mathrm{A}_2 V)}{\partial x_2}\Big] \delta x \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial (\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_1} + \frac{\partial (\mathrm{A}_2 V)}{\partial y_2}\Big] \delta y \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial (\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_1} - \frac{\partial (\mathrm{A}_2 V)}{\partial z_2}\Big] \delta z \Big\} \cos (N_1, x) \\
&\qquad + \Big\{ \Big[\frac{\partial (\mathrm{B}_1 V)}{\partial x_1} - \frac{\partial (\mathrm{B}_2 V)}{\partial x_2}\Big] \delta x \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial (\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_1} - \frac{\partial (\mathrm{B}_2 V)}{\partial y_2}\Big] \delta y \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial (\mathrm{B}_1 V)}{\partial z_1} - \frac{\partial (\mathrm{B}_2 V)}{\partial z_2}\Big] \delta z \Big\} \cos (N_1, y) \\
&\qquad + \Big\{ \Big[\frac{\partial (\mathrm{C}_1 V)}{\partial x_1} - \frac{\partial (\mathrm{C}_2 V)}{\partial x_2}\Big] \delta x \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial (\mathrm{C}_1 V)}{\partial y_1} - \frac{\partial (\mathrm{C}_2 V)}{\partial y_2}\Big] \delta y \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial (\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_1} - \frac{\partial (\mathrm{C}_2 V)}{\partial z_2}\Big] \delta z \Big\} \cos (N_1, z) \Big] dS_{12} \\
&+ \varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_{12}} V [(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) \delta \cos (N_1, x) + (\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2) \delta \cos (N_1, y) \\
&\qquad\qquad + (\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2) \delta \cos (N_1, z)] \, dS_{12} \\
&+ \varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_{12}} V [(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) \cos (N_1, x) + (\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2) \cos (N_1, y) \\
&\qquad\qquad + (\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2) \cos (N_1, z)] \, \frac{dS'_{12} - dS_{12}}{dS_{12}} \, dS_{12} \\
&- 2\pi\varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_{12}} \{ [\mathrm{A}_1 \cos (N_1, x) + \mathrm{B}_1 \cos (N_1, y) + \mathrm{C}_1 \cos (N_1, z)]^2 \\
&\qquad - [\mathrm{A}_2 \cos (N_2, x) + \mathrm{B}_2 \cos (N_2, y) + \mathrm{C}_2 \cos (N_2, z)]^2 \} \\
&\qquad \times [\cos (N_1, x) \delta x + \cos (N_1, y) \delta y + \cos (N_1, z) \delta z] \, dS_{12}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Le symbole $+$ etc. remplace sept termes qui se déduisent des sept premiers termes de l'expression de δY en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2.

Faisons choix, sur la surface S_1, d'un système de coordonnées curvilignes rectangulaires:

$$
\begin{aligned}
&(u) \quad v = \text{const.}, \\
&(v) \quad u = \text{const.}
\end{aligned}
$$

Supposons que le carré de l'élément linéaire tracé sur la surface soit représenté par la formule

$$ds_1^2 = A_1(u, v)\, du^2 + B_1(u, v)\, dv^2.$$

L'élément superficiel aura pour valeur

$$dS_1 = \sqrt{A_1 B_1}\, du\, dv. \tag{11}$$

Prenons un point M, intérieur au corps 1, pris dans le premier état, et infiniment voisin de la surface S_1; ce point a pour correspondant, dans le second état, un point M'. Projetons MM' sur la tangente à la ligne (u), sur la tangente à la ligne (v), enfin sur la normale N_i. Désignons les trois projections obtenues par

$$\sqrt{A}\,\delta u, \quad \sqrt{B}\,\delta v, \quad \delta N_i.$$

Nous aurons évidemment, pour un point (x_i, y_i, z_i) infiniment voisin de la surface S_1

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (A_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial (A_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial (A_1 V)}{\partial z_i}\delta z \\ &= \frac{\partial (A_1 V)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial (A_1 V)}{\partial v}\delta v + \frac{\partial (A_1 V)}{\partial N_i}\delta N_i \end{aligned} \tag{12}$$

et aussi

$$\delta \cos (N_i, x) = \frac{\partial \cos (N_i, x)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \cos (N_i, x)}{\partial v}\delta v + D \cos (N_i, x). \tag{13}$$

Le symbole $D \cos (N_i, x)$ a le sens suivant:

Soit M un point de la surface S_1; par ce point, menons la normale à la surface S_1; prolongeons la jusqu'au point m où elle rencontre la surface S_1'; en m menons la demi-normale n_i à la surface S_1' vers l'intérieur du fluide 1; nous aurons

$$D \cos (N_i, x) = \cos (n_i, x) - \cos (N_i, x). \tag{14}$$

Une égalité connue* donne

$$\begin{aligned} \frac{dS_1' - dS_1}{dS_1} &= \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial (AB)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial (AB)}{\partial v}\delta v\right] \\ &\quad + \frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv} - \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right)\delta N_i; \end{aligned} \tag{15}$$

R_i et R_i' sont les deux rayons de courbure principaux de la surface S_1, en un point de l'élément dS_1; chacun de ces rayons est compté positivement lorsque, pour aller de la surface au centre de courbure correspondant, on marche dans le sens de la demi-normale N_i.

---

* P. Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* Tome II, p. 83.

Les égalités (11), (12), (13) et (15) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(A_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, x)\, dS_1 \\
&+\mathbf{S}_{S_1}\mathrm{A}_1 V\,\delta\cos(N_i, x)\, dS_1 \\
&+\mathbf{S}_{S_1}\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)\,\frac{dS_1' - dS_1}{dS_1}\, dS_1 \\
&=\mathbf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) - \mathrm{A}_1 V\Big(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\Big)\cos(N_i, x)\Big]\,\delta N_i dS_1 \\
&+\mathbf{S}_{S_1}\mathrm{A}_1 VD\cos(N_i, x)\, dS_1 \\
&+\int\!\!\int\Big[\Big\{\frac{\partial[\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)]}{\partial u} + \frac{\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)}{2AB}\,\frac{\partial(AB)}{\partial u}\Big\}\delta u \\
&\qquad + \Big\{\frac{\partial[\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)]}{\partial v} + \frac{\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)}{2AB}\,\frac{\partial(AB)}{\partial v}\Big\}\delta v \\
&\qquad\qquad + \mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)\Big(\frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv}\Big)\Big]\sqrt{AB}\, du\, dv. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Soient:

L_1 le contour de la surface S_1,

n_i une demi-droite normale à ce contour, tangente à la surface S_1, et dirigée vers l'intérieur de l'aire S_1,

(n_i, u) l'angle que cette demi-droite fait avec la tangente menée par son pied à la ligne (u) $(v = \text{const.})$, cette tangente étant dirigée dans le sens où le paramètre u va en croissant,

(n_i, v) l'angle que cette demi-droite fait avec la tangente menée par son pied à la ligne (v) $(u = \text{const.})$, cette tangente étant dirigée dans le sens où le paramètre v va en croissant,

$F(u, v)$ une fonction régulière des variables u, v.

Si la surface S_1 ne présente aucune singularité, on a*

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int\Big\{\Big[\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{2AB}\,\frac{\partial(AB)}{\partial u}\Big]\delta u \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{F}{2AB}\,\frac{\partial(AB)}{\partial v}\Big]\delta v + F\Big(\frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv}\Big)\Big\}\sqrt{AB}\, du\, dv. \\
&+\int F[\cos(n_i, u)\sqrt{A}\,\delta u + \cos(n_i, v)\sqrt{B}\,\delta v]\, dL_1 = 0. \qquad (17)
\end{aligned}$$

* P. Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* T. II, p. 85.

Appliquons cette égalité (17) à la fonction

$$F = A_1 V \cos(N_i, x);$$

remarquons, en outre, que l'on a

$$\cos(n_i, u)\sqrt{A}\,\delta u + \cos(n_i, v)\sqrt{B}\,\delta v = \cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z$$

et l'égalité (16) se transformera en une autre égalité qui, jointe à deux égalités analogues, donnera

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}_{S_1}\Big\{\Big[\frac{\partial(A_1V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(A_1V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(A_1V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, x)\\
&\quad + \Big[\frac{\partial(B_1V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(B_1V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(B_1V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, y)\\
&\quad + \Big[\frac{\partial(C_1V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(C_1V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(C_1V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, z)\Big\}\, dS_1\\
&+ \mathrm{S}_{S_1} V\,[A_1\delta\cos(N_i, x) + B_1\delta\cos(N_i, y) + C_1\delta\cos(N_i, z)]\, dS_1\\
&+ \mathrm{S}_{S_1} V\,[A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)]\,\frac{dS_1' - dS_1}{dS_1}\, dS_1\\
&= \mathrm{S}_{S_1} V\,[A_1 D\cos(N_i, x) + B_1 D\cos(N_i, y) + C_1 D\cos(N_i, z)]\, dS_1\\
&+ \mathrm{S}_{S_1}\Big\{\frac{\partial(A_1V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) + \frac{\partial(B_1V)}{\partial N_i}\cos(N_i, y) + \frac{\partial(C_1V)}{\partial N_i}\cos(N_i, z)\\
&\qquad - V\,[A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)]\Big(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\Big)\Big\}\\
&\qquad \times [\cos(N_i, x)\,\delta x + \cos(N_i, y)\,\delta y + \cos(N_i, z)\,\delta z]\, dS_1\\
&- \int_{L_1} V\,[A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)]\\
&\qquad \times [\cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z]\, dL_1. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Proposons nous maintenant d'évaluer la quantité

$$\mathrm{S}_{S_1} V\,[A_1 D\cos(N_i, x) + B_1 D\cos(N_i, y) + C_1 D\cos(N_i, z)]\, dS_1,$$

et, pour cela, cherchons d'abord l'expression de $D\cos(N_i, x)$ en un point quelconque M_1 de la surface S_1.

Soient : Σ_1 une aire quelconque tracée sur la surface S_1, autour du point M_1,

λ_1 le contour de l'aire Σ_1,

ν_i une demi-droite normale à ce contour, tangente à la surface S_1 et dirigée vers l'intérieur de l'aire Σ_1.

Par chaque point M de l'aire Σ_1, élevons une normale à la surface S_1, et soit m le point où cette normale rencontre la surface S'_1; à chaque point M, faisons correspondre le point m ainsi défini; à l'aire Σ_1, tracée sur la surface S_1, correspondra une aire σ_1 tracée sur la surface S'_1; $d\Sigma_1$, $d\sigma_1$, seront deux éléments correspondants des aires Σ_1, σ_1.

Un lemme bien connu de Gauss nous apprend que, pour une surface fermée quelconque S, on a

$$\mathrm{S} \cos(N, x)\, dS = 0,$$

pourvu que les demi-normales N soient portées toutes vers l'intérieur, ou toutes vers l'extérieur de la surface S.

Appliquons ce lemme à la surface fermée que composent l'aire Σ_1, l'aire σ_1, et la surface réglée engendrée par les normales à la surface S_1 le long du contour λ_1; il est facile de voir que nous aurons, en tout état de cause:

$$\mathrm{S}_{\sigma_1} \cos(n_i, x)\, d\sigma_1 - \mathrm{S}_{\Sigma_1} \cos(N_i, x)\, d\Sigma_1 + \int \cos(\nu_i, x)\, \delta N_i\, d\lambda_1 = 0,$$

ou bien, en tenant compte de l'égalité (14) et en remarquant que

$$\frac{d\sigma_1 - d\Sigma_1}{d\Sigma_1} = -\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R'_i}\right) \delta N_i,$$

$$\mathrm{S}_{\Sigma_1} D \cos(N_i, x)\, d\Sigma_1 = \mathrm{S}_{\Sigma_1} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R'_i}\right) \cos(N_i, x)\, \delta N_i\, d\Sigma_1 - \int \cos(\nu_i, x)\, \delta N_i\, d\lambda_1. \quad (19)$$

Les égalités

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(\nu_i, x) \frac{\partial x}{\partial u} + \cos(\nu_i, y) \frac{\partial y}{\partial u} + \cos(\nu_i, z) \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{A} \cos(\nu_i, u), \\
&\cos(\nu_i, x) \frac{\partial x}{\partial v} + \cos(\nu_i, y) \frac{\partial y}{\partial v} + \cos(\nu_i, z) \frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{B} \cos(\nu_i, v), \\
&\cos(\nu_i, x) \cos(N_i, x) + \cos(\nu_i, y) \cos(N_i, y) + \cos(\nu_i, z) \cos(N_i, z) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

donnent:

$$\begin{aligned}
\cos(\nu_i, x) = \frac{1}{\mathfrak{D}} \Big\{ &\left[\frac{\partial y}{\partial v} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v} \cos(N_i, y)\right] \sqrt{A} \cos(\nu_i, u) \\
&- \left[\frac{\partial y}{\partial u} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u} \cos(N_i, y)\right] \sqrt{B} \cos(\nu_i, v) \Big\}, \quad (21)
\end{aligned}$$

en posant :

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \cos(N_i, x) & \cos(N_i, y) & \cos(N_i, z) \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Nous aurons alors

$$\int \cos(\nu_i, x)\,\delta N_i\,d\lambda_1$$
$$= \int \frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}} \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\sqrt{A}\cos(\nu_i, u) \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\sqrt{B}\cos(\nu_i, v) \right\} d\lambda_1. \tag{23}$$

Mais si $G(u, v)$ désigne une fonction de u, v, régulière dans l'aire Σ_1, on a

$$\left.\begin{aligned} \int G\sqrt{A}\cos(\nu_i, u)\,d\lambda_1 &= \int\int \frac{\partial G}{\partial u}\sqrt{AB}\,du\,dv = \mathrm{S}_{\Sigma_1}\frac{\partial G}{\partial u}\,d\Sigma_1, \\ \int G\sqrt{B}\cos(\nu_i, v)\,d\lambda_1 &= \int\int \frac{\partial G}{\partial v}\sqrt{AB}\,du\,dv = \mathrm{S}_{\Sigma_1}\frac{\partial G}{\partial v}\,d\Sigma_1. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Moyennant ces lemmes, l'égalité (23) peut s'écrire

$$\int \cos(\nu_i, x)\,\delta N_i\,d\lambda_1 = \mathrm{S}_{\Sigma_1}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\right\}\right]d\Sigma_1. \tag{25}$$

Moyennant cette égalité (25), l'égalité (29) devient

$$\mathrm{S}_{\Sigma_1}\left[D\cos(N_i, x) - \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right)\cos(N_i, x)\,\delta N_i\right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\right\}$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\right\}\right]d\Sigma_1 = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit l'aire Σ_1, tracée autour du point M_1 ; on en conclut sans peine que l'on doit avoir, en tout point M_1 de la surface S_1,

$$D\cos(N_i, x) = \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right)\cos(N_i, x)\,\delta N_i$$
$$- \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\right\}. \tag{26}$$

Cette égalité (26) nous permet d'écrire :

$$\mathbf{S}_{S_1} V\mathrm{A}_1 D \cos(N_i, x)\, dS_1 = \mathbf{S}_{S_1} V\mathrm{A}_1 \cos(N_i, x)\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right)\delta N_i\, dS_1$$
$$-\mathbf{S}_{S_1}\Big[V\mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial u}\Big\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\Big]\Big\}$$
$$- V\mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\Big]\Big\}\Big] dS_1. \tag{27}$$

Mais on a

$$\mathbf{S}_{S_1}\Big[V\mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial u}\Big\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\Big]\Big\}$$
$$- V\mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\Big]\Big\}\Big] dS_1$$
$$= \mathbf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big\{\frac{V\mathrm{A}_1 \delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\Big]\Big\}$$
$$- \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\frac{V\mathrm{A}_1 \delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\Big]\Big\}\Big] dS_1$$
$$-\mathbf{S}_{S_1}\Big\{\frac{1}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\Big]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}$$
$$- \frac{1}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\Big]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\Big\}\delta N_i\, dS_1. \tag{28}$$

D'ailleurs les égalités

$$\cos(u, x)\frac{\partial x}{\partial u} + \cos(u, y)\frac{\partial y}{\partial u} + \cos(u, z)\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{A}},$$
$$\cos(u, x)\frac{\partial x}{\partial v} + \cos(u, y)\frac{\partial y}{\partial v} + \cos(u, z)\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$
$$\cos(u, x)\cos(N_i, x) + \cos(u, y)\cos(N_i, y) + \cos(u, z)\cos(N_i, z) = 0,$$

qui résultent immédiatement des égalités :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{A}\cos(u, x), \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{A}\cos(u, y), \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{A}\cos(u, z),$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{B}\cos(v, x), \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sqrt{B}\cos(v, y), \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{B}\cos(v, z),$$

donnent :

$$\frac{\cos(u, x)}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\Big].$$

On trouve de même

$$\frac{\cos(v,x)}{\sqrt{B}} = -\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i,y)\right].$$

Moyennant ces égalités, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_1}\left\{\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i,y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i,y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\right\}\delta N_i\, dS_1 \\
&= \mathbf{S}_{S_1}\left[\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}\cos(u,x) + \frac{1}{\sqrt{B}}\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\cos(v,x)\right]\delta N_i\, dS_1.
\end{aligned}$$

Mais, d'autre part, on a

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}\cos(u,x) + \frac{1}{\sqrt{B}}\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\cos(v,x) + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i,x) = \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i},$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_1}\left\{\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i,y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i,y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\right\}\delta N_i\, dS_1 \\
&= \mathbf{S}_{S_1}\left[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i,x)\right]\delta N_i\, dS_1. \qquad (29)
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant à la surface S_1 tout entière le lemme représenté par les identités (21) ; nous aurons

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_1}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\mathrm{A}_1 V\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i,y)\right]\right\}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\mathrm{A}_1 V\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i,y)\right]\right\}\right] dS_1 \\
&= \int \mathrm{A}_1 V\left\{\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i,y)\right]\sqrt{A}\cos(n_i,u)\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i,z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i,y)\right]\sqrt{B}\cos(n_i,v)\right\}\delta N_i dL_1.
\end{aligned}$$

Les égalités

$$\cos(u, x) = \frac{\sqrt{A}}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]$$

$$\cos(v, x) = -\frac{\sqrt{B}}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]$$

transforment cette égalité en

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{S}}_{S_1}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big\{\frac{A_1 V\delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\Big]\Big\} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\frac{A_1 V\delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\Big]\Big\}\Big] dS_1 \\ &= \int A_1 V[\cos(n_i, u)\cos(u, x) + \cos(n_i, v)\cos(v, x)]\, \delta N_i\, dL_1 \\ &= \int A_1 V \cos(n_i, x)\, \delta N_i\, dL_1. \end{aligned} \tag{30}$$

Les égalités (27), (28), (29), (30) donnent

$$\begin{aligned} \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} A_1 V D \cos(N_i, x)\, dS_1 = &\mathop{\mathrm{S}}_{S_1} A_1 V \cos(N_i, x)\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right)\delta N_i\, dS_1 \\ &- \mathop{\mathrm{S}}_{S_1}\left[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) - \frac{\partial(A_1 V)}{\partial x_i}\right]\delta N_i\, dS_1 \\ &+ \int A_1 V \cos(n_i, x)\, \delta N_i\, dL_1. \end{aligned}$$

Cette égalité, jointe à deux autres égalités semblables que l'on obtient en permutant la lettre x avec les lettres y et z, donne

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V[A_1 D \cos(N_i, x) + B_1 D \cos(N_i, y) + C_1 D \cos(N_i, z)]\, dS_1 \\ &= \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V\big[A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)\big]\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right)\delta N_i\, dS_1 \\ &- \mathop{\mathrm{S}}_{S_1}\left[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) + \frac{\partial(B_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, y) + \frac{\partial(C_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, z)\right]\delta N_i\, dS_1 \\ &+ \mathop{\mathrm{S}}_{S_1}\left[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial x_i} + \frac{\partial(B_1 V)}{\partial y_i} + \frac{\partial(C_1 V)}{\partial z_i}\right]\delta N_i\, dS_1 \\ &+ \int V[A_1 \cos(n_i, x) + B_1 \cos(n_i, y) + C_1 \cos(n_i, z)]\, \delta N_i\, dL_1. \end{aligned} \tag{31}$$

Les égalités (18) et (31) donnent :

$$\begin{aligned}
&\mathsf{S}_{S_1}\Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, x) \\
&\quad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, y) \\
&\quad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, z)\Big\}dS_1 \\
&+ \mathsf{S}_{S_1} V[\mathrm{A}_1\delta\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\delta\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\delta\cos(N_i, z)]\,dS_1 \\
&+ \mathsf{S}_{S_1} V[\mathrm{A}_1\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\cos(N_i, z)]\,\frac{dS_1' - dS_1}{dS_1}\,dS_1 \\
&= \mathsf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i} + \frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\Big]\delta N_i\,dS_1 \\
&+ \int V\{[\mathrm{A}_1\cos(n_i, x) + \mathrm{B}_1\cos(n_i, y) + \mathrm{C}_1\cos(n_i, z)]\,dN_i \\
&\quad - [\mathrm{A}_1\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\cos(N_i, z)]\,\delta n_i\}\,dL_1.
\end{aligned} \tag{32}$$

Cette égalité est générale.

Mais l'expression de δY obtenue au Chapître I cesserait d'être valable si, dans la déformation du système, les lignes le long desquelles la densité σ est discontinue se déplaçaient; *on ne doit donc appliquer les formules établies qu'aux déplacements pour lesquels*

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

en tout point des lignes L_1, L_2, L_{12}, qui limitent les surfaces S_1, S_2, S_{12}.

Dans ces conditions, l'égalité (32) peut s'écrire simplement

$$\begin{aligned}
&\mathsf{S}_{S_1}\Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, x) \\
&\quad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, y) \\
&\quad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, z)\Big\}dS_1 \\
&+ \mathsf{S}_{S_1} V[\mathrm{A}_1\delta\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\delta\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\delta\cos(N_i, z)]\,dS_1 \\
&+ \mathsf{S}_{S_1} V[\mathrm{A}_1\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\cos(N_i, z)]\,\frac{dS_1' - dS_1}{dS_1}\,dS_1 \\
&= \mathsf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i} + \frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\Big]\delta N_i\,dS_1.
\end{aligned} \tag{33}$$

Nous pouvons écrire, pour la surface S_2, une égalité analogue ; nous la désignerons par (33 bis) ; enfin une démonstration semblable nous permettra d'écrire

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_{12}}\Big[\Big\{\Big[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial x_1}-\frac{\partial(A_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x+\Big[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial y_1}-\frac{\partial(A_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y\\
&\qquad\qquad+\Big[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial z_1}-\frac{\partial(A_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\}\cos(N_i,x)\\
&\quad+\Big\{\Big[\frac{\partial(B_1 V)}{\partial x_1}-\frac{\partial(B_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x+\Big[\frac{\partial(B_1 V)}{\partial y_1}-\frac{\partial(B_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y\\
&\qquad\qquad+\Big[\frac{\partial(B_1 V)}{\partial z_1}-\frac{\partial(B_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\}\cos(N_i,y)\\
&\quad+\Big\{\Big[\frac{\partial(C_1 V)}{\partial x_1}-\frac{\partial(C_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x+\Big[\frac{\partial(C_1 V)}{\partial y_1}-\frac{\partial(C_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y\\
&\qquad\qquad+\Big[\frac{\partial(C_1 V)}{\partial z_1}-\frac{\partial(C_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\}\cos(N_i,z)\Big]\,dS_{12}\\
&+\mathbf{S}_{S_{12}}V[(A_1-A_2)\,\delta\cos(N_1,x)+(B_1-B_2)\,\delta\cos(N_1,y)+(C_1-C_2)\,\delta\cos(N_1,z)]\,dS_{12}\\
&+\mathbf{S}_{S_{12}}V[(A_1-A_2)\cos(N_1,x)+(B_1-B_2)\cos(N_1,y)\\
&\qquad\qquad+(C_1-C_2)\cos(N_1,z)]\,\frac{dS'_{12}-dS_{12}}{dS_{12}}\,dS_{12}\\
&=\mathbf{S}_{S_{12}}\Big[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial x_1}-\frac{\partial(A_2 V)}{\partial x_2}+\frac{\partial(B_1 V)}{\partial y_1}-\frac{\partial(B_2 V)}{\partial y_2}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial(C_1 V)}{\partial z_1}-\frac{\partial(C_2 V)}{\partial z_2}\Big]\,\delta N_1\,dS_{12}. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Les égalités (10), (33), (33 bis) et (34) donnent

$$\begin{aligned}
\delta Y=\;&\varepsilon\int_1\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\delta A_1+\frac{\partial V}{\partial y}\delta B_1+\frac{\partial V}{\partial z}\delta C_1\Big)dv_1\\
&-\varepsilon\int_1\Big[\frac{\partial V}{\partial x}\Big(\frac{\partial A_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial A_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial A_1}{\partial z}\delta z\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial V}{\partial y}\Big(\frac{\partial B_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial B_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial B_1}{\partial z}\delta z\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial V}{\partial z}\Big(\frac{\partial C_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial C_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial C_1}{\partial z}\delta z\Big)\Big]dv_1\\
&-\varepsilon\,\mathbf{S}_{S_1}\Big(A_1\frac{\partial V}{\partial x_i}+B_1\frac{\partial V}{\partial y_i}+C_1\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)\delta N_i\,dS_1\\
&+2\pi\varepsilon\,\mathbf{S}_{S_1}[A_1\cos(N_i,x)+B_1\cos(N_i,y)+C_1\cos(N_i,z)]^2\,\delta N_i\,dS_1\\
&+\text{etc.}\\
&-\varepsilon\,\mathbf{S}_{S_{12}}\Big(A_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+B_1\frac{\partial V}{\partial y_1}+C_1\frac{\partial V}{\partial z_1}-A_2\frac{\partial V}{\partial x_2}-B_2\frac{\partial V}{\partial y_2}-C_2\frac{\partial V}{\partial z_2}\Big)\delta N_i\,dS_{12}\\
&+2\pi\varepsilon\,\mathbf{S}_{S_{12}}\{[A_1\cos(N_1,x)+B_1\cos(N_1,y)+C_1\cos(N_1,z)]^2\\
&\qquad-[A_2\cos(N_2,x)+B_2\cos(N_2,y)+C_2\cos(N_2,z)]^2\}\,\delta N_1\,dS_{12}. \qquad (35)
\end{aligned}$$

On pourrait supposer les corps 1 et 2 placés dans le champ engendré par d'autres corps électrisés et polarisés ; *si ces corps sont fixes de forme et de position, si leur état d'électrisation et de polarisation est invariable, enfin s'ils n'ont avec les corps* 1 *et* 2 *aucun point de contact*, l'introduction de ces corps ne modifie pas l'expression de δY; seulement, dans cette expression, V représente alors la *fonction potentielle totale*, provenant non seulement de la polarisation des corps 1 et 2, mais encore de la distribution électrique ou diélectrique répandue sur les corps invariables.

Ajoutons encore une remarque qui nous sera utile au chapître suivant.

La formule précédente, comme toutes celles que nous avons écrites jusqu'ici, a été démontrée en supposant que δx, δy, δz étaient des fonctions continues de x, y, z, admettant des dérivées partielles par rapport à ces variables ; toutefois, il serait aisé de les étendre au cas où les déplacements δx, δy, δz, seraient discontinus le long de certaines surfaces, pourvu que la condition exprimée par l'égalité suivante soit vérifiée en chaque point de ces surfaces :

$$\begin{aligned} &\cos(N, x)\,\delta x + \cos(N, y)\,\delta y + \cos(N, z)\,\delta z \\ &+ \cos(N', x)\,\delta' x + \cos(N', y)\,\delta' y + \cos(N', z)\,\delta' z = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Dans cette égalité, δx, δy, δz, sont les composantes du déplacement du premier côté de la surface ; $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$, les composantes du déplacement de l'autre côté ; N est la demi-normale dirigée du premier côté ; N', la demi-normale dirigée du second côté.

L'égalité (35) ne diffère de l'expression de δY dont nous avions fait usage dans nos précédentes publications que par les termes

$$2\pi\varepsilon \, \mathrm{S}_{S_1} [\mathrm{A}_1 \cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1 \cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1 \cos(N_i, z)]^2 \, \delta N_i \, dS_1,$$

$$2\pi\varepsilon \, \mathrm{S}_{S_2} [\mathrm{A}_2 \cos(N_i; x) + \mathrm{B}_2 \cos(N_i, y) + \mathrm{C}_2 \cos(N_i, z)]^2 \, \delta N_i \, dS_2,$$

$$\begin{aligned} 2\pi\varepsilon \, \mathrm{S}_{S_{12}} \{ &[\mathrm{A}_1 \cos(N_1, x) + \mathrm{B}_1 \cos(N_1, y) + \mathrm{C}_1 \cos(N_1, z)]^2 \\ &- [\mathrm{A}_2 \cos(N_2, x) + \mathrm{B}_2 \cos(N_2, y) + \mathrm{C}_2 \cos(N_2, z)]^2 \} \, \delta N_1 \, dS_{12}. \end{aligned}$$

Ces termes, que nous avions omis, fournissent, dans les applications, les termes complémentaires dont l'introduction a été proposée par M. Liénard.

CHAPÎTRE IV.

Équilibre d'un Fluide incompressible, doué de Force coercitive, et polarisé.

C'est seulement dans le cas où un fluide est incompressible que l'on en peut étudier les conditions d'équilibre mécanique sans avoir besoin de le supposer dénué de force coercitive ; dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme* (Livre IX, Chapître VIII), nous avons donné les conditions d'équilibre d'un pareil fluide ; ces conditions sont de deux sortes : les unes doivent être vérifiées en tout point intérieur au fluide ; les autres, en tout point de la surface qui le limite ; les premières conditions, sous la forme que nous leur avions donnée, étaient exactes ; les secondes ne l'étaient pas ; M. Liénard a indiqué la valeur du terme que nous avions omis.

Nous allons reprendre ici, en nous appuyant sur l'expression de δY établie au Chapître précédent, l'établissement des conditions d'équilibre d'un fluide polarisé ; nous espérons rendre ainsi la démonstration de ces conditions irréprochable au point de vue de la rigueur.

Pour ne pas compliquer outre mesure notre analyse, supposons tout d'abord que la partie déformable du système ne soit formée que d'un seul fluide.

Si nous supposons ce fluide incompressible et si nous négligeons les actions capillaires, la partie variable du potentiel thermodynamique interne du système se réduira à la quantité Y; si l'on désigne par D la densité du fluide et si l'on suppose que les forces auxquelles est soumise chaque masse fluide élémentaire admettent une fonction potentielle Ψ, les forces extérieures appliquées au fluide effectueront, dans toute modification virtuelle, un travail

$$d\mathfrak{T}_e = -\int D\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\delta z\right) dv$$
$$+ \mathsf{S} P\,[\cos(P, x)\,\delta x + \cos(P, y)\,\delta y + \cos(P, z)\,\delta z]\; dS, \qquad (1)$$

P désignant la grandeur et la direction de la pression en tout point de l'élément dS, la première intégrale s'étendant au volume entier du fluide, et la seconde à la surface qui le limite.

Nous obtiendrons les conditions d'équilibre du système en écrivant que l'égalité

$$d\mathfrak{T}_e - \delta Y = 0 \qquad (2)$$

est vérifiée pour toute modification virtuelle, compatible avec les liaisons, imposée au système.

Nous ne voulons rien supposer sur les lois d'aimantation du fluide ; il nous faut donc envisager seulement les modifications dans lesquelles chaque élément de volume, en se déplaçant, entraîne son intensité de polarisation ; dès lors, il est aisé de voir que si ω, ω', ω'' désignent les composantes de la rotation élémentaire autour d'axes respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \delta A &= B\omega'' - C\omega', \\ \delta B &= C\omega \quad - A\omega'', \\ \delta C &= A\omega' \ - B\omega. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Nous savons, d'ailleurs, que

$$\begin{aligned} \omega &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right), \\ \omega' &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right), \\ \omega'' &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Les égalités (3) peuvent donc s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} \delta A &= \tfrac{1}{2}\left[B\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) - C\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)\right], \\ \delta B &= \tfrac{1}{2}\left[C\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) - A\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right)\right], \\ \delta C &= \tfrac{1}{2}\left[A\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) - B\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En vertu de ces égalités (4), on a

$$\begin{aligned} &\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\partial A + \frac{\partial V}{\partial y}\partial B + \frac{\partial V}{\partial z}\partial C\right) dv \\ &= \tfrac{1}{2}\int\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\left[B\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) - C\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)\right]\right. \\ &\qquad + \frac{\partial V}{\partial y}\left[C\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) - A\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right)\right] \\ &\qquad \left. + \frac{\partial V}{\partial z}\left[A\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) - B\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)\right]\right\} dv. \end{aligned} \tag{5}$$

Transformons cette égalité (5) au moyen d'intégrations par parties.

Imaginons que le déplacement dont les composantes sont δx, δy, δz, varie d'une manière continue d'un point à l'autre du fluide, sauf aux divers points d'une surface fermée Σ tracée à l'intérieur du fluide ; soient :

ν la demi-normale à la surface Σ, dirigée vers l'intérieur de cette surface.

ν' la demi-normale à la surface Σ, dirigée vers l'extérieur de cette surface.

δx, δy, δz, les composantes du déplacement à la face interne de la surface Σ.

$\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$, les composantes du déplacement à la face externe de la surface Σ.

L'égalité précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta A + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta B + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta C\right) dv \\
&= \tfrac{1}{2}\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]\delta x\right. \\
&\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right]\delta y \\
&\qquad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]\delta z\right\} dv \\
&+ \tfrac{1}{2}\mathrm{S}_s\left\{\left[\left(B\frac{\partial V}{\partial x_i} - A\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\cos(N_i, y) - \left(A\frac{\partial V}{\partial z_i} - C\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\cos(N_i, z)\right]\delta x\right. \\
&\qquad + \left[\left(C\frac{\partial V}{\partial y_i} - B\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\cos(N_i, z) - \left(B\frac{\partial V}{\partial x_i} - A\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\cos(N_i, x)\right]\delta y \\
&\qquad \left. + \left[\left(A\frac{\partial V}{\partial z_i} - C\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\cos(N_i, x) - \left(C\frac{\partial V}{\partial y_i} - B\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\cos(N_i, y)\right]\delta z\right\} dS \\
&+ \tfrac{1}{2}\mathrm{S}_\Sigma\left\{\left[\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu, y) - \left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu, z)\right](\delta x - \delta' x)\right. \\
&\qquad + \left[\left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu, z) - \left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu, x)\right](\delta y - \delta' y) \\
&\qquad + \left[\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu, x)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu, y)\right](\delta z - \delta' z)\right\} d\Sigma. \qquad (6)
\end{aligned}$$

L'égalité (35) du Chapître précédent, jointe aux égalités (1) et (6) du présent Chapître, permet d'écrire explicitement la condition d'équilibre (2).

Cette condition (2) ne doit pas avoir lieu quels que soient δx, δy, δz; ces quantités sont assujetties à deux conditions:

1°. En tout point du fluide, que l'on suppose incompressible, on doit avoir:

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

2°. En tout point de la surface Σ, on doit avoir [Chapître III, condition (36)]:

$$\cos(\nu, x)(\delta x - \delta' x) + \cos(\nu, y)(\delta y - \delta' y) + \cos(\nu, z)(\delta z - \delta' z) = 0. \tag{8}$$

Dès lors, il doit exister:

1°. Une quantité Π, fonction continue d'x, y, z, dans toute l'étendue du fluide;

2°. Une quantité λ variable d'une manière continue sur la surface Σ;

telles que l'on ait *identiquement*, quels que soient δx, δy, δz,

$$\begin{aligned} & d\mathfrak{T}_e - \delta Y \\ & + \int \Pi \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) dv \\ & + \mathbf{S}_\Sigma \lambda \left[\cos(\nu, x)(\delta x - \delta' x) + \cos(\nu, y)(\delta y - \delta' y) + \cos(\nu, z)(\delta z - \delta' z) \right] d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

Des intégrations par parties permettent de transformer cette identité en

$$\begin{aligned} & d\mathfrak{T}_e - \delta Y \\ & - \int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \delta z \right) dv \\ & - \mathbf{S}_S \Pi \left[\cos(N_i, x)\, \delta x + \cos(N_i, y)\, \delta y + \cos(N_i, z)\, \delta z \right] dS \\ & + \mathbf{S}_\Sigma (\lambda - \Pi) [\cos(\nu, x)(\delta x - \delta' x) + \cos(\nu, y)(\delta y - \delta' y) \\ & \qquad + \cos(\nu, z)(\delta z - \delta' z)]\, d\Sigma = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

L'égalité (35) du Chapître précédent, jointe aux égalités (1), (6) et (9) du présent Chapître donnent:

$$\int\Big[\Big\{\frac{\partial\Pi}{\partial x}+D\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\varepsilon\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial x}\Big)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}\Big)-\frac{\partial}{\partial z}\Big(A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\Big]\Big\}\delta x$$
$$+\Big\{\frac{\partial\Pi}{\partial y}+D\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\varepsilon\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial y}\Big)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial z}\Big(C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}\Big)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\Big]\Big\}\delta y$$
$$+\Big\{\frac{\partial\Pi}{\partial z}+D\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\varepsilon\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial z}\Big)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\Big]\Big\}\delta z\Big]dv$$
$$+S_\Sigma\Big[\Big\{(\Pi-\lambda)\cos(\nu,x)+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\cos(\nu,y)$$
$$-\Big(A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\cos(\nu,z)\Big]\Big\}(\delta x-\delta' x)$$
$$+\Big\{(\Pi-\lambda)\cos(\nu,y)+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\cos(\nu,z)$$
$$-\Big(B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\cos(\nu,x)\Big]\Big\}(\delta y-\delta' y)$$
$$+\Big\{(\Pi-\lambda)\cos(\nu,z)+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\cos(\nu,x)$$
$$-\Big(C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\cos(\nu,y)\Big]\Big\}(\delta z-\delta' z)\Big]d\Sigma$$
$$+S_s\Big[\Big\{\Big[\Pi-\varepsilon\Big(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)$$
$$+2\pi\varepsilon\big(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\big)^2\Big]\cos(N_i,x)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(B\frac{\partial V}{\partial x_i}-A\frac{\partial V}{\partial y_i}\Big)\cos(N_i,y)-\Big(A\frac{\partial V}{\partial z_i}-C\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big)\cos(N_i,z)\Big]$$
$$-P\cos(P,x)\Big\}\delta x$$
$$+\Big\{\Big[\Pi-\varepsilon\Big(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)$$
$$+2\pi\varepsilon\big(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\big)^2\Big]\cos(N_i,y)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(C\frac{\partial V}{\partial y_i}-B\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)\cos(N_i,z)-\Big(B\frac{\partial V}{\partial x_i}-A\frac{\partial V}{\partial y_i}\Big)\cos(N_i,x)\Big]$$
$$-P\cos(P,y)\Big\}\delta y$$
$$+\Big\{\Big[\Pi-\varepsilon\Big(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)$$
$$+2\pi\varepsilon\big(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\big)^2\Big]\cos(N_i,z)$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(A\frac{\partial V}{\partial z_i}-C\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big)\cos(N_i,x)-\Big(C\frac{\partial V}{\partial y_i}-B\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)\cos(N_i,y)\Big]$$
$$-P\cos(P,z)\Big\}\delta z\Big]d\Sigma=0. \qquad (10)$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient δx, δy, δz; on en conclut sans peine que l'on doit avoir :

1°. En tout point intérieur au fluide :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \Pi}{\partial x} + D\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial x}\right)\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

et deux autres égalités analogues.

2°. En tout point de la surface qui limite le fluide :

$$\left.\begin{aligned}&\Big[\Pi - \varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i} + B\frac{\partial V}{\partial y_i} + C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\\ &\quad + 2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\right)^2\Big]\cos(N_i, x)\\ &+ \frac{\varepsilon}{2}\Big[\left(B\frac{\partial V}{\partial x_i} - A\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\cos(N_i, y)\\ &\qquad - \left(A\frac{\partial V}{\partial z_i} - C\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\cos(N_i, z)\Big] = P\cos(P, x),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

et deux autres égalités analogues.

3°. En tout point de la surface Σ :

$$\left.\begin{aligned}&(\Pi - \lambda)\cos(\nu, x)\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu, y) - \left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu, z)\right] = 0,\\ &(\Pi - \lambda)\cos(\nu, y)\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu, z) - \left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu, x)\right] = 0,\\ &(\Pi - \lambda)\cos(\nu, z)\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu, x) - \left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu, y)\right] = 0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Multiplions la première des égalités (13) par $\cos(\nu, x)$, la seconde par $\cos(\nu, y)$, la troisième par $\cos(\nu, z)$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$\Pi - \lambda = 0,$$

moyennant laquelle les égalités (13) deviennent:

$$\left.\begin{aligned}
\left(B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu,y)-\left(A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu,z)=0,\\
\left(C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu,z)-\left(B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu,x)=0,\\
\left(A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu,x)-\left(C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu,y)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Remarquons maintenant que la surface Σ est entièrement arbitraire; quel que soit le point du fluide que l'on considère et quelle que soit la demi-droite ν issue de ce point, on pourra faire passer la surface Σ par ce point, et cela de telle sorte qu'elle soit normale à la droite ν; les égalités (14) doivent donc être vérifiées en tout point du fluide, et quelle que soit la direction ν; *on doit donc avoir, en tout point du fluide,*

$$\left.\begin{aligned}
C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}=0,\\
A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}=0,\\
B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Ces égalités, rapprochées des égalités (11), montrent que *l'on doit aussi avoir, en tout point du fluide:*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial x}+D\frac{\partial \Psi}{\partial x}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial x}\right)=0,\\
\frac{\partial \Pi}{\partial y}+D\frac{\partial \Psi}{\partial y}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial y}\right)=0,\\
\frac{\partial \Pi}{\partial z}+D\frac{\partial \Psi}{\partial z}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial z}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Les égalités (15), rapprochées des égalités (12), montrent que *l'on doit avoir, en tout point de la surface qui limite le fluide:*

$$\left.\begin{aligned}
P\cos(P,x)=\Big[\Pi-\varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\\
+2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\right)^2\Big]\cos(N_i,x),\\
P\cos(P,y)=\Big[\Pi-\varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\\
+2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\right)^2\Big]\cos(N_i,y),\\
P\cos(P,z)=\Big[\Pi-\varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\\
+2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\right)^2\Big]\cos(N_i,z).
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Les égalités (15), (16), (17) représentent les *conditions d'équilibre mécanique d'un fluide incompressible polarisé, doué ou non de force coercitive.*

Interprétons ces conditions.

Les égalités (17) nous apprennent que, pour maintenir le fluide en équilibre, il faut appliquer en chaque point de la surface qui le termine, une pression *normale* à cette surface ; la grandeur de cette pression, positive pour une pression dirigée vers l'intérieur du fluide, est représentée par l'égalité :

$$P = \Pi - \varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i} + B\frac{\partial V}{\partial y_i} + C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right) + 2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\right)^2. \quad (18)$$

On voit que *la grandeur de cette pression dépend de l'orientation de l'élément sur lequel elle agit ;* ce résultat remarquable est dû à M. Liénard ; le terme

$$2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\right)^2 = 2\pi\varepsilon M^2 \cos^2(M, N_i)$$

avait été omis dans l'expression de P qui est donnée dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme.*

En vertu des égalités (12), il doit exister une fonction $\theta(x, y, z)$ telle que l'on ait, en tout point du fluide,

$$\left.\begin{aligned} A &= -\varepsilon\theta\frac{\partial V}{\partial x}, \\ B &= -\varepsilon\theta\frac{\partial V}{\partial y}, \\ C &= -\varepsilon\theta\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Si le fluide considéré est homogène, cas auquel D est indépendant d'x, y, z, les égalités (16) donnent, moyennant les égalités (19),

$$d(\Pi + D\Psi) + \frac{1}{\theta}(AdA + BdB + CdC) = 0,$$

ou bien, à cause de l'égalité

$$AdA + BdB + CdC = MdM,$$

$$d(\Pi + D\Psi) + \frac{M}{\theta}dM = 0.$$

La quantité $\frac{M}{\theta}dM$ ne pourrait être une différentielle totale, si θ dépendait

de x, y, z, autrement que par l'intermédiaire de la variable M. Il existe donc une fonction Θ(M) telle que l'on ait, en chaque point du fluide

$$\theta(x, y, z) = \Theta(\mathrm{M}),$$

en sorte que les égalités (19) peuvent s'écrire:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= -\varepsilon\Theta(\mathrm{M})\frac{\partial V}{\partial x}, \\ \mathrm{B} &= -\varepsilon\Theta(\mathrm{M})\frac{\partial V}{\partial y}, \\ \mathrm{C} &= -\varepsilon\Theta(\mathrm{M})\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ainsi, *lorsqu'un fluide, même doué de force coercitive, est en équilibre, la polarisation y est distribuée comme elle le serait sur un fluide parfaitement doux, de même forme, dont le coefficient de polarisation serait une fonction, convenablement choisie, de l'intensité de polarisation; le choix de cette fonction* Θ(M) *ne dépend pas seulement de la nature du fluide étudié; il peut dépendre de la suite des modifications qui ont amené le fluide à l'état d'équilibre.*

C'est le résultat fondamental que nous avions obtenu, dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, par une analyse moins générale et moins rigoureuse.

Tout ce qui précède suppose le système réduit à un fluide unique.

Imaginons maintenant qu'il soit formé de deux fluides en contact, 1 et 2. Pour chacun de ces deux fluides, on aura à écrire des égalités analogues aux égalités (15), (16) et (17), en affectant les quantités qui y figurent de l'indice 1 pour le premier fluide et de l'indice 2 pour le second; en outre, nous devrons avoir, en tout point de la surface de contact S_{12} des deux fluides:

$$\begin{aligned} \Pi_1 - \Pi_2 = \varepsilon\Big[\Big(\mathrm{A}_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + \mathrm{B}_1\frac{\partial V}{\partial y_1} + \mathrm{C}_1\frac{\partial V}{\partial z_1}\Big) - \Big(\mathrm{A}_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \mathrm{B}_2\frac{\partial V}{\partial y_2} + \mathrm{C}_2\frac{\partial V}{\partial z_2}\Big)\Big] \\ - 2\pi\varepsilon\,[(\mathrm{A}_1\cos(N_1, x) + \mathrm{B}_1\cos(N_1, y) + \mathrm{C}_1\cos(N_1, z))^2 \\ -(\mathrm{A}_2\cos(N_2, x) + \mathrm{B}_2\cos(N_2, y) + \mathrm{C}_2\cos(N_2, z))^2]. \end{aligned}$$

L'établissement de cette condition ne présente aucune difficulté.

CHAPÎTRE V.

Les Fluides parfaitement doux.

Prenons un système formé de deux fluides, 1 et 2, dénués de force coercitive et compressibles. Si nous négligeons les actions capillaires, le Potentiel Thermodynamique Interne de ce système pourra se mettre sous la forme

$$F = \int_1 \Phi_1(D_1)\, dv_1 + \int_2 \Phi_2(D_2)\, dv_2 + Y + \int_1 F_1(M_1, D_1)\, dv_1 + \int_2 F_2(M_2, D_2)\, dv_2. \quad (1)$$

Quant au travail virtuel $d\mathfrak{T}_e$ des forces extérieures, il sera donné comme au chapître précédent, par l'expression

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_e = & -\int_1 D_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\delta z\right) dv_1 \\ & -\int_2 D_2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\delta z\right) dv_2 \\ & + \mathrm{S}_{S_1} P\,[\cos(P, x)\,\delta x + \cos(P, y)\,\delta y + \cos(P, z)\,\delta z]\, dS_1 \\ & + \mathrm{S}_{S_2} P\,[\cos(P, x)\,\delta x + \cos(P, y)\,\delta y + \cos(P, z)\,\delta z]\, dS_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Les conditions d'équilibre du système s'obtiendront en exprimant que l'égalité

$$d\mathfrak{T}_e - \delta F = 0 \quad (3)$$

est vérifiée pour toutes les modifications virtuelles du système.

Il nous est loisible de considérer d'abord les seules modifications dans lesquelles chaque élément matériel garde un volume invariable et entraîne avec lui sa polarisation ; l'égalité (3), appliquée à de semblables modifications, donne les égalités (15), (16), (17), et (21) du Chapître précédent à titre de *conditions nécessaires, mais non suffisantes, de l'équilibre.*

Ecrivons maintenant l'expression générale de $d\mathfrak{T}_e - \delta F$.

Nous avons

$$\left.\begin{aligned}\delta D_1 &= -D_1\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right),\\ \delta D_2 &= -D_2\left(\frac{\partial\delta x}{\partial y}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right),\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta M_1 &= \frac{A_1}{M_1}\delta A_1+\frac{B_1}{M_1}\delta B_1+\frac{C_1}{M_1}\delta C_1,\\ \delta M_2 &= \frac{A_2}{M_2}\delta A_2+\frac{B_2}{M_2}\delta B_2+\frac{C_2}{M_2}\delta C_2.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Si donc nous définissons les deux fonctions $f_1(M_1,\ D_1)$, $f_2(M_2,\ D_2)$ par les égalités

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{f_1(M_1,\ D_1)} &= \frac{1}{M_1}\,\frac{\partial F_1(M_1,\ D_1)}{\partial D_1},\\ \frac{1}{f_2(M_2,\ D_2)} &= \frac{1}{M_2}\,\frac{\partial F_2(M_2,\ D_2)}{\partial D_2},\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

nous aurons, en général,

$$\begin{aligned}\delta F = \delta Y &+ \int_1 \frac{1}{f_1(M_1,D_1)}(A_1\delta A_1+B_1\delta B_1+C_1\delta C_1)\,dv_1\\ &+\int_2 \frac{1}{f_2(M_2,D_2)}(A_2\delta A_2+B_2\delta B_2+C_2\delta C_2)\,dv_2\\ &+\int_1\left[\Phi_1(D_1)-D_1\frac{d\Phi_1(D_1)}{dD_1}+f_1(M_1,\ D_1)-D_1\frac{\partial f_1(M_1,\ D_1)}{\partial D_1}\right]\\ &\qquad\qquad\times\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_1\\ &+\int_2\left[\Phi_2(D_2)-D_2\frac{d\Phi_2(D_2)}{dD_2}+f_2(M_2,\ D_2)-D_2\frac{\partial f_2(M_2,\ D_2)}{\partial D_2}\right]\\ &\qquad\qquad\times\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_2.\end{aligned}\tag{7}$$

Observons que l'on a identiquement

$$\left.\begin{aligned}A_1(B_1\omega''-C_1\omega')+B_1(C_1\omega-A_1\omega'')+C_1(A_1\omega'-B_1\omega)&=0,\\ A_2(B_2\omega''-C_2\omega')+B_2(C_2\omega-A_2\omega'')+C_2(A_2\omega''-B_2\omega)&=0,\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

et nous verrons sans peine que les égalités (35) du Chapître III, (2) et (7) du présent Chapître, permettent d'écrire l'égalité (3) sous la forme :

$$\int_1 \left\{ \left[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{A_1}{f_1(M_1, D_1)} \right] \Delta A_1 + \left[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{B_1}{f_1(M_1, D_1)} \right] \Delta B_1 \right.$$

$$\left. + \left[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{C_1}{f_1(M_1, D_1)} \right] \Delta C_1 \right\} dv_1$$

$$+ \int_1 \left[\phi_1(D_1) - D_1 \frac{d\phi_1(D_1)}{dD_1} + f_1(M_1, D_1) - D_1 \frac{\partial f_1(M_1, D_1)}{\partial D_1} \right]$$

$$+ \text{etc.} \qquad \times \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) dv_1$$

$$+ \varepsilon \int_1 \left[\frac{\partial V}{\partial x} (B_1 \omega'' - C_1 \omega') + \frac{\partial V}{\partial y} (C_1 \omega - A_1 \omega'') + \frac{\partial V}{\partial z} (A_1 \omega' - B_1 \omega) \right] dv_1$$

$$+ \int_1 \left\{ \left[D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial C_1}{\partial x} \right) \right] \delta x \right.$$

$$+ \left[D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial C_1}{\partial y} \right) \right] \delta y$$

$$\left. + \left[D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial C_1}{\partial z} \right) \right] \delta z \right\} dv_1$$

$$+ \mathrm{S}_{S_1} \left\{ \left[2\pi\varepsilon \left(A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z) \right)^2 \right. \right.$$

$$\left. - \varepsilon \left(A_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + B_1 \frac{\partial V}{\partial y_i} + C_1 \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) \right] \delta N_i$$

$$\left. - P \left[\cos(P, x) \delta x + \cos(P, y) \delta y + \cos(P, z) \delta z \right] \right\} dS_1$$

$$+ \text{etc.}$$

$$+ \mathrm{S}_{S_{12}} \left[2\pi\varepsilon \left(A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z) \right)^2 \right.$$

$$- 2\pi\varepsilon \left(A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z) \right)^2$$

$$\left. - \varepsilon \left(A_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} + C_1 \frac{\partial V}{\partial z_1} - A_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} - B_2 \frac{\partial V}{\partial y_2} - C_2 \frac{\partial V}{\partial z_2} \right) \right] \delta N_1 \, dS_{12}. \tag{9}$$

Dans cette égalité, on a posé, pour abréger,

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= \delta A - (B\omega'' - C\omega'), \\ \Delta B &= \delta B - (C\omega - A\omega''), \\ \Delta C &= \delta C - (A\omega' - B\omega). \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

L'égalité (9) est générale; supposons maintenant vérifiées les égalités (15), (16), (17) et (21) du Chapître précédent, que nous savons être nécessaires pour

l'équilibre du système ; il est aisé de voir que ces égalités expriment simplement que l'on a *identiquement*

$$\varepsilon\int_1\left[\frac{\partial V}{\partial x}(B_1\omega''-C_1\omega')+\frac{\partial V}{\partial y}(C_1\omega-A_1\omega'')+\frac{\partial V}{\partial z}(A_1\omega'-B_1\omega)\right]dv_1$$

$$+\int_1\left\{\left[D_1\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial x}\right)\right]\delta x\right.$$

$$+\left[D_1\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial A_1}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)\right]\delta y$$

$$\left.+\left[D_1\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A_1}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\right]\delta z\right\}dv_1$$

$$+\mathrm{S}_{S_1}\left\{\left[2\pi\varepsilon\left(A_1\cos(N_i,x)+B_1\cos(N_i,y)+C_1\cos(N_i,z)\right)^2\right.\right.$$

$$\left.-\varepsilon\left(A_1\frac{\partial V}{\partial x_i}+B_1\frac{\partial V}{\partial y_i}+C_1\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\right]\delta N_i$$

$$\left.-P\left[\cos(P,x)\,\delta x+\cos(P,y)\,\delta y+\cos(P,z)\,\delta z\right]\right\}dS_1$$

$$+\text{ etc.}$$

$$+\mathrm{S}_{S_{12}}\left[2\pi\varepsilon\left(A_1\cos(N_1,x)+B_1\cos(N_1,y)+C_1\cos(N_1,z)\right)^2\right.$$

$$-2\pi\varepsilon\left(A_2\cos(N_2,x)+B_2\cos(N_2,y)+C_2\cos(N_2,z)\right)^2$$

$$\left.-\varepsilon\left(A_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+B_1\frac{\partial V}{\partial y_1}+C_1\frac{\partial V}{\partial z_1}-A_2\frac{\partial V}{\partial x_2}-B_2\frac{\partial V}{\partial y_2}-C_2\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)\right]\delta N_1\,dS_{12}$$

$$=\int_1\Pi_1\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_1$$

$$+\int_2\Pi_2\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_2.$$

Lors donc que les égalités (15), (16), (17) et (21) du Chapître précédent sont supposées vérifiées, l'égalité (9) peut s'écrire :

$$\int_1\left\{\left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{A_1}{f_1(M_1,D_1)}\right]\Delta A_1+\left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{B_1}{f_1(M_1,D_1)}\right]\Delta B_1\right.$$

$$\left.+\left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{C_1}{f_1(M_1,D_1)}\right]\Delta C_1\right\}dv_1$$

$$+\int_1\left[\phi_1(D_1)-D_1\frac{d\phi_1(D_1)}{dD_1}\right.$$

$$\left.+f_1(M_1,D_1)-D_1\frac{\partial f_1(M_1,D_1)}{\partial D_1}+\Pi_1\right]\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_1$$

$$+\text{ etc.}=0. \tag{11}$$

Il est évident que la dilatation cubique $\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)$ a une valeur arbitraire en tout point des fluides 1 et 2. δA_1, δB_1, δC_1, ayant des valeurs arbitraires, il en est de même, en vertu des égalités (10) de ΔA_1, ΔB_1, ΔC_1. Donc, pour que l'égalité (11) ait lieu, il faut et il suffit :

1°. Que l'on ait, *en tout point du fluide* 1,

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\varepsilon f_1(M_1, D_1)\frac{\partial V}{\partial x}, \\ B_1 &= -\varepsilon f_1(M_1, D_1)\frac{\partial V}{\partial y}, \\ C_1 &= -\varepsilon f_1(M_1, D_1)\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

et, *en tout point du fluide* 2,

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= -\varepsilon f_2(M_2, D_2)\frac{\partial V}{\partial x}, \\ B_2 &= -\varepsilon f_2(M_2, D_2)\frac{\partial V}{\partial y}, \\ C_2 &= -\varepsilon f_2(M_2, D_2)\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{12 bis}$$

2°. Que l'on ait, *en tout point du fluide* 1,

$$\Phi_1(D_1) - D_1\frac{d\Phi_1(D_1)}{dD_1} + f_1(M_1, D_1) - D_1\frac{\partial f_1(M_1, D_1)}{\partial D_1} + \Pi_1 = 0, \tag{13}$$

et, *en tout point du fluide* 2,

$$\Phi_2(D_2) - D_2\frac{d\Phi_2(D_2)}{dD_2} + f_2(M_2, D_2) - D_2\frac{\partial f_2(M_2, D_2)}{\partial D_2} + \Pi_2 = 0. \tag{13 bis}$$

Si l'on observe que les conditions (12) et (12 bis) entraînent les égalités (15) du Chapître précédent, on voit que *les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système de fluides compressibles et dénués de force coercitive, sont données par les égalités* (12), (12 bis), (13), (13 bis) *du présent Chapître, jointes aux égalités* (16), (17) *et* (21) *du Chapître précédent.*

Les égalités (12) et (12 bis) ont joué un rôle fondamental dans toutes nos études sur les corps magnétiques ou diélectriques; quant aux égalités (13) et (13 bis), nous avons signalé leur importance dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme.*

SUR LES

DISSOLUTIONS D'UN SEL MAGNÉTIQUE,

PAR P. DUHEM.

Il ne paraît pas que les propriétés d'une dissolution formée par un sel sensible à l'action de l'aimant aient été jusqu'ici l'objet d'aucune étude théorique. La Thermodynamique, cependant, fournit une démonstration très simple de quelques-unes de ces propriétés; certaines des conclusions auxquelles elle parvient paraissent susceptibles d'une vérification expérimentale. C'est à l'exposé de ces conséquences de la Thermodynamique que sera consacré ce Mémoire.

§ I. — Potentiel thermodynamique d'un système aimanté renfermant une dissolution.

Le potentiel thermodynamique interne d'un système aimanté peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathfrak{T} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M})\, dv.$$

Dans cette formule,

E est l'équivalent mécanique de la chaleur;
T est la température absolue;
Υ est l'énergie interne que posséderait le système si on le ramenait à l'état neutre magnétique;
Σ est l'entropie qu'il posséderait dans les mêmes conditions;
$\mathfrak{T}$ est le potentiel magnétique;
$\mathfrak{M}$ est l'intensité d'aimantation en un point de l'élément dv;
$\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ est une fonction dont la forme dépend de la nature de la substance qui compose l'élément dv;

le signe $\int$ enfin indique une intégration qui s'étend à tous les éléments de volume du système.

Ce potentiel thermodynamique interne ne figure jamais, dans aucune question, que par sa variation ; il en résulte que l'on peut, sans inconvénient, y supprimer tous les termes qui sont assujettis à demeurer constants.

Supposons le système formé d'aimants permanents 1 et d'un corps parfaitement doux 2 ; soit dv_1 un élément de volume des aimants permanents; soit dv_2 un élément de volume du corps parfaitement doux ; l'aimantation a pour composantes $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ en un point du premier élément, et $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ en un point du second ; soient $\mathcal{V}_1$ la fonction potentielle magnétique des aimants permanents et $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle de l'aimantation distribuée sur le corps parfaitement doux. Nous aurons

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_1}\right)dv_1 \\ + \int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right)dv_2 \\ + \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2.\end{aligned}$$

Mais les aimants permanents ayant une forme et une aimantation invariables, la quantité

$$\frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_1}\right)dv_1$$

demeure absolument invariable, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right)dv_2 \\ + \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2,\end{aligned}$$

en négligeant, comme nous l'avons dit, les termes constants.

Nous admettrons que les aimants permanents sont formés par une substance de constitution invariable, tandis que le corps parfaitement doux aura une constitution variable; ce dernier sera formé par une

dissolution dont la concentration pourra être différente d'un point à l'autre au même instant et d'un instant à l'autre au même point. Cette dissolution sera incompressible, de telle façon que la densité en chaque point dépende uniquement de la concentration au même point. En désignant par s cette concentration, on pourra écrire

$$\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) = \int \Phi(s)\, dv_2,$$

$\Phi(s)$ étant une certaine fonction de s dont il n'est pas utile pour le moment de préciser davantage la nature.

L'aimantation des aimants permanents étant invariable, on peut réduire

$$\int \mathcal{F}(\mathfrak{M})\, dv$$

à la quantité

$$\int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)\, dv_2.$$

De ces diverses considérations il résulte que, le potentiel thermodynamique interne d'un système formé par des aimants permanents et une dissolution magnétique peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F} = &\int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ &+ \frac{1}{2} \int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ &+ \int [\Phi(s) + \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)]\, dv_2. \end{aligned}\right.$$

§ II. — Aimantation d'une dissolution magnétique.

Imaginons que les composantes $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$ de l'aimantation aux divers points de la dissolution éprouvent des variations arbitraires $\delta\mathfrak{A}_2$, $\delta\mathfrak{B}_2$, $\delta\mathfrak{C}_2$. Le potentiel thermodynamique interne, défini par l'égalité (1), subira une variation donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F} = \int \Bigg\{ &\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{M}} \right] \delta\mathfrak{A}_2 \\ &+ \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{M}} \right] \delta\mathfrak{B}_2 \\ &+ \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{M}} \right] \delta\mathfrak{C}_2 \Bigg\} dv_2. \end{aligned}$$

Cette variation doit, pour l'équilibre, être égale à zéro, quelles que soient les quantités $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$. On doit donc avoir, en tout point de la dissolution,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= -\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2},\\ \mathcal{B}_2 &= -\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2},\\ \mathcal{C}_2 &= -\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}, \end{aligned}\right.$$

égalités dans lesquelles on a posé

$$(3)\quad \mathrm{F}(\mathfrak{M}, s) = -\,\frac{\mathfrak{M}}{\dfrac{\partial\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial\mathfrak{M}}}.$$

La fonction $\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)$ est la fonction magnétisante. Un cas approximatif intéressant est celui où elle se transforme en un coefficient d'aimantation indépendant de l'intensité d'aimantation.

Ce coefficient dépend de la concentration de la dissolution. Il peut arriver que le dissolvant, pris à l'état de pureté, soit tellement peu sensible à l'action de l'aimant qu'on puisse, sans erreur notable, le regarder comme non magnétique; c'est ce qui arrivera, par exemple, pour l'eau, si l'on compare son aimantation à celle d'un composé ferrugineux en dissolution. Dans ce cas, du moins pour les faibles concentrations, on peut regarder ce coefficient comme proportionnel à la concentration. Les équations (2) deviennent alors

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= -\,\mathrm{K}s\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2},\\ \mathcal{B}_2 &= -\,\mathrm{K}s\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2},\\ \mathcal{C}_2 &= -\,\mathrm{K}s\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}, \end{aligned}\right.$$

K étant un coefficient qui dépend de la nature du sel dissous et de la température.

Ce coefficient est, en général, assez petit; il en est alors de même de $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ et partant de $\mathcal{V}_2$; de sorte que, si l'on néglige les termes

de l'ordre de K^2 devant les termes de l'ordre de K, les équations précédentes prennent la forme approchée

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_2 = -Ks\dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}, \\ \mathcal{B}_2 = -Ks\dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}, \\ \mathcal{C}_2 = -Ks\dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}. \end{cases}$$

D'une manière générale, on a

$$(6)\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} d\mathfrak{M}.$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$F(\mathfrak{M}, s) = Ks,$$

cette relation devient

$$(7)\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2Ks}.$$

§ III. — Conditions d'équilibre d'une dissolution magnétique; conditions hydrostatiques.

Une dissolution magnétique 2 est soumise à l'action d'aimants permanents 1. Aux divers éléments $d\omega$ de la surface déformable qui limite cette dissolution sont appliquées des pressions normales $P\,d\omega$. Aux divers éléments de volume dv de cette dissolution sont appliquées des forces extérieures. Les composantes de la force appliquée à l'élément dv_2 sont

$$X = -\rho(s)\frac{\partial V}{\partial x_2}dv_2,$$

$$Y = -\rho(s)\frac{\partial V}{\partial y_2}dv_2,$$

$$Z = -\rho(s)\frac{\partial V}{\partial z_2}dv_2,$$

$\rho(s)$ étant la densité en un point de l'élément dv_2, et V une fonction

uniforme finie et continue de x_2, y_2, z_2, fonction dont la forme ne dépend pas de la figure du fluide.

Ces dernières forces extérieures admettent un potentiel qui est donné par l'expression

$$W = \int \rho(s)\, V\, dv_2, \tag{8}$$

les sommations s'étendant au volume entier du fluide.

Cherchons à quelles conditions la dissolution considérée pourra demeurer immobile.

Pour que l'équilibre soit assuré, il faut et il suffit que, dans toute déformation virtuelle imposée au fluide, la variation éprouvée par le potentiel thermodynamique interne du fluide soit égale ou supérieure au travail effectué par les forces extérieures.

Si l'on désigne par $\mathcal{F}$ le potentiel thermodynamique interne du fluide, par $d\mathfrak{T}_e$ le travail des forces extérieures, cette condition s'exprimera ainsi

$$\delta\mathcal{F} \geqq d\mathfrak{T}_e$$

ou

$$\delta\mathcal{F} - d\mathfrak{T}_e \geqq 0. \tag{9}$$

Dans le cas particulier où la déformation virtuelle imposée au fluide est *renversable*, c'est-à-dire où l'on obtient une nouvelle déformation virtuelle en changeant tous les signes des déplacements que les divers points éprouvent dans la première, le signe d'inégalité doit évidemment disparaître de la condition précédente, qui devient

$$\delta\mathcal{F} - d\mathfrak{T}_e = 0. \tag{10}$$

Le travail externe $d\mathfrak{T}_e$ est la somme du travail $d\mathfrak{T}'_e$ effectué par les pressions que supporte la surface du fluide et du travail $d\mathfrak{T}''_e$ des forces appliquées à ses divers éléments de volume

$$d\mathfrak{T}_e = d\mathfrak{T}'_e + d\mathfrak{T}''_e. \tag{11}$$

Nous avons d'ailleurs

$$d\mathfrak{T}'_e = \mathbf{S}\, P[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, d\omega, \tag{13}$$

u, v, w étant les composantes du déplacement d'un point de l'élément $d\omega$; N_i étant la normale à cet élément vers l'intérieur du fluide, et l'intégrale s'étendant à la surface déformable qui limite le fluide.

Le travail $d\mathfrak{T}''_e$ est égal à la variation changée de signe de la quantité W. Si δs est la variation que subit la concentration au point (x_2, y_2, z_2); si u, v, w sont les composantes du déplacement du point matériel qui avait pour coordonnées initiales x_2, y_2, z_2; si nous remarquons enfin que

$$\delta\, dv_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right) dv_2,$$

nous aurons

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{T}''_e = &-\int \mathrm{V}\frac{\partial \rho(s)}{\partial s}\,\delta s\, dv_2 \\ &-\int \rho(s)\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}w\right) dv_2 \\ &-\int \mathrm{V}\rho(s)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right) dv_2 \\ &-\int \mathrm{V}\frac{d\rho(s)}{ds}\left(\frac{\partial s}{\partial x}u + \frac{\partial s}{\partial y}v + \frac{\partial s}{\partial z}w\right) dv_2. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (11), (12), (13) nous fournissent l'expression complète de $d\mathfrak{T}_e$.

Calculons maintenant la variation $\delta\mathfrak{F}$ subie par le potentiel thermodynamique interne de la dissolution.

D'après l'égalité (1), on peut écrire

$$(14) \qquad \delta\mathfrak{F} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C},$$

les trois quantités A, B, C ayant les significations suivantes :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} = &\ \delta\int \Phi(s)\, dv_2, \\ \mathrm{B} = &\ \delta\int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\, dv_2, \\ \mathrm{C} = &\ \delta\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial \mathcal{V}'_1}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right) dv_2 \\ &+ \tfrac{1}{2}\delta\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right) dv_2, \end{aligned} \right.$$

Calculons successivement les trois quantités A, B, C.

1° *Calcul de* A. — Le calcul de A est facile ; le volume de l'élément dv_2 augmente de

$$\delta\, dv_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right) dv_2.$$

En même temps, la concentration en un point de cet élément augmente de δs. On a donc

$$(16)\quad \begin{cases} A = \displaystyle\int \left[\frac{d\,\Phi(s)}{ds}\,\delta s + \Phi(s)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)\right] dv_2 \\ \quad + \displaystyle\int \frac{d\,\Phi(s)}{ds}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\,u + \frac{\partial s}{\partial y}\,v + \frac{\partial s}{\partial z}\,w\right) dv_2. \end{cases}$$

2° *Calcul de* B. — Supposons que, dans la déformation du fluide, chaque élément entraîne avec lui son aimantation sans que celle-ci change de grandeur ni de direction ; $\mathfrak{M}$ demeurera invariable, et l'on aura simplement

$$(17)\quad \begin{cases} B = \displaystyle\int \left[\frac{\partial\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{ds}\,\delta s + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)\right] dv_2 \\ \quad + \displaystyle\int \frac{\partial\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{ds}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\,u + \frac{\partial s}{\partial y}\,v + \frac{\partial s}{\partial z}\,w\right) dv_2. \end{cases}$$

3° *Calcul de* C. — La quantité dont C est la variation dépend uniquement de la forme du fluide et de l'aimantation de chaque élément de volume. Donc, pour calculer C, on peut calculer la variation subie par la quantité en question dans une série quelconque de modifications amenant les éléments dont il s'agit du même état initial au même état final que la modification considérée.

Soient

V (*fig.* 1) le volume occupé par le fluide avant et après la modification ;

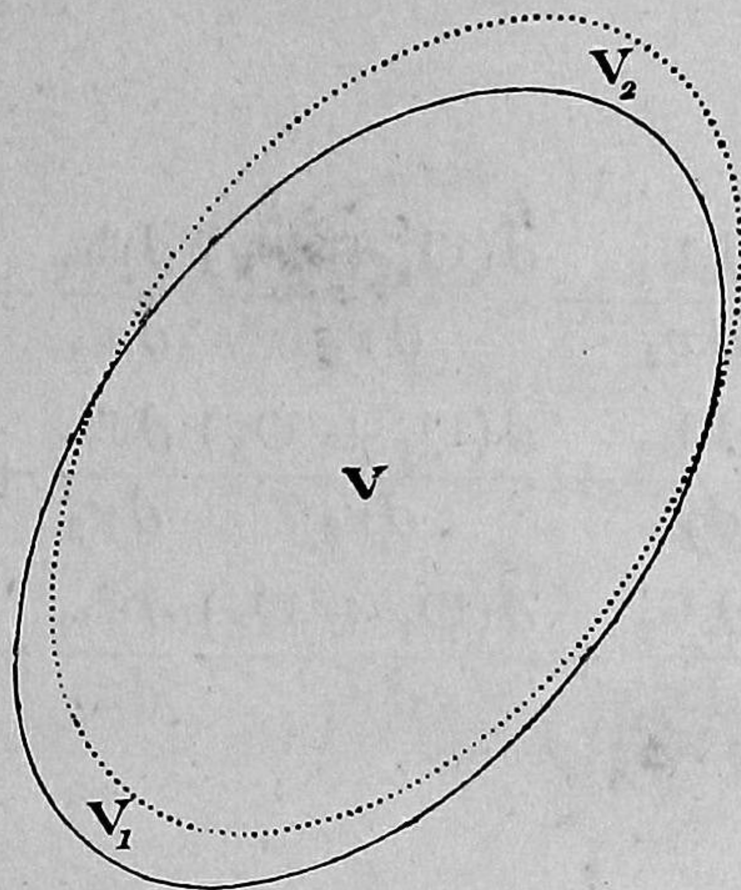
V_1 le volume qui était rempli par du fluide avant la modification et ne l'est pas après ;

V_3 le volume qui n'était pas rempli par le fluide avant la modification et l'est après.

Il est aisé de voir que, en négligeant les infiniment petits d'ordre

supérieur, la modification considérée pourra être regardée comme résultant des modifications suivantes :

Fig. 1.



1° En tout point du volume $v_2 = V + V_1$, on donne à $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ des variations

$$\delta\mathcal{A}_2 = -\left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_2} u + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial y_2} v + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial z_2} w\right),$$

$$\delta\mathcal{B}_2 = -\left(\frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial x_2} u + \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial y_2} v + \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial z_2} w\right),$$

$$\delta\mathcal{C}_2 = -\left(\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial x_2} u + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial y_2} v + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial z_2} w\right).$$

2° On supprime ce qui se trouve à l'intérieur du volume V_1.

3° On remplit le volume V_2 par une masse de fluide aimanté dont l'aimantation en chaque point ait sensiblement même grandeur et même direction qu'aux points du volume V infiniment voisins de celui-là.

On a alors

$$C = C' + C'' + C''', \tag{18}$$

C', C'', C''' étant les quantités analogues à C relatives à ces trois modifications partielles.

Si le volume et la forme du fluide demeurent invariables et si, en même temps, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ subissent des variations quelconques $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$, on sait que la quantité

$$\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right) dv_2 + \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right) dv_2$$

subit une variation

$$\int\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}\,\delta\mathcal{A}_2+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}\,\delta\mathcal{B}_2+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\,\delta\mathcal{C}_2\right]dv_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}C'=-\int\Big\{&\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial x_2}\right]u\\
+&\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial y_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial y_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial y_2}\right]v\\
+&\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial z_2}\right]w\Big\}\,dv_2\end{aligned}$$

ou bien

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}C'=-\int\Big\{&\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]u\\
+&\frac{\partial}{\partial y_2}\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]v\\
+&\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]w\Big\}\,dv_2\\
+\int\Big\{&\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2^2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\,\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\,\partial z_2}\right]u\\
+&\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\,\partial y_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2^2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2\,\partial z_2}\right]v\\
+&\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\,\partial z_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2\,\partial z_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2^2}\right]w\Big\}\,dv_2.\end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par $d\omega_1$ l'un des éléments de la surface ω qui confinent au volume V_1, on verra facilement que

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}C''=-\mathrm{S}&\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]\\
&\times[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\omega_1.\end{aligned}\right.$$

De même, si $d\omega_2$ désigne un élément de la surface ω contigu au volume v_2, on aura

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned}C'''=-\mathrm{S}&\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]\\
&\times[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\omega_2.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (2) donnent

$$\mathcal{A}_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2} = -\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)},$$

$$\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2^2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\, \partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\, \partial z_2} = -\frac{F(\mathfrak{M}, s)}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2,$$

$$\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\, \partial y_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2^2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\, \partial z_2} = -\frac{F(\mathfrak{M}, s)}{2} \frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2,$$

$$\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\, \partial z_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2\, \partial z_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2^2} = -\frac{F(\mathfrak{M}, s)}{2} \frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2,$$

Moyennant ces relations, les égalités (18), (19), (20) et (21) donnent

$$\begin{aligned} C = & \mathbf{S} \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)]\, d\omega \\ & - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\right] u + \frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\right] v + \frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\right] w \right\} dv_2 \\ & - \frac{1}{2} \int F(\mathfrak{M}, s) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 u + \frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 v + \frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 w \right\} dv_2 \end{aligned}$$

ou bien, par des intégrations par parties,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} C = & \frac{1}{2} \mathbf{S} \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)]\, d\omega \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{1}{2} \int \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \left[\frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x} u + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y} v + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z} w \right] dv_2. \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant écrire que, dans toute modification du fluide compatible avec son incompressibilité et où chaque élément se déplace en gardant une aimantation invariable de grandeur et de direction, on a, conformément aux égalités ou inégalités (9) et (14),

$$(23) \qquad A + B + C \geqq d\mathfrak{T}'_e + d\mathfrak{T}''_e.$$

Nous appliquerons successivement cette condition (23) à diverses espèces de modifications.

Imaginons, en premier lieu, que l'on ait tracé à l'intérieur du liquide une surface canal infiniment déliée et fermée sur elle-même. Soit Ω la

section droite de cette surface canal. Par des sections droites équidistantes et infiniment rapprochées, divisons cette surface canal en tronçons de même volume. Soit dl la longueur d'un de ces tronçons et $dv_2 = \Omega\, dl$ leur volume commun. Chacun de ces tronçons gardant une concentration invariable et une aimantation invariable de grandeur et de direction, faisons-le progresser d'une même longueur δl parallèlement à une directrice de la surface canal : nous aurons, pour ce tronçon,

$$u = \frac{dx_2}{dl}\delta l, \qquad v = \frac{dy_2}{dl}\delta l, \qquad w = \frac{dz_2}{dl}\delta l.$$

Laissons immobile le reste du liquide.

Le travail des forces extérieures, donné par les égalités (12) et (13), se réduit à

$$d\mathfrak{E}_e = -\Omega\,\delta l \int_l \rho(s)\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right) dl,$$

l'intégration s'étendant à la directrice de la surface canal, c'est-à-dire à une ligne fermée quelconque tracée au sein du liquide.

La concentration de chaque élément de volume et, partant, son volume, demeurant invariables, les égalités (16) et (17) donnent

$$A = 0, \qquad B = 0.$$

Enfin, l'égalité (22) devient

$$C = \frac{1}{2}\Omega\, dl \int_l \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \left[\frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right] dl.$$

La modification est d'ailleurs renversable; la condition (23) devient donc

$$\begin{aligned} \int_l \Bigg(& \left\{\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2} + 2\rho(s)\frac{\partial V}{\partial x_2}\right\}\frac{dx_2}{dl} \\ & + \left\{\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2} + 2\rho(s)\frac{\partial V}{\partial y_2}\right\}\frac{dy_2}{dl} \\ & + \left\{\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2} + 2\rho(s)\frac{\partial V}{\partial z_2}\right\}\frac{dz_2}{dl}\Bigg) dl = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit la forme de la courbe fermée l tracée à l'intérieur du liquide à laquelle s'étend l'intégration.

D'après la théorie des intégrales curvilignes, cette condition équivaut à la proposition suivante :

Il existe une fonction $\Pi(x, y, z)$ finie, continue et uniforme à l'intérieur du fluide, telle que l'on ait, en tout point du fluide,

$$(24) \quad \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}} d\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} ds + \rho(s)\, dV = d\Pi.$$

Ce premier résultat obtenu, considérons de nouveau une surface canal infiniment déliée, mais aboutissant par ses deux extrémités M et M' à la surface déformable du fluide sur laquelle elle découpe deux éléments ω et ω'. Imposons au fluide que renferme ce canal un écoulement δl allant de M vers M', écoulement soumis aux mêmes restrictions que le précédent.

Pour l'élément ω, la quantité

$$P[u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)]\, d\omega$$

a la valeur

$$P\omega\, \delta l \cos(\delta l, N_i) = P\Omega\, dl.$$

Pour l'élément ω', cette même quantité a pour valeur

$$P'\omega'\, \delta l \cos(\delta l, N'_i) = -P'\Omega\, \delta l.$$

Par conséquent, d'après les égalités (12) et (13), on a

$$d\mathfrak{E}'_e + d\mathfrak{E}''_e = \left[P - P' - \int_M^{M'} \rho(s)\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right) dl\right] \Omega\, \delta l.$$

Les égalités (16) et (17) donnent encore, comme dans le cas précédent,

$$A = 0, \qquad B = 0.$$

Enfin l'égalité (22) devient

$$C = \left\{ \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}'^2}{2F(\mathfrak{M}', s')} + \frac{1}{2}\int_M^{M'} \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \left[\frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right] dl \right\} \Omega\, \delta l.$$

La modification virtuelle imposée au fluide est encore une modifica-

tion renversable, en sorte que la condition (23) devient

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - P - \frac{\mathfrak{M}'^2}{2F(\mathfrak{M}', s')} + P'$$
$$+ \frac{1}{2}\int_M^{M'} \left(\left\{ \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\} \frac{dx_2}{dl} \right.$$
$$+ \left\{ \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial y_2} \right\} \frac{dy_2}{dl}$$
$$\left. + \left\{ \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial z_2} \right\} \frac{dz_2}{dl} \right) dl = 0$$

ou bien, d'après l'égalité (24),

$$(25) \qquad P + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} = P' + \Pi' - \frac{\mathfrak{M}'^2}{2F(\mathfrak{M}', s')}.$$

D'où cette nouvelle proposition :

La quantité

$$P + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}$$

a la même valeur en tout point de la surface déformable du fluide, ce qu'exprime l'égalité

$$(26) \qquad P + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} = K.$$

Les conditions d'équilibre (24) et (26), que nous venons d'obtenir, ont été déduites de l'étude de modifications renversables ; considérons maintenant une modification non renversable définie de la manière suivante :

Une surface canal, de section Ω, part d'un point M pris à l'intérieur du fluide pour aboutir à un point M_1 de sa surface déformable; cette surface limite un canal infiniment délié; à chaque élément $dv_2 = \Omega\, dl$ de ce canal, on impose un écoulement δl de M vers M_1, de manière qu'une cavité, de volume $\Omega\, \delta l$, vient se creuser autour du point M.

Dans ces conditions, les égalités (12) et (13) donneront

$$d\mathfrak{G}'_e + d\mathfrak{G}''_e = -\left[P_1 + \int_M^{M_1} \rho(s) \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl} \right) dl \right] \Omega\, dl,$$

P_1 étant la pression au point M_1 de la surface déformable.

Les égalités (16) et (17) donnent encore, comme dans le cas précédent,

$$A = 0, \qquad B = 0.$$

Pour déduire C de l'égalité (22), on doit remarquer que la surface de la cavité qui s'est creusée dans l'intérieur du fluide doit être regardée comme faisant partie de sa surface déformable; soit ϖ un élément de cette surface, et cherchons la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2} \mathrm{S} \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \, d\varpi,$$

étendue aux éléments de cette surface; N_i représente la normale vers l'intérieur du liquide et par conséquent vers l'extérieur de la cavité.

La cavité étant infiniment petite, $\dfrac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}$ a sensiblement la même valeur en tous les points de sa surface. La quantité précédente peut donc s'écrire

$$\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} \mathrm{S} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \, d\varpi.$$

D'ailleurs,

$$\mathrm{S} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \, d\varpi$$

représente l'accroissement du volume enfermé dans la cavité; cette cavité ayant pour volume initial 0 et pour volume final $\Omega \, \delta l$, on voit que l'on a

$$\frac{1}{2} \mathrm{S} \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \, d\varpi = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} \Omega \, \delta l.$$

L'égalité (22) donne donc, dans le cas actuel,

$$C = \left\{ \frac{\mathfrak{M}^2}{2 F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2 F(\mathfrak{M}_1, s_1)} + \frac{1}{2} \int_{M}^{M_1} \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \left[\frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dl} \right] dl \right\} \Omega \, \delta l.$$

La condition (23) devient donc

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} + P_1$$
$$+ \int_M^{M_1} \Bigg(\left\{ \rho(s)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2} \right\} \frac{dx_2}{dl}$$
$$+ \left\{ \rho(s)\frac{\partial V}{\partial y_2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2} \right\} \frac{dy_2}{dl}$$
$$+ \left\{ \rho(s)\frac{\partial V}{\partial z_2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2} \right\} \frac{dz_2}{dl} \Bigg) dl \geqq 0,$$

ou bien, d'après l'égalité (24),

$$P_1 + \Pi_1 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} \geqq \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}. \tag{27}$$

L'égalité (26) permet de transformer cette inégalité en

$$K \geqq \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}. \tag{28}$$

La constante K *ne peut être inférieure à la plus grande des valeurs prises, à l'intérieur de la masse fluide, par la quantité* $\Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}$.

Si nous supposons le point M infiniment voisin du point M_1, l'inégalité (27) devient

$$P_1 \geqq 0 \tag{29}$$

et nous fournit le théorème suivant :

Si la pression n'est pas nulle en un point de la surface déformable du fluide, elle est positive, c'est-à-dire dirigée vers l'intérieur du fluide.

L'inégalité (28) peut s'énoncer autrement. A chaque point M intérieur au fluide correspond une quantité p déterminée par l'égalité

$$p = K - \Pi + \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}. \tag{30}$$

Sans attacher à cette quantité aucun sens mécanique particulier, nous l'appellerons *pression au point* M *intérieur au fluide aimanté.*

L'inégalité (28) fournit alors l'énoncé suivant :

La pression à l'intérieur d'un fluide aimanté n'est jamais une quantité négative.

§ IV. — Conditions d'équilibre d'une dissolution magnétique (suite). Variations de la concentration.

Les conditions d'équilibre obtenues jusqu'ici résultent de l'examen de modifications virtuelles dans lesquelles la concentration de chaque élément de volume de la dissolution a été maintenue invariable; ces conditions s'imposent donc même à un liquide dont chaque élément aurait une constitution invariable : ce sont à proprement parler les conditions *hydrostatiques* de l'équilibre de la dissolution.

Nous allons maintenant examiner une modification dans laquelle la concentration des diverses parties du liquide ne soit pas maintenue invariable; l'étude de cette modification nous fournira de nouvelles conditions d'équilibre.

Considérons une déformation renversable quelconque de la dissolution, déformation accompagnée de variations quelconques dans la concentration des différentes parties. On doit avoir, d'après les égalités (10) et (14),

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - d\mathfrak{T}'_e - d\mathfrak{T}''_e = 0.$$

Si l'on tient compte des égalités (12), (13), (16), (17) et (22) d'une part, et de la condition (24) d'autre part, cette égalité devient

$$\begin{aligned}
&\int\left[\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + \mathrm{V}\frac{d\rho(s)}{ds}\right]\delta s\, dv_2 \\
&+\int\left[\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + \mathrm{V}\frac{d\rho(s)}{ds}\right]\left(\frac{\partial s}{\partial x}u + \frac{\partial s}{\partial y}v + \frac{\partial s}{\partial z}w\right)dv_2 \\
&+\int\left[\Phi(s) \quad + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) \quad + \mathrm{V}\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2 \\
&- \mathbf{S}\,\mathrm{P}[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\omega \\
&+ \frac{1}{2}\mathbf{S}\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\omega \\
&\qquad\qquad + \int\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}u + \frac{\partial \Pi}{\partial y}v + \frac{\partial \Pi}{\partial z}w\right)dv_2 = 0.
\end{aligned}$$

Une intégration par parties, jointe à cette remarque que

$$\mathrm{P} + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}$$

a la même valeur K en tout point de la surface déformable du fluide, permet d'écrire cette égalité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\int\left[\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + \mathrm{V}\frac{d\rho(s)}{ds}\right]\left(\delta s + \frac{\partial s}{\partial x}u + \frac{\partial s}{\partial y}v + \frac{\partial s}{\partial z}w\right)dv_2 \\
&+\int\left[\Phi(s) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) + \mathrm{V}\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)} - \Pi\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2 \\
&\qquad - \mathrm{K}\,\mathbf{S}\,[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\omega = 0.
\end{aligned}$$

Mais, d'autre part,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}\,[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\omega \\
&\qquad = -\int\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2.
\end{aligned}$$

L'égalité précédente devient donc

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int\left[\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + \mathrm{V}\frac{d\rho(s)}{ds}\right]\left(\delta s + \frac{\partial s}{\partial x_2}u + \frac{\partial s}{\partial y_2}v + \frac{\partial s}{\partial z_2}w\right)dv_2 \\
&+\int\left[\Phi(s) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) + \mathrm{V}\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)} - \Pi + \mathrm{K}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

L'élément dv_2, dont un point a pour coordonnées x_2, y_2, z_2, au début de la modification, renferme, au début de cette modification, une masse de dissolvant

$$d\mu = \frac{1}{1+s}\rho(s)\,dv_2.$$

L'élément qui renferme la même masse $d\mu$ de dissolvant a, à la fin de la modification, un volume $(dv_2 + \delta\,dv_2)$; le point de cet élément, qui avait pour coordonnées x_2, y_2, z_2, a maintenant pour coordonnées $x_2 + u$, $y_2 + v$, $z_2 + w$. La concentration de la dissolution que renferme cet élément a augmenté de

$$\delta s + \frac{\partial s}{\partial x_2}u + \frac{\partial s}{\partial y_2}v + \frac{\partial s}{\partial z_2}w.$$

La masse de dissolvant que renferme cet élément étant demeurée invariable, on doit avoir

$$(32)\quad \frac{d}{ds}\left[\frac{\rho(s)}{1+s}\right]\left(\delta s+\frac{\partial s}{\partial x_2}u+\frac{\partial s}{\partial y_2}v+\frac{\partial s}{\partial z_2}w\right)dv_2+\frac{\rho(s)}{1+s}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial y_2}+\frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2=0,$$

ce qui donne à la relation (33) la forme

$$(33)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\Big\{\frac{d\,\Phi(s)}{ds}+\frac{\partial\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M},s)}{\partial s}+\mathrm{V}\frac{d\,\rho(s)}{ds} \\ \displaystyle\quad -\frac{d}{ds}\log\frac{\rho(s)}{1+s}\left[\Phi(s)+\mathfrak{F}(\mathfrak{M},s)+\mathrm{V}\rho(s)-\frac{\mathfrak{M}^2}{2\,\mathrm{F}(\mathfrak{M},s)}-\Pi+\mathrm{K}\right]\Big\}\Delta s\,dv_2=0, \end{cases}$$

en désignant, pour abréger, par Δs la quantité

$$\delta s+\frac{\partial s}{\partial x_2}u+\frac{\partial s}{\partial y_2}v+\frac{\partial s}{\partial z_2}w.$$

L'égalité (32) entraîne cette conséquence, à laquelle la modification considérée doit nécessairement satisfaire, que la masse du dissolvant doit demeurer invariable. Il doit en être de même de la masse du sel dissous, ou, en d'autres termes, de la masse totale de la dissolution.

Celle-ci a pour valeur

$$\int\rho(s)\,dv_2.$$

On doit donc avoir

$$\int\frac{d\rho(s)}{ds}\left[\delta s+\frac{\partial s}{\partial x_2}u+\frac{\partial s}{\partial y_2}v+\frac{\partial s}{\partial z_2}w\right]dv_2+\int\rho(s)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial y_2}+\frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2=0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (32),

$$(34)\quad \int\left[\frac{d\rho(s)}{ds}-(1+s)\frac{d}{ds}\frac{\rho(s)}{1+s}\right]\Delta s\,dv_2=0.$$

L'égalité (33) doit avoir lieu, non pas quelles que soient les quantités Δs, mais pour tous les systèmes de valeurs de Δs qui vérifient l'égalité (34). Dès lors, d'après un principe connu du calcul des va-

riations, il doit exister une constante λ, telle que l'on ait

$$\int \left\{ \frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V \frac{d\rho(s)}{ds} - \frac{d}{ds} \log \frac{\rho(s)}{1+s} \left[\Phi(s) + \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s) + V\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \Pi + K \right] \right\} \Delta s \, dv_2 - \lambda \int \left[\frac{d\rho(s)}{ds} - (1+s) \frac{d}{ds} \frac{\rho(s)}{1+s} \right] \Delta s \, dv_2 = 0.$$

quelles que soient les quantités Δs.

En d'autres termes, il existe une constante λ, telle que l'on ait, en tout point de la dissolution,

$$\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + (V - \lambda) \frac{d\rho(s)}{ds} - \frac{d}{ds} \log \frac{\rho(s)}{1+s} \left[\Phi(s) + \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s) + (V - \lambda)\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \Pi + K \right] = 0.$$

Désignons par $v(s)$ le volume spécifique de la dissolution de concentration s. Nous aurons

$$\rho(s) = \frac{1}{v(s)},$$

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = -\frac{1}{[v(s)]^2} \frac{dv(s)}{ds},$$

$$-\frac{d}{ds} \log \frac{\rho(s)}{1+s} = \frac{d}{ds} \log[(1+s)v(s)],$$

et l'égalité précédente s'écrira

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \{ (1+s)[\Phi(s) + \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)] v(s) \} \\ & \quad + \frac{d}{ds} [(1+s)v(s)] \left[K - \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} \right] + V - \lambda = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité peut encore se transformer.

Désignons par p, comme dans l'égalité (30), la quantité

$$K - \Pi + \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)};$$

posons, en outre,

$$\varphi(s, p) = [\Phi(s) + p] v(s).$$

La quantité $\varphi(s, p)$ ainsi déterminée sera *le potentiel thermodynamique de l'unité de masse d'une dissolution homogène, de concentration s, soumise à la pression uniforme et constante p.*

L'égalité (35) pourra alors s'écrire

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}[(1+s)\varphi(s,p)] + \frac{\partial}{\partial s}[(1+s)\mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)\,v(s)] \\ &\qquad - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\frac{d}{ds}[(1+s)\,v(s)] + V - \lambda = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour faire disparaître la constante λ, prenons la différentielle totale des deux membres de cette équation. Nous aurons

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\varphi(s,p)]\,ds + \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial p}[(1+s)\varphi(s,p)]\,dp \\ &\quad + d\frac{\partial}{\partial s}[(1+s)\mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)\,v(s)] - d\left\{\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\frac{d}{ds}[(1+s)\,v(s)]\right\} + dV = 0 \end{aligned}\right.$$

Une propriété connue du potentiel thermodynamique donne

$$\frac{\partial}{\partial p}\varphi(s,p) = v(s).$$

D'ailleurs, on déduit de l'égalité (30)

$$dp = -d\Pi + \frac{1}{2}d\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}$$

ou bien, en tenant compte de l'égalité (24),

$$\begin{aligned} dp &= -\frac{1}{v(s)}dV + \frac{1}{2}d\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 dF(\mathfrak{M}, s), \\ &= -\frac{1}{v(s)}dV + d\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}d\mathfrak{M}. \end{aligned}$$

De là, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial p}[(1+s)\varphi(s,p)]\,dp = &-\frac{1}{v(s)}\frac{d}{ds}[(1+s)\,v(s)]\,dV \\ &+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{(1+s)\,v(s)\left[d\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}d\mathfrak{M}\right]\right\}, \end{aligned}$$

si l'on observe que, d'après l'égalité (2),

$$\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} = \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}},$$

et que, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[(1+s)\,v(s)\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right] d\mathfrak{M} = \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial \mathfrak{M}}\left[(1+s)\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\,v(s)\right] d\mathfrak{M},$$

on voit que l'égalité (37) se réduira à la forme suivante :

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s, p)]\,ds - (1+s)]\,\frac{d}{ds}\log v(s)\,dV \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\,v(s)]\,ds - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\frac{d^2}{ds^2}(1+s)\,v(s)\,ds \\ &\quad + (1+s)\,v(s)\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}ds + \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}d\mathfrak{M}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'égalité fondamentale qui lie les trois variations ds, $d\mathfrak{M}$, dV correspondant à un même déplacement infiniment petit (dx, dy, dz) à l'intérieur du liquide.

§ V. — Dissolution soustraite à l'action du magnétisme.

Voyons, en particulier, ce que devient cette relation dans le cas où la dissolution est soustraite à l'action de tout aimant permanent; dans ce cas, la dissolution se désaimante; on a

$$\mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) = 0,$$

et l'égalité précédente devient

$$(39)\qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s, p)]\,ds = (1+s)\,\frac{d}{ds}\log v(s)\,dV.$$

Dans un travail précédent [1], nous avons appliqué la théorie du

---

[1] P. Duhem, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions* (*Journal de Physique pure et appliquée*, 2e série, t. VII; 1888).

potentiel thermodynamique à l'étude de l'influence que la pesanteur exerce sur la concentration des dissolutions salines; cette question avait, auparavant, fait l'objet des travaux de MM. Gouy et Chaperon [1]. Les lois de la concentration des dissolutions par la pesanteur sont comprises dans une égalité fondamentale [2] qui n'est qu'une forme particulière de l'égalité (39).

La méthode suivie dans notre Mémoire, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions*, permet de discuter l'égalité (39). Cette méthode montre, en effet, que l'on a, en toutes circonstances,

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\varphi(s,p)] > 0.$$

Si la densité de la dissolution croît avec la concentration, on a

$$\frac{d}{ds}\log\varphi(s) < 0;$$

si, au contraire, la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît, on a

$$\frac{d}{ds}\log\varphi(s) > 0,$$

On arrive donc aux conclusions suivantes :

Si la densité de la dissolution croît avec la concentration, on a

$$\frac{ds}{dV} < 0;$$

si, au contraire, la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît, on a

$$\frac{ds}{dV} > 0.$$

---

(1) GOUY et G. CHAPERON, *L'équilibre osmotique et la concentration des dissolutions par la pesanteur* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CV, p. 117; 1887). — *Sur la concentration des dissolutions par la pesanteur* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XII, p. 384; 1887). — *Sur l'équilibre osmotique* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XIII, p. 120; 1888).

(2) *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions*, équation (32).

Ces inégalités peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Dans le cas où la densité d'une dissolution croît avec la concentration de cette dissolution, la concentration décroît d'un point à l'autre de la dissolution si la fonction potentielle des forces extérieures qui agissent sur la dissolution croît lorsqu'on passe du premier point au suivant. L'inverse a lieu dans le cas où la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît.

On retrouve ainsi, sous une forme générale, les résultats dont MM. Gouy et Chaperon ont donné les premiers une démonstration théorique.

§ VI. — Dissolution soumise à l'action d'aimants permanents.

Pour discuter les propriétés d'une dissolution soumise à l'action d'aimants permanents, il faut nécessairement particulariser la forme des fonctions $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)$, $F(\mathfrak{M}, s)$. Nous admettrons qu'il s'agit de la dissolution d'un sel magnétique dans un liquide non magnétique, et que l'on a, comme aux égalités (4) et (7),

$$F(\mathfrak{M}, s) = Ks,$$

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2Ks}.$$

Dans ces conditions, nous aurons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\,v(s)] \\
&\quad = \frac{\mathfrak{M}^2}{2K}\left\{\frac{1}{s}\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)] - \frac{2}{s^2}\frac{d}{ds}[(1+s)\,v(s)] + \frac{2}{s^3}(1+s)\,v(s)\right\},
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)] = \frac{\mathfrak{M}^2}{Ks}\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)],$$

$$(1+s)\,v(s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} = \frac{2\mathfrak{M}^2}{Ks^3}(1+s)\,v(s),$$

$$(1+s)\,v(s)\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} = -\frac{2\mathfrak{M}}{Ks^2}(1+s)\,v(s),$$

et l'égalité (38) deviendra, toute réduction faite,

$$(40)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\varphi(s,p)] + \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{K}s^3}\left\{ 3(1+s)\, v(s) + s\frac{d}{ds}[(1+s)\, v(s)] - 2s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\, v(s)]\right\} \right) ds \\ &\qquad - (1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)\, d\mathrm{V} - 2(1+s)\, v(s)\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{K}s^2}\, d\mathfrak{M} = 0. \end{aligned} \right.$$

Dans cette égalité, nous connaissons le signe de la quantité

$$-(1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)$$

qui sert de coefficient à $d\mathrm{V}$. Cette quantité est positive si la densité de la dissolution croît avec la concentration, et négative dans le cas contraire.

La quantité

$$-2(1+s)\, v(s)\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{K}s},$$

qui sert de coefficient à $d\mathfrak{M}$, est essentiellement négative.

Le coefficient de ds renferme un terme, le terme en $\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{K}s^3}$, dont le signe est plus difficile à préciser d'une manière entièrement générale; toutefois, pour les concentrations très faibles, ce terme peut être réduit à

$$3(1+s)\, v(s)\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{K}s^3}$$

et est alors essentiellement positif. Il en est évidemment de même tant que la concentration ne surpasse pas une certaine limite au-dessous de laquelle nous la supposerons toujours comprise. Dans ces conditions, le coefficient de ds est assurément positif.

Si donc nous écrivons ds sous la forme suivante

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \mathfrak{M}}\, d\mathfrak{M} + \frac{\partial s}{\partial \mathrm{V}}\, d\mathrm{V},$$

nous voyons que $\frac{\partial s}{\partial \mathfrak{M}}$ est essentiellement positif, tandis que $\frac{\partial s}{\partial \mathrm{V}}$ est négatif si la densité de la dissolution croît avec la concentration, et po-

sitif si la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît.

Supposons la dissolution soustraite à l'action des forces extérieures; dans ce cas, nous pourrions énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'on soumet à l'action d'aimants permanents une dissolution d'un sel magnétique dans un dissolvant non magnétique, la concentration varie d'un point à l'autre de la dissolution; elle est d'autant plus forte en un point que l'aimantation est plus forte en ce point; les surfaces d'égale aimantation sont identiques aux surfaces d'égale concentration.

Nous pouvons encore transformer l'égalité (40) d'une autre manière.

A la température absolue T, où nous supposons porté le système que nous étudions, une dissolution de concentration s, soustraite à l'action d'aimants permanents, émet de la vapeur d'eau et cette vapeur est saturée quand sa tension atteint une certaine valeur ϖ. Nous pouvons écrire

$$(1+s)\,\varphi(s,p) = (1+s)\,\varphi(s,\varpi) + (1+s)\int_{\varpi}^{p} \frac{\partial\varphi(s,p)}{\partial p}\,dp.$$

Si l'on observe que, conformément à une propriété déjà invoquée du potentiel thermodynamique, on a

$$\frac{\partial\varphi(s,p)}{\partial p} = v(s),$$

on voit que l'on peut écrire

$$(41)\qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s,p)] = \frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s,\varpi)] + \frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)]\,(p-\varpi).$$

L'égalité (30) donne

$$p = \mathrm{K} - \Pi + \frac{\mathfrak{M}^2}{2\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}.$$

Considérons dans le fluide un certain point o où Π a la valeur Π_0, s la valeur s_0 et $\mathfrak{M}$ la valeur $\mathfrak{M}_0$. Pour un point quelconque M du fluide, on aura

$$\Pi = \Pi_0 + \int_0^{\mathrm{M}} d\Pi.$$

Si le point o est à la surface libre du fluide, on a, d'après l'égalité (26),

$$\Pi_0 = K - P_0 + \frac{\mathfrak{M}_0^2}{2\,F(\mathfrak{M}_0, s_0)},$$

P_0 étant la pression extérieure au point o. L'égalité (24) donne d'ailleurs

$$d\Pi = \rho(s)\,dV + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 d\,F(\mathfrak{M}, s).$$

On a donc

$$(42) \quad p = P_0 + \frac{\mathfrak{M}^2}{2\,F(\mathfrak{M}, s)} + \frac{\mathfrak{M}_0^2}{2\,F(\mathfrak{M}_0, s_0)} - \int_0^M \frac{1}{v(s)}\,dV - \frac{1}{2}\int_0^M \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 d\,F(\mathfrak{M}, s).$$

Les égalités (41) et (42) donnent

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s, p)]$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s, \varpi)] + \frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)]\left[P_0 - \varpi + \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}_0^2}{F(\mathfrak{M}_0, s_0)} - \int_0^M \frac{1}{v(s)}\,dv - \int_0^M \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\,d\mathfrak{M}\right].$$

Reportons cette valeur dans l'égalité (40), après avoir remplacé $F(\mathfrak{M}, s)$ par Ks, et nous arriverons à l'égalité suivante :

$$(43) \quad \left\{\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s, \varpi)] \\ &\quad + \frac{\mathfrak{M}^2}{Ks^3}\Big\{3(1+s)\,v(s) - s\frac{d}{ds}[(1+s)\,v(s)] - s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)]\Big\} \\ &\quad + \frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)]\left[P_0 - \varpi - \frac{\mathfrak{M}_0^2}{Ks_0} - \int_0^M \frac{1}{v(s)}\,dV - \int_0^M \frac{\mathfrak{M}}{Ks}\,d\mathfrak{M}\right]\Big)ds \\ &\qquad - (1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)\,dV - 2(1+s)\,v(s)\frac{\mathfrak{M}}{Ks^2}\,d\mathfrak{M} = 0. \end{aligned}\right.$$

Soit J l'intensité du champ créé par les aimants permanents. Au degré d'approximation adopté en écrivant les équations (5), on a

$$\mathfrak{M}^2 = K^2 s^2 J^2,$$
$$\mathfrak{M}\,d\mathfrak{M} = K^2(s^2 J\,dJ + J^2 s\,ds).$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (43) devient

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\varphi(s,\varpi)\right. \\ &\quad + \frac{kJ^2}{s}\left\{(1+s)v(s) - s\frac{d}{ds}[(1+s)v(s)] - s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)v(s)]\right\} \\ &\quad \left.+ \frac{d^2}{ds^2}[(1+s)v(s)]\left[P_0 - \varpi - Ks_0J_0 - \int_0^M \frac{1}{v(s)}dV - K\int_0^M (sJ\,dJ + J^2\,ds)\right]\right)ds \\ &\qquad\qquad - (1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)\,dV - 2(1+s)v(s)KJ\,dJ = 0. \end{aligned}\right.$$

Faisons enfin subir à cette égalité une dernière transformation.

A la température T, que nous considérons, sous la pression ϖ, l'unité de masse de vapeur d'eau a un volume $U(\varpi)$.

D'après des relations que nous avons démontrées autre part ([1]), on a

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\varphi(s,\varpi)] = -\frac{1}{s}\left[U(\varpi) - v(s) + s(1+s)\frac{dv(s)}{ds}\right]\frac{d\varpi}{ds}.$$

Cette relation transforme l'égalité (44) en la suivante :

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(U(\varpi)\frac{d\varpi}{ds} - \left[v(s) - s(1+s)\frac{dv(s)}{ds}\right]\frac{d\varpi}{ds}\right. \\ &\quad - KJ^2\left\{(1+s)v(s) - s\frac{d}{ds}[(1+s)v(s)] - s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)v(s)]\right\} \\ &\quad \left.- s\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)v(s)]\left[P_0 - \varpi - KJs_0^2 - \int_0^M \frac{dV}{v(s)} - K\int_0^M (sJ\,dJ + J^2\,ds)\right]\right)ds \\ &\qquad\qquad + s(1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)\,dV + 2s(1+s)v(s)KJ\,dJ = 0. \end{aligned}\right.$$

Aux températures ordinaires, le volume spécifique $v(s)$ de la dissolution est très petit en comparaison du volume spécifique $U(\varpi)$ de la vapeur saturée. On peut négliger le premier en présence du second. On peut de même négliger, en présence de $U(\varpi)$, les quantités

$$s\frac{d}{ds}[(1+s)v(s)],\quad s\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)v(s)],$$
$$s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)v(s)],\quad v(s) - s(1+s)\frac{dv(s)}{ds}.$$

---

[1] P. DUHEM, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions* [égalités (38) et (47)]. (*Journal de Physique*, 2e série, t. VII; 1888.)

On peut donc réduire approximativement l'égalité (45) à la forme suivante :

$$(46) \quad U(\varpi)\frac{d\varpi}{ds} + s(1+s)\frac{d\log v(s)}{ds}dV + 2s(1+s)\,v(s)\,KJ\,dJ = 0.$$

Les lois de Mariotte et de Gay-Lussac peuvent être appliquées à la vapeur d'eau au degré d'approximation dont nous nous contentons ici ; si donc nous désignons par ψ le poids moléculaire de l'eau, par R une constante qui est la même pour tous les gaz, nous aurons

$$U(\varpi) = \frac{RT}{\psi\varpi},$$

et l'égalité (46) deviendra

$$(47) \quad \frac{RT}{\psi}\frac{d}{ds}\log\varpi\,ds + s(1+s)\frac{d\log v(s)}{ds}dV + 2s(1+s)\,v(s)\,KJ\,dJ = 0.$$

Toutes les quantités qui figurent dans cette égalité (47) sont des quantités mesurables.

Supposons que les seules forces extérieures auxquelles la dissolution est soumise soient les actions de la pesanteur; nous aurons alors

$$V = gz,$$

en désignant par g l'intensité de la pesanteur, et par z la cote du point considéré au-dessus d'un plan horizontal arbitraire.

Étudions les variations de la concentration aux divers points d'un plan horizontal tracé à l'intérieur de la dissolution. Ces variations seront données par l'égalité

$$\frac{RT}{\psi}\frac{d}{ds}\log\varpi\,ds + s(1+s)\,v(s)\,K\,d(J^2) = 0.$$

Les points où la concentration a une même valeur formeront, sur le plan horizontal en question, une ligne le long de laquelle l'intensité du champ aura aussi une valeur constante. Ainsi, *sur un plan horizontal, les lignes d'égale concentration marquent l'intersection de ce plan par les surfaces isodynamiques du champ. La concentration croît avec l'intensité du champ.*

Si l'on place sur les pôles d'un aimant une cuve plate remplie d'une dissolution d'un sel magnétique coloré, on pourra, par les variations

de la teinte, se rendre compte des variations de la concentration. Les lignes d'égale teinte dessineront l'intersection du fond de la cuve avec les surfaces isodynamiques.

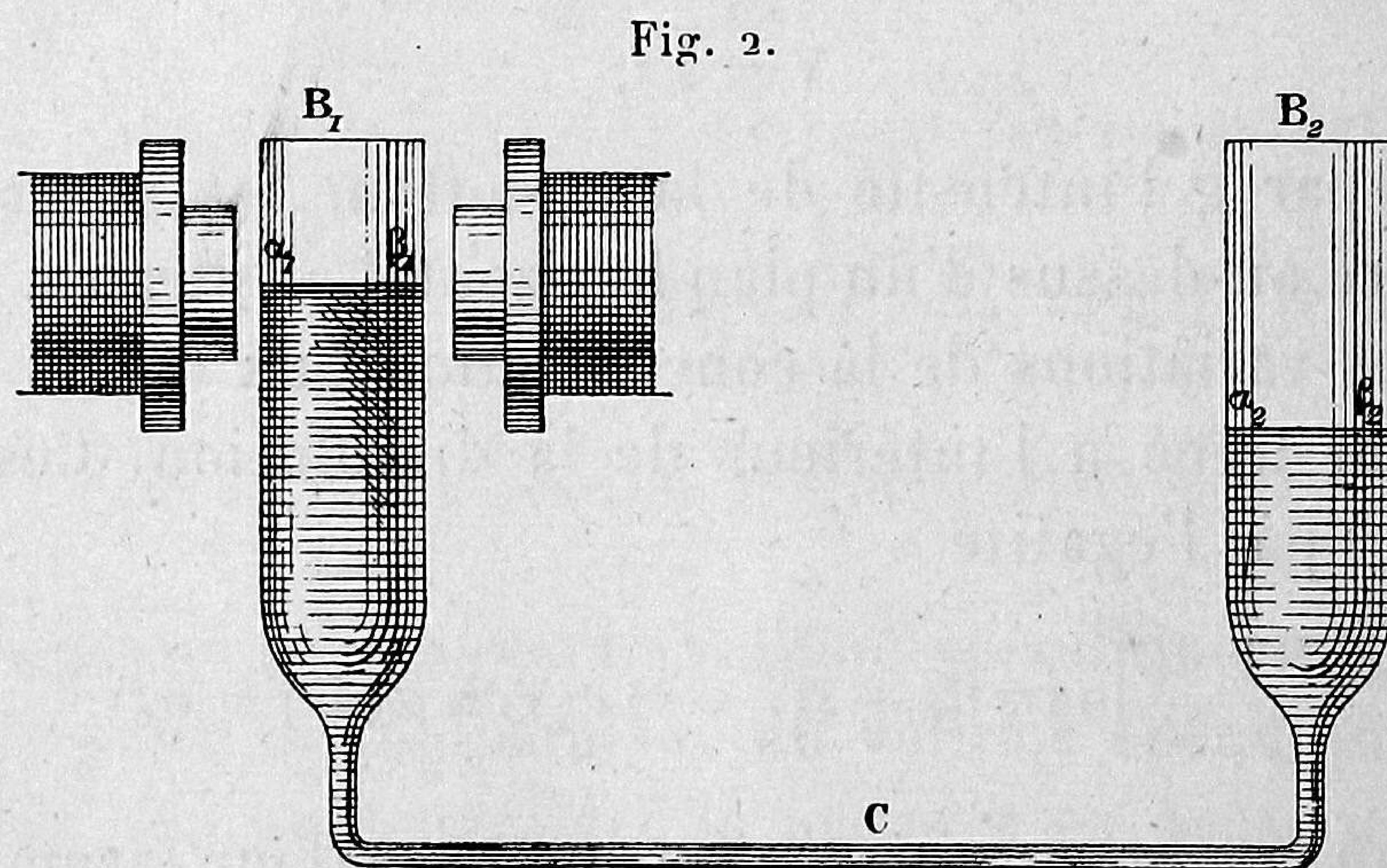
C'est à cet ordre de phénomènes que l'on doit rattacher quelques observations de M. Colardeau (1). Ces phénomènes jouent certainement un rôle dans l'explication des faits curieux observés par M. Ira Remsen, faits qui ne paraissent pas devoir s'expliquer uniquement par les raisons que nous avons données dans notre *Théorie de l'aimantation par influence*.

§ VII. — Quelques conséquences expérimentales.

La théorie précédente conduit à quelques conséquences qui ont une certaine importance au point de vue de la Physique expérimentale et que nous nous proposons de mettre en évidence dans ce dernier paragraphe.

Imaginons un vase formé de deux branches verticales B_1, B_2 (*fig.* 2), reliées l'une à l'autre par un tube de communication horizontal C.

Fig. 2.



La branche B_1 est placée entre les deux pôles d'un électro-aimant puissant, tandis que la branche B_2, fort éloignée de ces deux pôles, se trouve dans une région où le champ magnétique a une intensité négligeable.

---

(1) E. Colardeau, *Journal de Physique*, 2e série, t. VI; 1887.

Le tube est rempli d'une dissolution formée par un sel magnétique ; cette dissolution est soumise à la pression atmosphérique. D'après ce qui précède, elle sera plus concentrée dans la branche B_1 que dans la branche B_2. Le niveau ne sera pas forcément le même dans la branche B_1 que dans la branche B_2.

Soient

$\alpha_1\beta_1$ le niveau du liquide dans la branche B_1 ;
$\alpha_2\beta_2$ le niveau du liquide dans la branche B_2 ;
Z_1 la distance du premier niveau à un plan horizontal arbitraire;
Z_2 la distance du second niveau à ce même plan horizontal ;
s_1 la concentration au premier niveau ;
s_2 la concentration au second niveau ;
$\mathfrak{M}_1$ l'intensité de l'aimantation en un point du premier niveau ;
P la pression extérieure.

Supposons que la force extérieure appliquée aux éléments du liquide soit la pesanteur, dont l'intensité est g.

Soient m_1 un point du premier niveau, et m_2 un point du second; relions ces deux points par un chemin m_2m_1 situé en entier au sein de la dissolution.

L'égalité (26), appliquée au point m_1, donne

$$P + \Pi_1 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = K.$$

La même égalité, appliquée au point m_2, donne

$$P + \Pi_2 = K.$$

On a donc

$$\Pi_1 - \Pi_2 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = 0$$

ou

$$\int_{m_2}^{m_1} d\Pi - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = 0.$$

D'autre part, l'égalité (24) donne

$$d\Pi = \frac{1}{\varphi(s)} dV + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 dF(\mathfrak{M}, s).$$

On a donc

$$\int_{m_2}^{m_1} \frac{1}{v(s)} dV + \frac{1}{2}\int_{m_2}^{m_1} \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 d\,F(\mathfrak{M}, s) - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2\,F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = 0.$$

Une intégration par parties transforme cette égalité en

$$(48) \qquad \int_{m_2}^{m_1} \frac{1}{v(s)} dV = \frac{1}{2}\int_{m_2}^{m_1} F(\mathfrak{M}, s)\, d\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2.$$

Dans le cas où, comme nous l'avons supposé, les seules forces agissantes sont la pesanteur, cette égalité devient

$$(49) \qquad g\int_{m_2}^{m_1} \frac{dz}{v(s)} = \frac{1}{2}\int_{m_2}^{m_1} F(\mathfrak{M}, s)\, d\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2.$$

Au degré d'approximation employé dans les formules précédentes, on a

$$F(\mathfrak{M}, s) = Ks,$$

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{[F(\mathfrak{M}, s)]^2} = J^2.$$

L'égalité (49) devient alors

$$(50) \qquad g\int_{m_2}^{m_1} \frac{dz}{v(s)} = \frac{K}{2}\int_{m_2}^{m_1} s\, dJ^2.$$

Cette égalité peut encore se transformer par une nouvelle approximation. Soit

$$\Sigma = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

la concentration moyenne dans l'appareil. Si les différences de concentration sont faibles entre les deux branches, on pourra remplacer l'égalité précédente par

$$(51) \qquad \frac{g}{v(\Sigma)}(Z_1 - Z_2) = \frac{K\Sigma}{2} J_1^2,$$

Cette égalité nous montre que *le liquide sera plus élevé dans la branche* B_1 *que dans la branche* B_2; *la mesure de la dénivellation, jointe à la mesure du champ magnétique, conduit à une détermination approchée de la constante* K, *semblable à celle que Quincke a employée pour déterminer le coefficient d'aimantation des liquides homogènes*.

L'égalité (47) peut s'écrire

$$(52)\qquad \frac{RT}{2\psi}\frac{1}{(1+s)\,v(s)}\frac{d}{ds}\log\varpi\, ds - \frac{s}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{v(s)}\,dV + \frac{K}{2}s\,dJ^2 = 0.$$

Elle peut aussi s'écrire

$$(53)\qquad \frac{RT}{\psi}\frac{1}{s(1+s)\dfrac{d\,v(s)}{ds}}\frac{d}{ds}\log\varpi\, ds + \frac{dV}{v(s)} + \frac{K}{\dfrac{d}{ds}\log v(s)}\,dJ^2 = 0.$$

Remplaçons dV par $g\,dz$.

Comparons les égalités (50) et (52); nous trouverons

$$(54)\qquad \frac{RT}{2\psi}\int_{s_2}^{s_1}\frac{1}{(1+s)\,v(s)}\frac{d}{ds}\log\varpi\, ds = -g\int_{m_2}^{m_1}\left[\frac{1}{v(s)} - \frac{s}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{v(s)}\right]dz.$$

Si la concentration diffère peu dans les deux branches, cette égalité pourra s'écrire approximativement

$$(55)\qquad \frac{RT}{2\psi}\frac{1}{(1+\Sigma)\,v(\Sigma)}\log\left(\frac{\varpi_2}{\varpi_1}\right) = g\left[\frac{1}{v(\Sigma)} - \frac{\Sigma}{2}\frac{d}{d\Sigma}\frac{1}{v(\Sigma)}\right](Z_1 - Z_2),$$

relation simple et facile à vérifier par l'expérience entre la différence de niveau qui existe entre les deux branches de l'appareil et les tensions des vapeurs émises par les dissolutions que renferment ces deux branches.

En comparant de même les égalités (50) et (53), on trouve

$$(56)\qquad \frac{RT}{\psi}\int_{m_2}^{m_1}\frac{1}{s(1+s)\dfrac{d\,v(s)}{ds}}\frac{d}{ds}\log\varpi\, ds + \frac{K}{2}\int_{m_2}^{m_1}\left[\frac{2\,v(s)}{\dfrac{d\,v(s)}{ds}} + s\right]dJ^2 = 0.$$

Si la concentration diffère peu dans les deux branches, cette éga-

lité (56) peut s'écrire approximativement

$$(57) \qquad \frac{\mathrm{RT}}{\psi}\frac{1}{\Sigma(1+\Sigma)}\log\left(\frac{\varpi_2}{\varpi_1}\right) = \frac{\mathrm{K}}{2}\left[\Sigma\frac{d\,\nu(\Sigma)}{d\Sigma} + 2\,\nu(\Sigma)\right]\mathrm{J}_1^2,$$

égalité à laquelle on parviendrait d'ailleurs en comparant les égalités (51) et (55). *Cette égalité* (57) *fournit une relation, susceptible d'être vérifiée par l'expérience, entre l'intensité du champ et les tensions des vapeurs émises par les dissolutions que renferment les deux branches.*

Commentaire aux principes de la Thermodynamique;

Par M. P. DUHEM.

INTRODUCTION.

Toute science avance comme par une série d'oscillations.

A certaines époques, on discute les principes de la science; on examine les hypothèses qu'ils supposent, les restrictions auxquelles ils sont soumis. Puis, pour un temps, ces principes semblent bien établis; alors les efforts des théoriciens se portent vers la déduction des conséquences; les applications se multiplient, les vérifications expérimentales deviennent nombreuses et précises.

Mais ce développement, d'abord rapide et facile, devient par la suite plus lent et plus pénible; le sol, trop cultivé, s'appauvrit; alors surgissent des obstacles, que les principes établis ne suffisent pas à lever, des contradictions qu'ils ne parviennent pas à résoudre, des problèmes qu'ils sont incapables d'aborder. A ce moment, il devient nécessaire de revenir aux fondements sur lesquels repose la science, d'examiner à nouveau leur degré de solidité, d'apprécier exactement ce qu'ils peuvent porter sans se dérober. Ce travail fait, il sera possible d'édifier de nouvelles conséquences de la théorie.

Les applications de la Thermodynamique ont été nombreuses depuis trente ans; aussi, de l'aveu de tous ceux qu'intéresse cette science, une revision de ces principes est devenue nécessaire. C'est l'essai d'une semblable revision que nous soumettons aujourd'hui aux lecteurs du *Journal de Mathématiques*.

Toute théorie physique repose sur un certain nombre de définitions et d'hypothèses qui sont, dans une certaine mesure, arbitraires; il est donc permis de chercher à exposer une semblable théorie dans un ordre logique; mais prétendre qu'on lui a donné le seul ordre logique dont elle soit susceptible serait une prétention injustifiable. Cette prétention, nous nous garderons bien de l'avoir. Nous sommes convaincu que l'on peut enchaîner les principes de la Thermodynamique d'une manière autre que celle que nous avons adoptée et cependant aussi satisfaisante, plus satisfaisante peut-être. Nous n'oserions même espérer qu'aucune lacune ne subsiste dans l'enchaînement que nous avons cherché à établir.

Si la question que nous avons examinée paraît plutôt philosophique que mathématique, qu'il nous soit permis d'invoquer, pour justifier son introduction dans ce Journal, l'intérêt manifesté tout récemment encore, par un analyste illustre, pour les recherches qui concernent les principes de la Thermodynamique; ce sera notre excuse auprès des mathématiciens.

PREMIÈRE PARTIE.

LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

1. *Du mouvement absolu.* — Nous supposerons faites la Géométrie et la Cinématique; nous emprunterons à ces sciences tous les résultats dont nous aurons besoin.

L'expérience nous permet de constater si deux parties de la matière se sont déplacées l'une par rapport à l'autre, en sorte que la notion de *mouvement relatif* est une notion expérimentale; c'est de cette notion que traite la Cinématique.

Mais cette notion est insuffisante pour l'objet que nous nous proposons de traiter. Les hypothèses que nous aurons à énoncer, les lois que nous aurons à formuler, ne feront pas intervenir seulement les mouvements relatifs des différentes parties de la matière les unes par rapport aux autres. Elles feront intervenir les mouvements des différentes parties de la matière par rapport à un certain trièdre de référence idéal, que l'on suppose tracé quelque part. Il arrivera souvent que des propositions qui concernent les mouvements relatifs à ce trièdre de référence particulier, et que nous regardons comme exactes, deviendraient manifestement fausses si l'on y supposait les mouvements rapportés à un autre trièdre de référence, animé par rapport au premier d'un mouvement quelconque.

Nous donnerons à ce trièdre particulier, auquel seront rapportés tous les mouvements dont nous parlerons, le nom de *trièdre absolument fixe;* les axes de ce trièdre seront les *axes absolument fixes;* un mouvement rapporté à ce trièdre particulier prendra le nom de *mouvement absolu;* une portion de matière dont les divers points ne seront animés d'aucun mouvement par rapport à ce trièdre sera dite en *repos absolu;* en particulier, un trièdre immobile par rapport au trièdre absolument fixe sera un nouveau trièdre absolument fixe.

Nous ne pouvons pas juger d'une manière indiscutable si un trièdre donné est ou n'est pas absolument fixe; tout jugement à cet égard est subordonné à la croyance en la légitimité de quelque hypothèse. Si nous regardons comme exacte une certaine hypothèse où intervient la considération des mouvements absolus, et si cette hypothèse, appliquée aux mouvements relatifs à un certain trièdre, conduit à des résultats inexacts, nous déclarons que ce trièdre n'est pas absolument fixe. Mais cette conclusion n'est forcée qu'autant que nous tenons à conserver l'hypothèse qui nous a servi de criterium; nous serions en droit de regarder comme fixe le trièdre dont il s'agit si nous consentions à rejeter l'hypothèse.

2. *Des corps et des mélanges ou combinaisons.* — Nous appellerons *corps* un espace linéairement connexe rempli, *d'une manière continue,* par une certaine partie de la matière.

Nous ne discuterons pas la question de savoir si les corps sont réel-

lement continus, ou formés de parties discontinues très petites séparées par des intervalles vides également très petits.

En Physique, il nous est à la fois impossible et inutile de connaître la constitution réelle de la matière. Nous cherchons simplement à concevoir un système abstrait qui nous fournisse une image des propriétés des corps. Pour construire ce système, nous sommes libres de représenter un corps qui nous semble continu soit par une distribution continue de matière dans un certain espace, soit par un ensemble discontinu d'atomes très petits. Le premier mode de représentation conduisant, dans toutes les parties de la Physique, à des théories plus simples, plus claires et plus élégantes, nous l'adopterons de préférence au second.

Considérons deux corps A, B, qui, à un certain instant t, occupent des espaces a, b, n'ayant aucune partie commune; ces deux corps ne sont pas toujours et forcément distincts; les parties de la matière qui les forment peuvent à un instant t', distinct de t, antérieur ou postérieur à t, fournir un corps unique C, occupant l'espace c; cela, de telle façon que tout élément $d\varpi$ de l'espace c renferme, à l'instant t', une partie de la matière qui, à l'instant t, forme le corps A, et aussi une partie de la matière qui, à l'instant t, forme le corps B; la première partie occupant, à l'instant t, un certain élément de volume dv de l'espace a; la seconde partie occupant, à l'instant t, un certain élément de volume dv' de l'espace b.

Dans le cas dont nous venons de parler, on dit que le corps C résulte soit du *mélange*, soit de la *combinaison* des deux corps A et B.

Beaucoup de physiciens se refusent à admettre la possibilité de la combinaison ou du mélange tel que nous venons de le définir. Ils regardent comme impossible cette pénétration intime par laquelle la matière qui remplit chaque élément de volume du corps continu C provient de l'union entre la matière que renfermait un élément de volume du corps continu A et la matière que renfermait un élément de volume du corps continu B. C'est cette impossibilité qu'ils nomment l'*impénétrabilité de la matière*.

Pour ces physiciens, les mots *mélange*, *combinaison* ne représentent que des apparences. Lorsque nous croyons voir les deux corps

A et B s'unir pour former un nouveau corps C, les parties extrêmement petites dont l'ensemble discontinu constitue chacun de ces deux corps demeurent, en réalité, distinctes; les petites parties du corps A s'interposent simplement aux petites parties du corps B, sans que l'espace occupé par l'une des parties du corps A ait aucun domaine commun avec l'espace occupé par l'une des parties du corps B.

Des raisons analogues à celles qui nous ont fait regarder comme continue la matière qui forme un corps nous conduisent à repousser cette manière de concevoir le mélange ou la combinaison et à adopter la définition que nous avons donnée tout à l'heure.

Considérons un corps C, formé par le mélange de deux corps A et B. La matière qui, à l'instant t, remplit l'élément de volume $d\varpi$ du corps C est composée d'une partie p de la matière qui formait le corps A et d'une partie q de la matière qui formait le corps B. A un autre instant t', ces deux parties p et q ne sont pas forcément unies entre elles au sein d'un même élément de volume. La matière qui constitue la partie p peut remplir un élément de volume $d\varpi'$, où elle est soit libre, soit unie à une partie q', différente de q, de la matière qui formait le corps B; en même temps, la matière qui constitue la partie q peut remplir un autre élément de volume $d\varpi''$, où elle est soit libre, soit unie à une partie p'', différente de p, de la matière qui formait le corps A.

Ainsi, lorsqu'un corps C est un mélange de deux corps, la matière qui remplit chaque élément de volume de ce corps est formée par l'union de deux parties différentes, et *ces deux parties peuvent être animées de mouvements différents;* en sorte qu'en chaque point du mélange il peut y avoir lieu de considérer deux vitesses différentes, chacune de ces vitesses étant relative à l'une des parties du mélange.

Tout ce que nous venons de dire d'un mélange de deux corps s'entend aussi bien d'un mélange d'un nombre quelconque de corps.

3. *Du corps isolé dans l'espace.* — L'expérience nous montre que, d'un corps donné, nous pouvons éloigner tous les corps qui l'environnent à un instant donné. L'existence de ces derniers nous apparaît donc comme n'ayant aucune liaison nécessaire avec l'existence du premier. Nous arrivons ainsi à concevoir la possibilité de

l'existence de ce corps isolé dans l'espace illimité en tous sens et absolument vide.

Cette conception du corps isolé dans un espace illimité et absolument vide est une pure abstraction. Jamais l'expérience ne nous offre un corps qui ne soit, de toutes parts, contigu à d'autres corps, et la Physique nous conduit à admettre que, lors même que nous parviendrions à enlever tous les corps solides, liquides ou gazeux que nous pouvons saisir directement ou indirectement, de manière à faire le *vide physique* dans l'espace qui environne un certain corps, cet espace serait encore rempli par une certaine matière que l'on nomme l'*éther*. C'est donc, je le répète, en vertu d'une pure abstraction que nous pouvons concevoir un corps comme existant seul dans l'espace. Mais je ne crois pas qu'il soit possible de construire la Physique sans faire usage de cette abstraction.

4. *Des variables qui définissent l'état et le mouvement d'un système.* — Considérons un ensemble de corps isolé dans l'espace. Cet ensemble de corps peut, d'un instant à l'autre, changer de position, de forme, d'état, etc. Considérons-le tel qu'il est à l'instant t, abstraction faite de ce qu'il était à tout instant antérieur à t, de ce qu'il sera à tout instant postérieur à t. A cet instant t, il possède certaines propriétés. Pour représenter ces propriétés, la Physique théorique définit certaines grandeurs algébriques et géométriques, puis elle établit entre ces grandeurs des relations qui sont le symbole des lois physiques auxquelles le système est assujetti.

Ces grandeurs peuvent être définies de façons très diverses. La Géométrie, par exemple, nous apprend de quelle manière on peut, par la définition de certaines grandeurs, en nombre limité ou illimité, déterminer la forme et la position de chacune des parties matérielles qui composent le système. D'autres grandeurs, qui en représentent les propriétés physiques et chimiques, sont définies au cours des diverses théories dont la Physique est composée. Dans ce Chapitre même, nous montrerons comment la Physique définit une de ces grandeurs, particulièrement importante, la *température;* au Chapitre suivant, nous en rencontrerons une autre, la *masse*.

Dans l'étude d'un système, on peut avoir intérêt à considérer en

même temps plusieurs grandeurs que leur définition relie les unes aux autres : ainsi, on peut avoir à parler de la masse [1] d'un corps, de son volume et de sa densité, alors que par *définition*, la densité d'un corps est le quotient de sa masse par son volume. Ces grandeurs, reliées les unes aux autres par leur définition même, ne sont pas indépendantes.

Des grandeurs qui représentent les propriétés d'un système à un instant donné sont *indépendantes* si la définition de chacune d'elles n'implique aucune relation entre la valeur de celle-ci à l'instant t et la valeur de chacune des autres au même instant t. Ainsi le volume et la masse d'un corps seront deux grandeurs indépendantes. De même, les composantes du flux électrique en chaque point d'un conducteur et la densité électrique, en chaque point du même conducteur, sont des grandeurs indépendantes; sans contredire ni à la définition de la densité électrique, ni à la définition du flux électrique, on peut, à l'instant t, attribuer des valeurs arbitraires à la première et aux trois composantes du second.

Nous avons dit que plusieurs grandeurs étaient indépendantes si la définition de chacune d'elles n'impliquait aucune relation entre la valeur de celle-ci *à l'instant t* et la valeur de chacune des autres *au même instant t*. Mais, tandis que les valeurs des variables indépendantes peuvent toutes être choisies arbitrairement à un instant isolé t, dans certains cas, il ne serait pas permis de choisir arbitrairement leurs valeurs à tous les instants d'un certain intervalle de temps. Ainsi, pour l'instant t, *considéré isolément*, on peut choisir arbitrairement la densité électrique et les composantes du flux électrique en chaque point d'un conducteur. Mais on ne pourrait, sans absurdité, en faire autant à *tous les instants* de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$. En effet, la définition même du flux électrique montre que si l'on connaît, en tout point d'un conducteur : 1° les composantes du flux électrique à tout instant de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$; 2° la densité électrique à un instant particulier de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$, la valeur de

[1] Il est bien entendu que, *pour donner des exemples*, nous sommes obligé d'anticiper, puisque aucune grandeur représentant une propriété physique n'a été définie dans ce qui précède.

la densité électrique est déterminée à tout instant de l'intervalle $(t_1 - t_0)$, en sorte que cette valeur ne peut plus être choisie arbitrairement.

Dans tout ce que nous venons de dire, il faut bien observer que, lorsque nous parlons de *dépendance* entre diverses grandeurs, nous n'entendons jamais parler que d'une dépendance résultant de la définition de ces grandeurs et non pas d'une dépendance résultant d'une loi physique; en sorte que des grandeurs *logiquement* indépendantes peuvent ne pas être *physiquement* indépendantes; leur donner des valeurs arbitraires est une opération qui, sans être absurde, peut être contraire aux lois naturelles.

Parmi les grandeurs, indépendantes ou non, qui servent à représenter un système à un instant isolé t, il en est que leur définition astreint à avoir la même valeur pour un système donné, quel que soit l'instant que l'on considère isolément. Telle est, par exemple, la masse du système; telle est encore sa charge électrique totale. Il en est d'autres qui peuvent, pour un même système considéré, à des instants différents, avoir des valeurs différentes. On dit que les premières définissent la *nature* du système et que les secondes en définissent l'*état*.

Considérons les grandeurs indépendantes qui suffisent à représenter *complètement* les propriétés d'un système à l'instant isolé t. Les unes, A, B, ..., L, définissent la nature du système; les autres, α, β, ..., λ, définissent son état.

Si l'on conserve aux quantités A, B, ..., L leurs valeurs et si l'on donne aux variables α, β, ..., λ d'autres valeurs α', β', ..., λ', on aura la représentation d'un autre état du même système.

Imaginons ainsi une suite continue d'états différents du système, c'est-à-dire une suite continue de groupes de valeurs des quantités α, β, ..., λ. Fixons successivement notre attention sur ces divers états, dans l'ordre qui permet de passer d'une manière continue de l'un à l'autre. Pour désigner cette *opération tout intellectuelle*, nous dirons que nous imposons au système une *modification virtuelle*.

Toute modification réalisable d'un système correspond à des variations des quantités α, β, ..., λ compatibles avec les définitions de ces quantités; la suite des états par laquelle elle fait passer le système constitue donc une modification virtuelle du système.

Inversement, une modification virtuelle peut-elle toujours être regardée comme la suite des états qu'un système traverse durant une modification réelle? Si l'on se souvient que les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, laissées arbitraires par leurs définitions, peuvent être liées les unes aux autres par des lois physiques, on voit qu'une modification virtuelle, bien que compatible avec les définitions des variables propres à représenter les divers états du système, peut être en opposition avec certaines lois physiques, et, par conséquent, être physiquement irréalisable.

Il y a plus : les valeurs qu'on peut attribuer aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, à un instant isolé t, sont arbitraires; mais il n'en est plus toujours de même des valeurs qu'on peut attribuer à ces variables aux divers instants d'un certain intervalle de temps; si donc on regarde la suite de groupes de valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, qui représentent les divers états du système durant une modification virtuelle, comme une suite d'états *qui se succèdent* durant un certain intervalle de temps, on pourra fort bien se heurter à une contradiction avec la définition des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Si, par exemple, dans la modification virtuelle que l'on considère, on suppose qu'un conducteur est parcouru par des courants non uniformes, et si, d'autre part, on regarde la densité électrique en chaque point comme invariable, on obtient une suite continue d'états dont la succession dans le temps serait contradictoire avec la définition du flux électrique. Ainsi les définitions mêmes des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ peuvent suffire à rendre certaines modifications virtuelles irréalisables.

Nous avons dit que les constantes A, B, ..., L et les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ représentaient les propriétés physiques du système considéré à l'instant t, abstraction faite des propriétés du système aux instants qui précèdent ou qui suivent t. Or la considération d'un système à un instant isolé, abstraction faite des instants qui ont précédé celui-là ou qui le suivent, ne saurait permettre de reconnaître si le corps est en repos ou en mouvement. Le mot *mouvement* ne prend de sens pour un système qu'autant que l'on envisage ce système pendant un certain laps de temps, si court soit-il. Par conséquent, les valeurs des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, nécessaires et suffisantes pour représenter les propriétés du système à l'instant isolé t, ne suffiront pas, en général, à nous indiquer si le système est en mouvement et quel est ce mouvement.

Nous dirons que *le mouvement* du système à l'instant *t est défini* si l'on connaît non seulement l'état du système à cet instant, mais encore la grandeur et la direction de la vitesse dont est animée la matière remplissant chacun des éléments de volume du système ; dans le cas où un élément de volume serait rempli par un mélange de plusieurs substances, il faudrait connaître la vitesse animant chacune des parties de matière qui composent ce mélange.

Considérons une partie infiniment petite de la matière qui forme un système. Les coordonnées x, y, z, qui, à l'instant t, marquent la position d'un de ses points par rapport au trièdre absolument fixe, sont connues lorsqu'on connaît les valeurs des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, à cet instant ; en effet, ces variables connues, on doit connaître la forme, la position et les propriétés que possèdent, à l'instant t, toutes les parties du système. Nous devons donc avoir, pour déterminer x, y, z, des équations de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda), \\ y = \psi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda), \\ z = \chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda); \end{cases}$$

φ, ψ et χ sont trois fonctions dont la forme dépend de la nature du système, et aussi de la particule matérielle considérée. Ces relations ne dépendent pas explicitement du temps t, car si, à deux instants différents, t et t', les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ reprennent les mêmes valeurs, comme ces variables suffisent à déterminer l'état du système, le système redeviendra identique à lui-même, et les coordonnées x, y, z reprendront les mêmes valeurs.

Des équations (1), on déduit les égalités

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{\partial\psi}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial\chi}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{\partial\chi}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial\chi}{\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}. \end{cases}$$

Ces égalités (2) nous montrent que les composantes de la vitesse

d'une partie élémentaire quelconque du système sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$. Ces fonctions dépendent, en outre, d'une manière quelconque des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Ainsi, pour définir le mouvement du système à l'instant t, il est suffisant d'adjoindre aux valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les valeurs de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$. Cela est-il en même temps nécessaire?

Dans un grand nombre de cas, toutes les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ne figurent pas dans les équations (1), ni, par conséquent, toutes les quantités $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$, dans les équations (2). Nous aurons parfois à distinguer celles des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ qui figurent dans les équations (1) de celles qui n'y figurent pas; nous conserverons pour les premières lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et, pour les secondes, nous adopterons les lettres $a, b, \ldots, l$.

Nous dirons qu'un système isolé est *en repos* lorsque la matière qui le compose est immobile, son état pouvant d'ailleurs subir avec le temps des variations qui laissent dans la même position chacune des parties qui le composent. Pour un pareil système, les quantités α, $\beta, \ldots, \lambda$ gardent des valeurs indépendantes du temps, les quantités a, $b, \ldots, l$, pouvant d'ailleurs subir avec le temps des variations quelconques.

Nous dirons qu'un système isolé est *en équilibre* si son état ne varie pas avec le temps. Pour un système en équilibre, les quantités a, $b, \ldots, l$, aussi bien que les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ont des valeurs indépendantes du temps.

Imaginons qu'un système parte d'un certain état caractérisé par certaines valeurs déterminées des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et par une certaine vitesse bien déterminée de chacune des parties matérielles infiniment petites en lesquelles on peut le supposer divisé; que ce système subisse une série plus ou moins considérable de modifications; qu'enfin, au bout d'un certain temps, il soit ramené à un état identique à l'état initial, c'est-à-dire à un état où les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ont les mêmes valeurs que dans l'état initial, où la vitesse de chaque partie élémentaire est la même que dans l'état initial. La série de transformations

subie par le système prendra le nom de *cycle fermé*. Nous aurons très souvent occasion, au cours de ce travail, de considérer de semblables transformations.

Il est entendu que, lorsqu'un système subit une transformation quelconque, la vitesse de chacune des parties élémentaires en lesquelles on peut le supposer divisé varie avec le temps d'une manière continue.

Dans la plupart des considérations précédentes, nous avons supposé l'état du système défini par les valeurs d'un nombre limité de paramètres variables. On s'aperçoit aisément que cette hypothèse a pour but unique de simplifier le langage, mais que tout ce que nous avons dit s'étend sans peine aux systèmes dont la définition exigerait la connaissance d'une infinité de paramètres variables.

5. *Des systèmes indépendants.* — Considérons un système de corps S, isolé dans l'espace, et soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les variables qui, à chaque instant isolé t, déterminent complètement son état.

Supposons que les corps qui forment ce système puissent se partager en deux groupes S_1, S_2.

Supposons, en outre, que les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ puissent se partager en deux groupes $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, jouissant des propriétés suivantes :

1° Rien, dans la définition des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, ne suppose l'existence ou les propriétés du groupe de corps S_2 ou des variables α_2, $\beta_2, \ldots, \lambda_2$;

2° Rien, dans la définition des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, ne suppose l'existence ou les propriétés du groupe de corps S_1 ou des variables α_1, $\beta_1, \ldots, \lambda_1$.

Si ces conditions sont réalisées, on pourra supposer que le groupe de corps S_1 est isolé dans l'espace, et que, à chaque instant d'un certain laps de temps, les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ ont, pour ce groupe isolé, des valeurs identiques à celles qu'elles auraient, à l'instant correspondant d'un laps de temps égal, au sein du système S. Cette hypothèse ne contredira en rien la définition des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$.

De même, on pourra supposer que le groupe de corps S_2 est isolé dans l'espace, et que, à chaque instant d'un certain laps de temps, les variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$ ont, pour ce groupe isolé, des valeurs iden-

tiques à celles qu'elles auraient, à l'instant correspondant d'un laps de temps égal, au sein du système S. Cette hypothèse ne contredira en rien la définition des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

D'ailleurs, les deux hypothèses que nous venons d'indiquer, tout en ne contredisant pas la définition des groupes de variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, peuvent être en opposition avec certaines lois expérimentales.

Lorsque deux groupes de corps, S_1 et S_2, satisferont aux conditions que nous avons énumérées, nous dirons que ces deux groupes constituent *deux systèmes matériels susceptibles d'exister indépendamment l'un de l'autre*, ou, sous une forme plus concise, *deux systèmes indépendants*.

Remarquons que, dans ce cas, les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ suffisent évidemment à fixer l'état du système S_1, sans rien indiquer relativement à l'état du système S_2, et que, inversement, les variables α_2, $\beta_2, \ldots, \lambda_2$ suffisent à fixer l'état du système S_2, sans rien indiquer relativement à l'état du système S_1. Ainsi, *lorsque deux systèmes sont indépendants l'un de l'autre, il est possible d'isoler chacun d'eux de l'autre sans changer son état;* dans cet énoncé, répétons-le, le mot *possible* désigne une opération qui n'est pas en contradiction avec les définitions, mais pas nécessairement une opération conforme aux lois physiques.

Éclaircissons tout ce que nous venons de dire par quelques exemples :

1° Le système S est un corps dont nous regardons l'état comme défini lorsque nous connaissons la position, la densité et la température de chacune des parties matérielles infiniment petites qui le composent.

Sans contredire aux définitions de la température et de la densité, nous pouvons, après avoir divisé le corps en deux parties S_1, S_2, supprimer par la pensée la partie S_2 et garder la partie S_1 isolée dans l'espace, en conservant à chacune des parties matérielles infiniment petites qui la composent, la position, la densité et la température qu'elle aurait eues, au même instant, dans le système S; nous pouvons aussi supprimer par la pensée la partie S_1 et garder la partie S_2 isolée dans l'espace, en conservant à chacune des parties matérielles infini-

ment petites qui la composent, la position, la densité et la température qu'elle aurait eues, au même instant dans le système S.

Dans ce cas, qui a une grande importance, les deux systèmes S_1, S_2 sont indépendants.

2° Le système S est formé d'un corps conducteur qui porte certaines charges électriques. La définition de ces charges exige que la somme des charges réparties sur le conducteur S demeure constante pendant le laps de temps que l'on considère; mais, si l'on regarde ce conducteur S comme formé de deux parties contiguës S_1, S_2, la somme des charges réparties sur la portion S_1 pourra fort bien varier d'un moment à l'autre, et aussi la somme des charges réparties sur la portion S_2.

Supposons maintenant que, pendant un certain laps de temps, nous considérions la partie S_2 comme supprimée et la partie S_1 comme isolée dans l'espace. Pourrons-nous, à chaque instant de ce laps de temps, imaginer sur cette partie S_1 une distribution électrique identique à celle qu'elle porterait au même instant, si elle était incorporée dans le système S ? Non, car, nous venons de le remarquer, cette distribution donnera, en général, une valeur variable d'un instant à l'autre pour la quantité totale d'électricité que porte S_1 ; or le conducteur S_1, isolé dans l'espace, doit, d'après la définition des charges électriques, porter une charge électrique totale invariable.

Ainsi, dans le cas que nous venons d'analyser, les deux corps S_1, S_2 ne forment pas deux systèmes indépendants.

3° Le système S est formé d'un corps conducteur qui porte certaines charges électriques et est parcouru par certains courants. Pour fixer les idées, nous supposerons que ces courants sont uniformes. La distribution électrique est alors invariable, tant à la surface du conducteur S qu'à l'intérieur, pendant le laps de temps que l'on considère.

Par une surface σ, coupons le conducteur S en deux parties, S_1, S_2. Pouvons-nous supprimer par la pensée la partie S_2, regarder la partie S_1 comme isolée dans l'espace, et y conserver, pendant tout le laps de temps que nous considérons, une distribution de courants et de charges identiques à celle qui régnait dans cette partie S_1 lors-

qu'elle était incorporée dans le conducteur S ? Évidemment non, car, dans le conducteur S, les divers points de la surface σ portaient une électrisation invariable, tandis que, si la partie S_1 est isolée dans l'espace, les courants qui la traversent feront varier d'un instant à l'autre l'électrisation de la surface σ.

Dans ce cas encore, les deux corps S_1, S_2 ne sont pas des systèmes indépendants.

Il faut bien observer qu'en disant que deux corps S_1, S_2 ne forment pas deux systèmes indépendants, nous ne voulons pas dire que chacun de ces deux corps ne saurait être conçu comme isolé dans l'espace; nous admettons, au contraire, qu'un corps peut toujours, par la pensée, être isolé dans l'espace (*voir* n° **3**). Nous voulons dire qu'on ne peut pas admettre que chacun d'eux, isolé dans l'espace, conserve, à chaque instant d'un laps de temps, l'état qu'il présenterait au même instant s'il était incorporé au système total.

Ainsi, dans les deux derniers exemples, le corps S_1 peut être conçu comme isolé dans l'espace; mais ce qui est contradictoire, c'est de lui attribuer alors, pendant un certain temps, la distribution de charges électriques et de courants qu'il porterait pendant le même temps s'il était uni au corps S_2, pour former le système S.

La Physique ne saurait, sans excéder le domaine où ses méthodes s'appliquent légitimement, décider si l'univers est ou non limité. Mais, dans toute question de Physique, on peut raisonner comme si l'univers était formé d'un certain nombre de corps enclos dans une surface fermée d'étendue. On admet, en effet, que, dans l'étude d'un groupe de corps, on peut, sans erreur sensible, considérer comme n'existant pas tous les corps dont la distance à ceux-là surpasse une certaine limite.

Considérons donc cette partie très grande, mais limitée, de l'univers dont il est nécessaire de tenir compte lorsqu'on veut étudier un groupe de corps déterminé S_1; soit S cette partie de l'univers; soit S_2 ce qui reste de S lorsqu'on en a retranché S_1. Si les deux groupes de corps S_1, S_2 forment deux systèmes indépendants, nous dirons que le groupe S_1 forme un *système matériel*. C'est toujours dans ce sens bien défini que nous emploierons le mot *système matériel*.

A un semblable système, nous pourrons étendre sans les modifier

les définitions des mots *repos* et *équilibre*, que nous avons données, à la fin du n° **4**, pour un système isolé.

6. *De la température.* — Parmi les variables servant à définir l'état d'un système, il en est une dont le rôle, au cours du présent travail, aura une importance toute particulière; cette variable, c'est la *température*. Nous allons, dès maintenant, montrer comment cette variable peut être définie. Cette étude aura d'ailleurs l'avantage de nous montrer de quelle manière le physicien fait correspondre certaines grandeurs aux propriétés physiques d'un système.

Nos organes nous donnent la sensation de corps *chaud* et de corps *froid*, de corps plus chauds ou plus froids les uns que les autres. Cette sensation de chaleur ou de froid, de chaleur plus ou moins grande ou de froid plus ou moins intense, nous la regardons comme le signe d'une certaine propriété que possèdent les corps, et qu'ils possèdent à un degré plus ou moins élevé; nous admettons qu'un corps est chaud, qu'il est plus ou moins chaud qu'un autre, qu'il est froid s'il est moins chaud que notre corps.

Cette propriété des corps que nous caractérisons par les mots : *être chaud, être froid, être plus ou moins chaud*, notre faculté d'abstraction ne tarde pas à lui attribuer des caractères que la sensation ne nous marque pas.

Nous ne pouvons comparer entre eux le degré de chaleur des corps qu'autant que ces corps ne sont ni trop chauds, ni trop froids; au delà d'une certaine limite, dans un sens comme dans l'autre, nos organes seraient lésés ou détruits; nous concevons néanmoins qu'au delà de ces limites les corps continuent à être plus ou moins chauds les uns que les autres.

En comparant nos sensations à celles de nos semblables, nous voyons que, parfois, nous trouvons inégalement chauds deux corps qu'un autre trouve également chauds ou inversement; nous sommes ainsi conduit à admettre que la sensibilité de nos organes est limitée et que, sans être identiques, les degrés de chaleur de deux corps peuvent être assez peu dissemblables pour que nous ne puissions les distinguer.

Un corps chaud ne peut influer sur nos organes que par la partie de

sa surface qui est en contact avec ces organes, et cette surface a toujours une certaine étendue; le temps pendant lequel nous touchons cette surface a toujours une certaine durée; néanmoins, nous admettons que le caractère d'être chaud appartient aussi bien aux parties qui sont à l'intérieur du corps qu'aux parties voisines de la surface; qu'il appartient en propre à chaque partie infiniment petite en lesquelles le corps peut être censé décomposé et à chaque moment infiniment petit de la durée; qu'à un même instant, il varie d'un point à l'autre; qu'en un même point, il varie d'un instant à l'autre.

Les observations les plus vulgaires nous montrent que, dans la plupart des cas, lorsqu'un corps chaud est mis en présence d'un corps froid, le corps froid s'échauffe et le corps chaud se refroidit; généralisant cette observation, nous admettons comme exacte la loi suivante :

Pour qu'un système isolé [1] *soit en équilibre, il est nécessaire que toutes les parties matérielles qui composent ce système soient également chaudes.*

Cette loi nous amène à corriger de nouveau les données de nos sensations. L'expérience nous apprend, en effet, que, dans certains systèmes que nous regardons comme étant en équilibre, diverses parties peuvent nous paraître très inégalement chaudes; par exemple, un morceau d'acier et un morceau de bois, dont l'ensemble est en équi-

---

[1] Il faut bien remarquer que cette loi n'est exacte qu'autant que le système auquel on l'applique est *isolé*. Une barre métallique dont une extrémité plonge dans la vapeur d'eau bouillante, et l'autre dans la glace fondante est en équilibre lorsque le régime permanent des flux de chaleur est établi. Cependant les divers points de cette barre sont inégalement échauffés. Mais cette barre ne forme pas un système isolé. Si l'on voulait l'incorporer dans un système isolé, celui-ci contiendrait, en même temps qu'elle, l'eau bouillante et la glace fondante, qui ne sont pas en équilibre. Une observation analogue s'appliquerait à l'état d'équilibre auquel parvient une chaîne thermo-électrique lorsque le régime permanent est établi, tant pour les flux de chaleur que pour les flux électriques.

libre, nous font éprouver des sensations de chaleur très inégales; nous continuons cependant à les regarder comme étant également chauds en réalité; et nous admettons que nos sensations ne nous renseignent pas toujours exactement sur le degré de chaleur des corps.

Ces mots *être chaud* correspondent donc à une propriété de chacune des parties infiniment petites en lesquelles les corps peuvent être censés divisés. Qu'est en soi cette propriété ? Est-elle réductible, par sa nature même, en éléments quantitatifs ? Ce sont des questions que la Physique n'a pas à résoudre. *Telle que nous la concevons,* cette propriété n'est pas quantitative. Elle nous apparaît comme susceptible d'être reproduite identique à elle-même, d'être augmentée ou diminuée, *mais non comme susceptible d'addition.*

Mais à cette propriété non quantitative nous pouvons faire correspondre une grandeur algébrique qui, *sans avoir avec elle aucune relation de nature,* en sera la représentation.

Nous pouvons, en effet, concevoir l'existence d'une grandeur qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° En chaque point d'un corps quelconque, cette grandeur a une valeur déterminée;

2° En deux points également chauds, elle a la même valeur;

3° En deux points inégalement chauds, elle a des valeurs différentes, la plus grande valeur correspondant au point le plus chaud;

4° Si deux points tendent à devenir également chauds, les valeurs de la grandeur considérée qui leur correspondent tendent vers une même limite.

On voit que, si l'on connaissait les valeurs prises par une semblable grandeur aux divers points d'un ensemble de corps, on saurait toujours exactement si le degré de chaleur varie d'une partie à l'autre de cet ensemble, et dans quel sens il varie.

Cette grandeur, dont les diverses valeurs servent, non pas à *mesurer* (ce qui, d'après ce qui précède, n'aurait aucun sens), mais à *repérer* les divers degrés de chaleur, sera nommée *température.*

La définition de la température laisse arbitraire, à un haut degré, le choix de cette grandeur. Imaginons, en effet, que l'on ait, d'une première manière, déterminé la température en tout point; soit ϑ cette température; la grandeur $\Theta = f(\vartheta)$ pourra évidemment être, à son

tour, prise comme température, si la fonction $f(\vartheta)$ possède les trois caractères suivants :

1° Pour chacune des valeurs que la variable ϑ est susceptible de prendre, la fonction $f(\vartheta)$ prend une valeur et une seule;

2° La fonction $f(\vartheta)$ varie d'une manière continue lorsque ϑ varie d'une manière continue;

3° La fonction $f(\vartheta)$ varie toujours dans le même sens que ϑ.

L'opération par laquelle on connaîtrait, à un instant donné, comment les diverses parties des corps devraient être classées si l'on voulait que toutes les parties d'une même classe fussent également chaudes; que les parties qui sont rangées dans une classe quelconque fussent plus chaudes que les parties rangées dans la classe précédente et moins chaudes que les parties rangées dans la classe suivante; cette opération, dis-je, nous apparaît comme logiquement possible, bien que nos sens ne nous permettent pas de la réaliser, si ce n'est entre des limites restreintes et d'une manière grossièrement approchée.

Nous concevons donc qu'une température, constante pour toutes les parties qui se trouvent dans la même classe et croissante d'une classe à l'autre, puisse être choisie, bien que nos sensations ne nous fournissent pas le moyen de réaliser un semblable choix avec quelque précision. Cela suffit pour que nous puissions faire figurer cette température dans nos raisonnements sans risquer d'employer un mot vide de sens. De fait, c'est exclusivement de cette température, conçue d'une manière abstraite, qu'il sera question dans nos théories.

Mais si nous voulons appliquer à des systèmes concrets les résultats auxquels nous auront conduits les raisonnements abstraits où figure la température, il ne nous suffira plus de savoir qu'il est possible de constituer une grandeur, appelée *température*, prenant une valeur déterminée en chaque point de ces systèmes; il faudra encore avoir un moyen, exact ou approché, de construire réellement une semblable grandeur, d'en obtenir la valeur numérique, c'est-à-dire de classer les parties des corps selon leur degré croissant de chaleur; nous avons vu que nos sens, employés directement, étaient insuffisants pour cet objet.

La méthode employée pour obtenir une détermination expérimentale de la température, ou plutôt d'*une* température, ne s'applique

qu'à un cas particulier, très étendu il est vrai; par des hypothèses spéciales, que nous n'examinerons pas ici, on parvient à l'étendre à certains autres cas.

Cette détermination expérimentale repose sur la loi suivante, dont nous avons dit l'origine :

Pour l'équilibre d'un système isolé, il est nécessaire que toutes ses parties soient également chaudes.

Si, comme nous en avons le droit, nous faisons figurer dans nos raisonnements une température ϑ dont la détermination est conçue d'une manière abstraite, mais non réalisée d'une manière effective, nous pourrons énoncer la loi précédente sous cette forme :

Si un système isolé est en équilibre, la température ϑ a la même valeur en tous ses points.

Cette loi admise, supposons que nous ayons un système S, isolé et en équilibre; il a la même température en tous ses points.

Ce système S est lui-même formé de deux systèmes *indépendants* T et U.

Le système U, sauf la propriété d'être indépendant du système T, est quelconque.

On suppose au contraire que le système T possède, au moins approximativement les caractères [1] suivants :

1° Pour une valeur donnée de la température ϑ, la même en tous ses points, le système T ne peut être en équilibre que d'une seule manière, quel que soit le système indépendant U auquel il est adjoint; les diverses propriétés que présente ce système T en équilibre dépendent donc uniquement de la température; si, parmi elles, il en est une qui est mesurable (par exemple, une propriété géométrique), le nombre qui la mesure est fonction de la seule température ϑ.

---

[1] Ces caractères, des expériences plus ou moins grossières, celles, par exemple, que nous permet l'usage direct de nos sens, nous les ont fait apercevoir; puis, par voie d'hypothèse, nous avons admis que le système T les possédait soit rigoureusement, soit avec une approximation supérieure à celle de nos premières observations.

2° Parmi ces propriétés mesurables du système T, il en est au moins une qui va toujours en croissant lorsque le système T s'échauffe; de quelque manière que l'on suppose choisie la température $\mathfrak{S}$, le nombre Θ qui mesure cette propriété variera toujours dans le même sens que $\mathfrak{S}$.

D'après une remarque faite précédemment *le nombre Θ pourra être pris comme propre à marquer la température* du système T et, partant, du système U.

Donc, toutes les fois que l'on aura pu adjoindre au système T, choisi une fois pour toutes, un certain système U, indépendant du système T et formant avec lui un système isolé en équilibre, on saura, d'une manière effective, faire correspondre une valeur de la température au degré de chaleur que possède le système U dans ces conditions.

Lorsqu'on définit le système T et la propriété de ce système dont la mesure Θ donnera la valeur numérique de la température, on dit que l'on fait choix d'un *thermomètre*. Lorsqu'on indique la valeur numérique de la température d'un système U, on doit évidemment, pour que cette indication ait un sens, mentionner le thermomètre que l'on a choisi.

Nous laissons au lecteur le soin d'éclaircir les généralités qui précèdent en les appliquant aux divers thermomètres ordinairement employés.

CHAPITRE II.

LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

1. *L'œuvre et l'énergie d'un système.* — Nous pouvons, par nos efforts, produire dans un système une certaine transformation ou aider à cette transformation; nous pouvons déplacer un corps, le lancer avec une certaine vitesse, le briser, le déformer. Nous pouvons, au contraire, employer nos efforts à mettre obstacle à la transformation que subit un système, à gêner cette transformation; nous pouvons arrêter un corps en mouvement, le ralentir, l'empêcher de se déformer. Nous

disons alors que nous avons accompli un certain ouvrage, fait une certaine *œuvre*.

L'expérience de chaque jour nous apprend qu'à notre action personnelle nous pouvons substituer un corps ou un assemblage de corps capable de produire ou d'aider la modification que nous produisons ou que nous aidons, de gêner la modification que nous gênons. L'objet pratique de la Physique est précisément, dans un grand nombre de cas, de connaître quels sont les divers corps qui peuvent être substitués à notre activité personnelle pour favoriser ou pour entraver une certaine modification, quelles sont les machines qui peuvent remplacer les ouvriers dans l'accomplissement d'un certain ouvrage. L'œuvre que nous aurions accomplie si nous avions agi nous-même sur le système qui se transforme, nous la regardons comme accomplie par le corps ou l'ensemble de corps que nous avons substitué à nous-même ou à nos semblables.

Cette notion d'œuvre accomplie par les corps étrangers à un système pendant que ce système subit une certaine modification, nous la transportons même au cas où la modification subie par le système est d'une nature telle que notre action personnelle ne pourrait ni l'aider, ni l'entraver. L'œuvre accomplie par ces corps étrangers est censée représenter l'œuvre qu'accomplirait un opérateur constitué autrement que nous et capable d'apporter à la transformation du système l'aide ou l'entrave qu'apportent les corps étrangers.

Ainsi donc, quand un système se transforme en présence de corps étrangers, nous considérons ces corps étrangers comme contribuant à cette transformation soit en la causant, soit en l'aidant, soit en l'entravant; c'est cette contribution, dont la nature demeure pour nous obscure, que nous nommons l'*œuvre accomplie pendant une transformation d'un système par les corps étrangers à ce système*.

Sans chercher à pénétrer la nature de cette contribution, ce qui n'est point l'objet de la Physique, mais de la Métaphysique, nous allons nous efforcer de créer une expression mathématique propre à servir de symbole à cette contribution. Pour cela, nous déterminerons la forme d'une expression assujettie à certaines conventions; ces conventions, nous ne les établirons pas au hasard; nous les choisirons de telle sorte qu'elles soient l'image des caractères les plus simples et les plus

saillants que présente la notion d'œuvre, ou, tout au moins, de telle sorte qu'elles s'accordent sans peine avec ces caractères.

Supposons qu'un système, soumis à l'action de certains corps étrangers, subisse une certaine transformation; supposons ensuite que le même système subisse la même transformation, les corps étrangers au système étant autres. L'œuvre accomplie dans le premier cas et dans le second cas par les corps étrangers au système est la même, bien que ces corps soient différents; ce caractère, que nous attribuons forcément à la notion d'œuvre, nous conduit à poser la convention suivante :

Première convention. — *La grandeur qui représente l'œuvre accomplie, durant une transformation d'un système, par les corps étrangers à ce système est déterminée lorsqu'on connaît la nature du système et la transformation qu'il subit; elle est indépendante des corps étrangers au système.*

Voici maintenant une deuxième convention qu'il est bien naturel d'admettre.

Deuxième convention. — *Supposons qu'un système subisse successivement diverses transformations* 1, 2, ..., n, *pendant lesquelles les corps étrangers au système accomplissent des œuvres représentées respectivement par les grandeurs algébriques* G_1, $G_2, \ldots, G_n$. *L'ensemble des transformations* 1, 2, ..., n *peut être considéré comme une transformation unique; l'œuvre accomplie par les corps étrangers au système durant cette transformation résultante sera représentée par la grandeur* $(G_1 + G_2 + \ldots + G_n)$.

Nous pouvons désormais, lorsque aucune confusion ne sera à craindre entre le symbole mathématique et la notion qu'il représente, donner le nom d'*œuvre accomplie* durant la transformation d'un système par les corps étrangers à ce système à la grandeur algébrique qui représente cette œuvre.

Imaginons qu'un système parte d'un certain état initial avec un certain mouvement initial; qu'une série de modifications lui fasse pren-

dre, au bout d'un certain temps, un état final identique à son état initial, un mouvement final identique à son mouvement initial. Nous regarderons l'œuvre que les corps extérieurs avaient accomplie durant une partie de cette transformation comme ayant été détruite par l'œuvre accomplie durant le reste de la transformation, en sorte que l'œuvre totale sera nulle; nous serons ainsi conduits à poser la convention suivante :

Troisième convention. — *Lorsqu'un système parcourt un cycle fermé, l'œuvre accomplie, durant le parcours de ce cycle, par les corps étrangers au système est égale à O.*

Cette convention nous indique, en premier lieu, que la grandeur qui représente l'œuvre accomplie n'aura pas, pour toute modification d'un système, le même signe. Les diverses modifications dont la succession constitue un cycle fermé devront correspondre à des œuvres les unes positives et les autres négatives, de telle sorte que la somme des œuvres positives soit exactement compensée par la somme des œuvres négatives.

Mais, en outre, cette convention fournit des renseignements beaucoup plus précis sur la forme de la grandeur G qui représente l'œuvre accomplie, durant une modification d'un système, par les corps étrangers au système.

Considérons deux états différents d'un même système. Dans l'un de ces états, que nous désignerons par le symbole 1, les variables qui définissent les propriétés du système ont pour valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$; les vitesses des diverses particules qui composent le système ont pour composantes $u_1, v_1, w_1; u'_1, v'_1, w'_1; \ldots$. Dans l'autre de ces états, que nous désignerons par le symbole 2, les variables qui définissent les propriétés du système ont pour valeurs $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$; les vitesses des diverses particules qui composent le système ont pour composantes $u_2, v_2, w_2; u'_2, v'_2, w'_2, \ldots$.

Imaginons un certain nombre de modifications distinctes $M_1^2, M_1'^2, M_1''^2, \ldots$, qui, toutes, font passer le système de l'état 1 à l'état 2, et soit M_2^1 une modification qui fait passer le système de l'état 2 à l'état 1.

Soient

$$G_1^2, \quad G_1'^2, \quad G_1''^2, \quad \ldots, \quad G_2^1$$

les œuvres accomplies par les corps étrangers au système durant les modifications

$$M_1^2, \quad M_1'^2, \quad M_1''^2, \quad \ldots, \quad M_2^1.$$

Les deux modifications M_1^2, M_2^1, imposées au système l'une après l'autre, lui font décrire un cycle fermé; il en est de même des deux modifications $M_1'^2$, M_2^1; ou encore deux modifications $M_1''^2$, M_2^1, ...

La convention précédente donne alors

$$G_1^2 + G_2^1 = 0,$$
$$G_1'^2 + G_2^1 = 0,$$
$$G_1''^2 + G_2^1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou bien

$$G_1^2 = G_1'^2 = G_1''^2 = \ldots.$$

Le résultat qu'exprime cette égalité peut s'énoncer ainsi :

L'œuvre accomplie, durant une modification d'un système, par les corps étrangers à ce système dépend de l'état et du mouvement du système au début et à la fin de la modification, mais non des autres particularités qui caractérisent cette modification.

Conformément à cet énoncé, nous poserons désormais

$$G_1^2 = \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Nous allons mettre la fonction ψ sous une forme plus explicite.

Considérons le système que nous étudions dans un certain état, *déterminé une fois pour toutes,* que nous désignerons par l'indice 0; dans cet état, α_0, β_0, ..., λ_0 sont les valeurs des variables qui définissent les propriétés du système; u_0, v_0, w_0; u_0', v_0', w_0', ... sont les composantes des vitesses dont sont animées les particules matérielles qui le composent.

Si le système passe de l'état 0 à l'état 1, les corps extérieurs accompliront une œuvre

$$G_0^1 = \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots).$$

Si le système passe de l'état 1 à l'état 2, les corps extérieurs accomplissent une œuvre

$$G_1^2 = \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Ces deux transformations, effectuées l'une après l'autre, constituent une transformation faisant passer le système de l'état 0 à l'état 2; durant une semblable transformation, les corps extérieurs effectuent une œuvre

$$G_0^2 = \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Mais, d'autre part, d'après la deuxième convention, l'œuvre accomplie par les corps extérieurs durant cette dernière transformation doit avoir pour valeur $(G_0^1 + G_1^2)$. On a donc

$$G_0^2 = G_0^1 + G_1^2,$$

ou bien

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) \\ = \; & \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots) \\ & + \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Cette identité (1) va déterminer la forme de la fonction ψ.

L'état 0 étant déterminé une fois pour toutes, les quantités

$$\alpha_0, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda_0, \quad u_0, \quad v_0, \quad w_0, \quad u'_0, \quad v'_0, \quad w'_0, \quad \ldots$$

sont non pas des variables, mais des constantes; la quantité

$$\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)$$

est une fonction des seules variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad u, \quad v, \quad w, \quad u', \quad v', \quad w', \ldots.$$

Nous pouvons donc poser

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ \quad = \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\end{array}\right.$$

et l'égalité (1) nous donnera

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}\psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots)\\ \quad = \mathcal{E}(\alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots).\end{array}\right.$$

L'œuvre accomplie, durant une modification quelconque d'un système, par les corps étrangers à ce système est égale à l'accroissement que subit, par l'effet de cette modification, une certaine grandeur qui est déterminée sans ambiguïté lorsqu'on connaît l'état du système et son mouvement.

Cette grandeur, définie par l'égalité (2), porte le nom d'*énergie du système*.

Pour définir l'énergie du système, nous avons fait choix d'un certain état du système déterminé une fois pour toutes, que nous avons nommé l'état o. Mais ce choix était arbitraire. Nous aurions pu raisonner de même en choisissant une fois pour toutes un état ω, différent de l'état o. Si nous désignons par $\alpha_\omega, \beta_\omega, \ldots, \lambda_\omega$ les valeurs des variables qui déterminent les propriétés du système dans l'état ω; par u_ω, v_ω, w_ω, u'_ω, v'_ω, w'_ω les composantes des vitesses qui, dans cet état, animent les diverses parties du système, nous aurions obtenu une nouvelle détermination de l'énergie du système, définie par l'égalité

$$(2\,bis)\quad \left\{\begin{array}{l}\psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots | \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ \quad = \varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots).\end{array}\right.$$

Évaluons la différence entre les valeurs correspondantes de ces deux déterminations de l'énergie.

Les égalités (2) et (2 *bis*) donnent

$$\begin{array}{l}\varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ \quad = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots | \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ \quad\quad - \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots).\end{array}$$

Mais l'égalité (3) montre que l'on a

$$\begin{aligned}&\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\&\quad = -\psi(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\&\quad = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\&\qquad + \psi(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots),\end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (1),

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\&\quad = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots).\end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité est une constante.

Donc *les valeurs que deux déterminations de l'énergie prennent pour un même état du système diffèrent par une constante;* ce qu'on peut encore énoncer en disant que *l'énergie est déterminée à une constante près.*

2. *La force vive et l'énergie interne.* — Toute transformation subie par un système se décompose en deux éléments. En premier lieu, un *changement d'état;* les variables qui définissent l'état du système passent des valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ aux valeurs $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$. En second lieu, un *changement de mouvement;* les composantes des vitesses qui animent les parties matérielles élémentaires du système passent des valeurs $u_1, v_1, w_1, u'_1, v'_1, w'_1, \ldots$ aux valeurs $u_2, v_2, w_2, u'_2, v'_2, w'_2, \ldots$. C'est sur la distinction de ces deux éléments de toute transformation qu'est fondée la convention suivante, d'un caractère plus arbitraire que les précédentes :

Quatrième convention. — *L'œuvre accomplie pendant une transformation d'un système par les corps étrangers au système est la somme de deux termes : l'un dépend du changement d'état du sys-*

tème et ne dépend pas de son mouvement; l'autre dépend du changement du mouvement du système et ne dépend pas de son état.

Cette convention s'exprime par l'identité

$$(4)\quad \begin{cases} \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots \mid \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) \\ \quad = \varphi(\alpha_1, \ldots, \lambda_1 \mid \alpha_2, \ldots, \lambda_2) + \chi(u_1, v_1, w_1, \ldots \mid u_2, v_2, w_2, \ldots). \end{cases}$$

En vertu de cette égalité (4), l'égalité (2) devient

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = \varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda) \\ \qquad + \chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots). \end{cases}$$

Les quantités $\alpha_0, \ldots, \lambda_0$ sont choisies une fois pour toutes; la quantité

$$\varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda)$$

est donc une fonction des seules variables $\alpha, \ldots, \lambda$; nous pouvons poser

$$(6)\qquad \varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda) = \mathrm{U}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda).$$

De même, les quantités $u_0, v_0, w_0, \ldots$ sont choisies une fois pour toutes; la quantité

$$\chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots)$$

est donc une fonction des seules variables $u, v, w, \ldots$; nous pouvons poser

$$(7)\qquad \chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots) = \mathrm{K}(u, v, w, \ldots).$$

En vertu des égalités (6) et (7), l'égalité (5) devient

$$(8)\qquad \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = \mathrm{U}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \mathrm{K}(u, v, w, \ldots).$$

L'énergie d'un système est la somme de deux termes : l'un dépend uniquement de l'état du système et point de son mouvement;

l'autre, indépendant de l'état du système, est connu lorsqu'on connaît la vitesse qui anime chacune des parties élémentaires du système.

Le premier terme se nomme l'*énergie potentielle* ou l'*énergie interne;* le second se nomme l'*énergie actuelle* ou l'*énergie cinétique;* nous allons chercher à déterminer la forme de cette dernière.

Nous remarquerons, en premier lieu, que les vitesses désignées par $u_0, v_0, w_0, \ldots$ ont été choisies arbitrairement; désormais nous conviendrons de prendre

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 0, \qquad w_0 = 0, \qquad \ldots.$$

Or, d'après l'égalité (7), la fonction $K(u, v, w, \ldots)$ est égale à o si l'on a

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0, \qquad \ldots.$$

Par conséquent, nous serons assuré désormais que *la fonction*

$$K(u, v, w, \ldots)$$

est égale à o *lorsque l'on a*

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad \ldots.$$

Nous nous fonderons en second lieu sur une convention que l'on peut regarder comme inévitable, et que nous énoncerons ainsi :

Cinquième convention. — *Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes les unes des autres et infiniment éloignées les unes des autres, l'œuvre accomplie pendant une modification quelconque du système par les corps étrangers à ce système est la somme des œuvres accomplies pendant la modification correspondante de chacune des parties par les corps étrangers à ces parties.*

De cet énoncé, on déduit sans peine les conséquences suivantes :

Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes

les unes des autres et infiniment éloignées les unes des autres, l'énergie interne du système est la somme des énergies internes des parties isolées; l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des parties isolées.

L'énergie cinétique ne dépendant pas de l'état du système, nous pouvons, pour déterminer la forme de cette énergie, décomposer par la pensée le système en parties matérielles infiniment petites, isoler ces parties matérielles les unes des autres, et les disperser dans l'espace de façon qu'elles soient infiniment éloignées. Cette opération altère l'état du système; mais elle ne change pas son énergie cinétique, si l'on a soin de conserver à chaque particule matérielle, après cette opération, la vitesse dont elle était animée avant cette opération.

Mais, après cette opération, l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des diverses parties qui le composent; nous sommes donc ramenés à déterminer la forme de l'énergie cinétique d'une partie matérielle infiniment petite.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse d'une partie matérielle infiniment petite. L'énergie cinétique sera une fonction de u, v, w, $k(u, v, w)$; la forme de la fonction k dépend de la nature de la particule matérielle, mais non de son état; pour une particule donnée, la forme de cette fonction est invariable; c'est cette forme que nous voulons connaître.

SIXIÈME CONVENTION. — *Les corps étrangers à un système infiniment petit accomplissent toujours la même œuvre lorsque, à partir du repos, ils lui communiquent une vitesse de même grandeur, quelle que soit, dans l'espace, la direction de cette vitesse.*

Cette convention, qui revient à dire que, dans l'espace absolu, toutes les directions sont équivalentes, peut être regardée comme logiquement nécessaire; elle entraîne immédiatement cette conséquence : *La fonction $k(u, v, w)$ ne dépend pas isolément des trois composantes u, v, w de la vitesse* V, *mais seulement de la grandeur de cette dernière vitesse;* nous pouvons remplacer le symbole $k(u, v, w)$ par le symbole $k(V)$.

Septième convention. — *L'œuvre accomplie par les corps extérieurs pour communiquer une certaine vitesse à une particule primitivement au repos est toujours une œuvre de même signe.*

Nous conviendrons de compter *positivement* une telle œuvre. La fonction $k(V)$ sera alors essentiellement positive.

Huitième convention. — *Soient deux particules matérielles* P, P′. *Si les corps étrangers à ces deux particules effectuent la même œuvre pour communiquer à toutes deux une certaine vitese* V_0, *ils effectueront aussi la même œuvre pour communiquer à toutes deux la même vitesse* V, *quelle que soit cette dernière.*

En d'autres termes, l'égalité

$$k(V) = k'(V)$$

ne peut avoir lieu pour une certaine valeur V_0 de V sans avoir lieu identiquement.

Cette convention posée, considérons une particule à laquelle correspond une certaine fonction $k(V)$. Divisons-la elle-même en parties plus petites. Ces parties auront respectivement pour énergie cinétique $x(V)$, $x'(V)$, ... Nous savons que l'énergie cinétique $k(V)$ de la première partie aura pour valeur

$$k(V) = x(V) + x'(V) + \dots \tag{9}$$

D'ailleurs chacune des quantités $x(V)$, $x'(V)$, ... est positive; chacune d'elles est donc inférieure à $k(V)$. Ainsi, *si un élément matériel est une partie d'un autre élément matériel, pour une même vitesse il a une moindre énergie cinétique.* D'ailleurs, il est évident que l'*énergie cinétique d'un élément matériel pour une vitesse donnée varie d'une manière continue si l'on fait croître ou décroître d'une manière continue la quantité de matière que renferme cet élément.* En s'appuyant sur ces deux propositions, on démontre sans peine la proposition suivante : *Étant donnée une particule matérielle* P, *on peut toujours, quel que soit l'entier* N, *la diviser en* N

particules qui, pour une valeur donnée, aient même énergie cinétique. La convention précédente montre que *ces* N *particules auront toujours même énergie cinétique si on les anime toutes d'une même vitesse, quelle que soit d'ailleurs cette vitesse*. Si, à cette proposition, on joint l'égalité (9), on voit sans peine que, *pour une même vitesse, l'énergie cinétique de chacune de ces particules est la* $N^{\text{ième}}$ *partie de l'énergie cinétique de la particule* P.

Prenons deux éléments matériels quelconques P et P', dont les énergies cinétiques sont représentées par les fonctions $k(V)$ et $k'(V)$. Soit V_0 une valeur particulière de V. Considérons le rapport $\frac{k'(V_0)}{k(V_0)}$ et supposons tout d'abord ce rapport commensurable.

Posons

$$\frac{k'(V_0)}{k(V_0)} = \frac{N'}{N},$$

N et N' étant deux nombres entiers premiers entre eux.

Divisons la particule P en N éléments ϖ, ... ayant, pour une même vitesse, des énergies cinétiques $x(V)$, ... égales entre elles et égales à $\frac{k(V)}{N}$.

Divisons la particule P' en N' éléments ϖ', ... ayant, pour une même vitesse, des énergies cinétiques $x(V)$, ... égales entre elles et égales à $\frac{k'(V_0)}{N'}$.

Nous aurons

$$x(V_0) = \frac{k(V_0)}{N}, \quad x'(V_0) = \frac{k'(V_0)}{N'},$$

et, par conséquent,

$$x(V_0) = x'(V_0).$$

Dès lors, d'après la convention précédente, on a, quel que soit V,

$$x(V) = x'(V),$$

en sorte que les égalités

$$k(V) = Nx(V), \quad k'(V) = N'x'(V)$$

donnent

$$\frac{k(V)}{k'(V)} = \frac{N}{N'} = \frac{k(V_0)}{k'(V_0)}.$$

Les énergies cinétiques qui, pour deux éléments matériels différents, correspondent à une même vitesse, sont entre elles dans un rapport indépendant de cette vitesse.

Nous venons de démontrer cette proposition pour le cas où le rapport $\frac{k'(V_0)}{k(V_0)}$ est commensurable. Mais elle est évidemment générale; car si le rapport $\frac{k'(V)}{k(V)}$ était variable avec V, il serait une fonction continue de V. Donc, pour certaines valeurs de V, il passerait par des valeurs commensurables; le raisonnement précédent montrerait alors que l'hypothèse où $\frac{k'(V)}{k(V)}$ varie avec V est absurde.

Considérons deux corps d'étendue finie quelconque, C et C′, et supposons tous les points de ces deux corps animés d'une certaine vitesse V. Soient $K(V)$ et $K'(V)$ leurs énergies cinétiques. Chacune de ces énergies cinétiques est la somme des énergies qu'auraient, pour la même vitesse, les divers éléments matériels en lesquels chacun des deux corps peut être censé divisé. Dès lors, il n'est pas malaisé de déduire de la proposition précédente que *le rapport* $\frac{K'(V)}{K(V)}$ *est indépendant de la vitesse* V; *il dépend uniquement de la nature des deux corps* C *et* C′.

Prenons un corps déterminé Γ, par exemple le kilogramme des Archives. Supposons que tous les points de ce corps soient animés d'une même vitesse V. Soit $\chi(V)$ l'énergie cinétique de ce corps dans ces circonstances.

Soit ensuite un autre corps C quelconque, fini ou infiniment petit. Supposons que tous les points de ce corps soient animés de la même vitesse V.

Soit $K(V)$ l'énergie cinétique du corps C dans ces conditions.

Posons

$$K(V) = M\chi(V). \tag{10}$$

Au sujet du nombre M, que définit cette égalité (10), nous pouvons immédiatement affirmer les propositions suivantes :

1° *Le nombre* M *ne dépend pas de la vitesse* V; *il dépend uniquement de la nature des corps* Γ *et* C;

2° *Le nombre* M *est essentiellement positif;*

3° *Le nombre* M *relatif à un élément matériel infiniment petit est infiniment petit comme cet élément;*

4° *Le nombre* M *relatif à un ensemble de corps est égal à la somme des nombres analogues relatifs aux divers corps qui composent cet ensemble;*

5° *Pour le corps* Γ, *le nombre* M *est égal à* 1.

Le nombre M se nomme la *masse* du corps C. On dit que le corps Γ constitue la *masse étalon* ou l'*unité de masse*.

On voit que la masse d'un corps est proportionnelle à l'œuvre que doivent effectuer les corps étrangers à celui-là pour le faire passer du repos à un état de mouvement où tous ses points sont animés d'une même vitesse donnée.

Considérons un système quelconque, dont les diverses parties élémentaires P, P′, P″, ... sont animées de vitesses quelconques V, V′, V″, ... L'énergie cinétique de ce système est la somme des énergies cinétiques de ses diverses parties. Or, si l'on désigne par $m, m', m'', \ldots$ les masses des éléments P, P′, P″, ..., ces énergies cinétiques partielles auront respectivement pour valeurs, d'après l'égalité (10),

$$m\chi(V), \qquad m'\chi(V'), \qquad m''\chi(V''), \qquad \ldots.$$

L'énergie cinétique du système a donc pour valeur

$$K = m\chi(V) + m'\chi(V') + m''\chi(V'') + \ldots = \sum m\chi(V). \tag{11}$$

La forme de cette énergie cinétique nous sera donc entièrement connue si nous déterminons la forme de la fonction $\chi(V)$. Pour effectuer cette détermination, nous nous appuierons sur une nouvelle convention.

Neuvième convention. — *Pour imprimer à tous les points d'un élément matériel une certaine vitesse dans une direction* D, *les corps extérieurs doivent accomplir la même œuvre, soit que l'élément matériel parte du repos, soit qu'il soit primitivement animé d'une vitesse quelconque dans une direction* D′, *normale à* D.

Admettons cette convention qui, bien que se présentant assez naturellement à l'esprit, n'a nullement le caractère de la nécessité logique.

Soit V une vitesse; soient u, v, w ses composantes suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, Oz. Supposons ces trois composantes positives. Prenons un élément matériel de masse m et donnons-lui une vitesse u dans la direction Ox. Nous effectuerons une œuvre ayant pour grandeur

$$g_1 = m\chi(u).$$

L'élément étant déjà animé de cette vitesse u dans la direction Ox, lançons-le, en outre, avec la vitesse v dans la direction Oy. D'après la convention précédente, l'œuvre accomplie dans cette seconde modification est la même que si nous communiquions la vitesse v, dans la direction Oy, au mobile partant du repos; elle a donc pour grandeur

$$g_2 = m\chi(v).$$

A l'élément déjà animé des deux vitesses u suivant Ox et v suivant Oy, appliquons une œuvre capable de lui communiquer une vitesse w suivant Oz; cette œuvre, égale, d'après la convention précédente, à celle qui communiquerait une vitesse w suivant Oz au mobile partant du repos, a pour valeur

$$g_3 = m\chi(w).$$

L'ensemble de ces trois modifications prend le mobile au repos et l'anime de la vitesse V. L'œuvre accomplie dans l'ensemble de ces trois modifications, œuvre qui a pour valeur $(g_1 + g_2 + g_3)$, doit être égale à $m\chi(\mathrm{V})$.

On doit donc avoir identiquement

$$\chi(V) = \chi(u) + \chi(v) + \chi(w).$$

En différentiant cette identité par rapport à u, et en tenant compte de l'égalité

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2,$$

nous trouvons

$$\frac{\frac{d\chi(u)}{du}}{\frac{d\chi(V)}{dV}} = \frac{u}{V}.$$

Les valeurs de u et de V sont quelconques. On voit donc que $\frac{d\chi(V)}{dV}$ doit être proportionnel à V. Si l'on observe en outre que $\chi(V)$ doit s'annuler avec V, on arrive à cette conclusion :

La fonction $\chi(V)$ *est proportionnelle à* V^2.

Nous poserons

$$\chi(V) = \frac{V^2}{2E}, \tag{12}$$

E étant une quantité *essentiellement positive* et indépendante de V.

Dès lors, d'après l'égalité (11), l'énergie cinétique d'un système quelconque est donnée par la formule

$$K = \frac{1}{E} \sum \frac{mV^2}{2}. \tag{13}$$

La quantité

$$\mathfrak{T} = \sum \frac{mV^2}{2} \tag{14}$$

se nomme la *force vive du système*.

La constante E se nomme l'*équivalent mécanique de la chaleur;* nous verrons plus tard la raison de cette dénomination. La valeur de

cette constante dépend des unités de longueur, de temps, de masse et d'œuvre. L'égalité (12) montre en effet que, si l'on prend la masse étalon Γ au repos et si on la lance avec une vitesse qui lui fasse parcourir l'unité de longueur pendant l'unité de temps, l'œuvre effectuée devra être numériquement égale à $\frac{1}{2E}$.

D'après les égalités (8), (13) et (14), l'énergie d'un système quelconque est donnée par la formule

$$(15) \qquad \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \frac{\mathfrak{T}}{E}.$$

Relativement à l'énergie interne $U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, il nous reste une dernière convention à poser.

Dixième convention [1]. — *La valeur de l'énergie interne d'un système ne change pas lorsqu'on change seulement sa position absolue dans l'espace, sans changer aucune des autres propriétés de ce système.*

Ainsi, parmi les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, celles-là ne figurent pas dans l'expression de $U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ qui servent seulement à fixer la position absolue du système dans l'espace.

3. *Le principe de la conservation de l'énergie.* — Les conventions que nous avons énumérées dans ce qui précède nous ont amené à définir la forme d'une certaine quantité algébrique propre à servir de symbole à la notion d'œuvre effectuée, pendant une transformation d'un système, par les corps étrangers à ce système. Cette quantité algébrique est égale à l'accroissement que la transformation considérée fait subir à l'énergie totale du système.

Mais, dans le cas où aucun corps étranger au système n'agit sur le système, l'œuvre accomplie par les corps étrangers durant une modi-

---

[1] Cette convention pourrait sembler *évidente* à quelques esprits; si, toutefois, on observe que l'énergie interne d'un système dépend du mouvement *absolu* de ce système, on voit qu'il ne serait nullement *absurde* de la regarder comme dépendant aussi des sa position *absolue* dans l'espace.

fication quelconque du système doit évidemment être égale à o. Nous sommes donc amené à énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système matériel, isolé dans l'espace, éprouve une transformation quelconque, l'énergie totale de ce système demeure invariable par l'effet de cette transformation.

Cette proposition, qu'exprime l'égalité

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \frac{\mathfrak{C}}{E} = \text{const.}, \tag{16}$$

constitue le *principe de la conservation de l'énergie*.

Elle se distingue de toutes celles que nous avons énoncées dans ce qui précède. Celles-ci, en effet, avaient un caractère arbitraire; en dernière analyse, nous sommes absolument libres de considérer la quantité

$$G = U(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2) + \frac{\mathfrak{C}_2}{E},$$
$$- U(\alpha_1, \beta_3, \ldots, \lambda_1) + \frac{\mathfrak{C}_1}{E}$$

et de lui donner tel nom qu'il nous plaira, par exemple le nom d'*œuvre* accomplie par les corps étrangers au système. Mais, lorsque nous énonçons que, dans toute transformation d'un système isolé, il existe une quantité de la forme

$$U(\alpha, \beta, \ldots \lambda) + \frac{\mathfrak{C}}{E},$$

qui demeure invariable, nous énonçons une proposition dont les conséquences peuvent être ou conformes ou contraires à l'expérience; une proposition que nous ne pouvons pas admettre ou rejeter à notre fantaisie; en un mot, une *hypothèse physique*, la première que nous ayons rencontrée jusqu'ici. Les considérations exposées aux n^{os} **1** et **2** ont pour but d'introduire cette hypothèse, de nous conduire à la formuler; elles ne la démontrent pas. C'est à l'expérience d'en vérifier les conséquences plus ou moins éloignées.

CHAPITRE III.

LE TRAVAIL ET LA QUANTITÉ DE CHALEUR.

1. *Établissement d'une équation fondamentale.* — Considérons un système Σ, isolé dans l'espace, et susceptible d'être lui-même subdivisé en deux systèmes indépendants, S et S'.

Soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$ les variables qui déterminent la position du système S, isolé dans l'espace et son état; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont celles de ces variables qui figurent dans les équations (1) du Chapitre I relatives au système S; $a, b, \ldots, l$ sont celles qui n'y figurent pas.

Soient, de même, $\alpha', \beta', \ldots, \lambda', a', b', \ldots, l'$ les variables qui déterminent la position du système S', isolé dans l'espace, et son état.

Si le système S était isolé dans l'espace, son énergie interne serait une certaine fonction de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$, que nous désignerons par

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l).$$

Sa force vive serait une forme quadratique des variables

$$u = \frac{d\alpha}{dt}, \quad v = \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad w = \frac{d\lambda}{dt};$$

elle dépendrait en outre d'une manière quelconque des variables α, $\beta, \ldots, \lambda$, mais point des variables $a, b, \ldots, l$. Soit $\mathfrak{T}$ cette force vive.

Si le système S' était isolé dans l'espace, son énergie interne serait une certaine fonction de $\alpha', \beta', \ldots, \lambda', a', b', \ldots, l'$, que nous désignerons par

$$U'(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', a', b', \ldots, l').$$

Sa force vive serait une forme quadratique des variables

$$u' = \frac{d\alpha'}{dt}, \quad v' = \frac{d\beta'}{dt}, \quad \ldots, \quad w' = \frac{d\lambda'}{dt};$$

elle dépendrait en outre d'une manière quelconque des variables α', β', ..., λ', mais point des variables α', β', ..., l'. Soit $\mathfrak{T}'$ cette force vive.

Considérons le système Σ.

Si l'on connaît les variables

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l,$$
$$\alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l',$$

on connaît la position et l'état de chacun des deux systèmes S et S' qui le composent; on connaît donc l'état du système Σ. L'énergie interne du système Σ sera une fonction de ces variables. Désignons-la par

$$\Upsilon(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l,\ \alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l').$$

Nous pourrons évidemment écrire

$$(1)\quad \begin{cases} \Upsilon = \quad \mathrm{U}(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l) \\ \quad + \mathrm{U}'(\alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l') \\ \quad + \Psi(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l,\ \alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l'). \end{cases}$$

Quant à la force vive du système Σ, elle est évidemment égale à $(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}')$.

L'énergie totale du système Σ aura pour valeur

$$(2)\qquad \mathcal{E} = \Upsilon + \frac{1}{\mathrm{E}}(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}').$$

Écrivons que la modification infiniment petite éprouvée par le système Σ, pendant le temps dt, laisse invariable la valeur de cette énergie $\mathcal{E}$.

Posons

$$\varphi = \frac{da}{dt},\qquad \chi = \frac{db}{dt},\qquad \ldots,\qquad \psi = \frac{dl}{dt},$$
$$\varphi' = \frac{da'}{dt},\qquad \chi' = \frac{db'}{dt},\qquad \ldots,\qquad \psi' = \frac{dl'}{dt}.$$

D'après l'égalité (1), pendant le temps dt, Υ éprouvera une variation

$$\begin{aligned}\delta\Upsilon = \Big[& \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right) u + \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}\right) v + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}\right) w \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial \Psi}{\partial a}\right) \varphi + \left(\frac{\partial U}{\partial b} + \frac{\partial \Psi}{\partial b}\right) \chi + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial l} + \frac{\partial \Psi}{\partial l}\right) \psi \\ & + \left(\frac{\partial U'}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha'}\right) u' + \left(\frac{\partial U'}{\partial \beta'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta'}\right) v' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda'}\right) w' \\ & + \left(\frac{\partial U'}{\partial a'} + \frac{\partial \Psi}{\partial a'}\right) \varphi' + \left(\frac{\partial U'}{\partial b'} + \frac{\partial \Psi}{\partial b'}\right) \chi' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial l'} + \frac{\partial \Psi}{\partial l'}\right) \psi' \Big] dt.\end{aligned}$$

Quant à la variation subie par la force vive pendant le même temps, un calcul connu permet de la mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\delta(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}') = -\Big[& \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right) u \\ & + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v}\right) v + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}\right) w \\ & + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial u'}\right) u' \\ & + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \beta'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial v'}\right) v' + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial w'}\right) w' \Big] dt.\end{aligned}$$

Si nous exprimons que l'énergie totale $\mathcal{E}$, donnée par l'égalité (2), est demeurée invariable, nous trouvons l'égalité suivante

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & \left[\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right)\right] u \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}\right)\right] w \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)\varphi + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial l} + \frac{\partial \Psi}{\partial l}\right)\psi \\ & + \left[\frac{\partial U'}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha'} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial u'}\right)\right] u' \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[\frac{\partial U'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda'} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial w'}\right)\right] w' \\ & + \left(\frac{\partial U'}{\partial a'} + \frac{\partial \Psi}{\partial a'}\right)\varphi' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial l'} + \frac{\partial \Psi}{\partial l'}\right)\psi' = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité fondamentale va nous servir de point de départ pour les considérations qui feront l'objet du présent Chapitre.

2. *Du travail.* — Posons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = -A, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a} = -\mathcal{A}, \\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta} = -B, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial b} = -\mathcal{B}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = -L, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l} = -\mathcal{L}. \end{array}\right.$$

Nous dirons que les quantités A, B, ..., L représentent les *forces* exercées par le système S′ sur le système S; que les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{L}$ représentent les *influences* exercées par le système S′ sur le système S. L'ensemble des forces et des influences exercées par le système S′ sur le système S se nommera l'ensemble des *actions* du système S′ sur le système S.

La quantité

$$(Au + Bv + \ldots + Lw)\,dt$$

est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *forces* que le système S′ exerce sur le système S; la quantité

$$(\mathcal{A}\varphi + \mathcal{B}\chi + \ldots + \mathcal{L}\psi)\,dt$$

est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *influences* que le système S′ exerce sur le système S. La somme des deux quantités précédentes est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *actions* du système S′ sur le système S.

Considérons une modification virtuelle du système S; soient

$$\delta\alpha,\quad \delta\beta,\quad \ldots,\quad \delta\lambda,\quad \delta a,\quad \delta b,\quad \ldots,\quad \delta l$$

les variations que cette modification fait éprouver aux variables

$$\alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad \lambda,\quad a,\quad b,\quad \ldots,\quad l.$$

Les expressions

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda,$$
$$\mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta\lambda,$$
$$A\,\delta\alpha + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l$$

seront nommées respectivement :

Travail virtuel des forces exercées par le système S′ sur le système S;

Travail virtuel des influences exercées par le système S′ sur le système S;

Travail virtuel des actions exercées par le système S′ sur le système S.

Le travail (réel ou virtuel) des actions du système S′ sur le système S a pour valeur, d'après les égalités (4),

$$-E\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\,\delta\alpha + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial\Psi}{\partial a}\,\delta a + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial l}\,\delta l\right).$$

Ce n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction uniforme des variables α, β, ..., λ, a, b, ..., l, qui déterminent le système S. Pour transformer cette expression en une différentielle totale, il faudrait lui ajouter le terme

$$-E\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha'}\,\delta\alpha' + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda'}\,\delta\lambda' + \frac{\partial\Psi}{\partial a'}\,\delta a' + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial l'}\,\delta l'\right),$$

c'est-à-dire le travail des actions du système S sur le système S′.

Ainsi le travail des actions du système S′ sur le système S n'est pas, en général, une différentielle totale, mais *le travail des actions mutuelles des deux systèmes* S *et* S′ *est toujours la différentielle totale d'une fonction qui est définie d'une manière uniforme lorsqu'on connaît l'état du système* Σ *constitué par l'ensemble de deux systèmes* S *et* S′.

La fonction EΨ, dont la différentielle totale, changée de signe,

donne le travail des actions mutuelles des deux systèmes S et S′, se nomme le *potentiel* de ces actions.

Comme la fonction Υ, ce potentiel dépend des propriétés des deux systèmes S et S′ et de leur position relative, *mais point de la situation absolue que le système* Σ *occupe dans l'espace;* il en est de même des actions mutuelles des deux systèmes S et S′.

Ce théorème peut se généraliser et s'étendre à un système Σ formé de n systèmes indépendants $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Pour ne pas compliquer les notations, sans avantage sérieux au point de vue de la généralité, nous supposerons le système Σ formé seulement de trois systèmes partiels S_1, S_2, S_3.

Soient

$$\begin{gathered} \alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3 \end{gathered}$$

les trois systèmes de variables qui définissent respectivement l'état de chacun des trois systèmes S_1, S_2, S_3.

Soient

$$\begin{gathered} U_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1), \\ U_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2), \\ U_3(\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3) \end{gathered}$$

les énergies internes de ces systèmes considérés isolément.

L'énergie interne du système Σ pourra évidemment être mise sous la forme suivante :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \Upsilon = U_1 + U_2 + U_3 + \Psi(&\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ &\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ &\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{aligned} \right.$$

Pour former la fonction Ψ, nous pouvons opérer de la manière suivante : nous envisageons d'abord le système Σ_{23} formé par l'ensemble des deux systèmes S_2 et S_3; l'énergie interne de ce système sera de la

forme

$$(6)\quad \begin{cases} \Upsilon_{23} = U_2 + U_3 \\ \qquad + \Psi_{23}(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{cases}$$

Combinons ensuite ce système Σ_{23} avec le système S_1, de manière à former le système Σ. L'énergie interne de ce système sera de la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \Upsilon = U_1 + \Upsilon_{23} + X_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ \qquad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ \qquad \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{cases}$$

La comparaison des formules (5), (6) et (7) donne l'égalité

$$(8)\quad \begin{cases} \Psi = \Psi_{23}(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3) \\ \qquad + X_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ \qquad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ \qquad \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{cases}$$

Les définitions posées dans ce qui précède nous montrent que les actions exercées sur le système S_1 par le système Σ_{23}, c'est-à-dire par l'ensemble des systèmes S_2, S_3, sont déterminées par les égalités

$$(4\,bis)\quad \begin{cases} A_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial \alpha_1}, & \mathcal{A}_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial \lambda_1}, & \mathcal{L}_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial l_1}, \end{cases}$$

qui peuvent s'écrire, en vertu de l'égalité (8),

$$(4\,ter)\quad \begin{cases} A_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1}, & \mathcal{A}_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1}, & \mathcal{L}_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial l_1}. \end{cases}$$

Les actions que le système S_2 subit de la part de l'ensemble des systèmes S_3 et S_1; les actions que le système S_3 subit de la part de l'en-

semble des systèmes S_1 et S_2 sont déterminées d'une manière analogue. On déduit aisément de là la proposition suivante :

Dans un système complexe, formé de plusieurs systèmes indépendants, chacun de ces derniers subit certaines actions de la part de l'ensemble des autres; toutes ces actions, prises ensemble, admettent un potentiel.

Ce potentiel $E\Psi$ *dépend des propriétés des divers systèmes indépendants qui composent le système complexe, et de leur position relative; il ne dépend pas de la position absolue que le système complexe occupe dans l'espace.*

Des démonstrations analogues à celle qui a fourni l'égalité (8) permettent d'écrire, en faisant usage de notations semblables, les égalités

$$(8\,bis)\quad \left\{\begin{aligned}
\Psi = \Psi_{31}(&\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1) \\
&+ X_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\
&\qquad \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \\
&\qquad \alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1); \\
\Psi = \Psi_{12}(&\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, \omega_2, \ldots, l_2) \\
&+ X_3(\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \\
&\qquad \alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\
&\qquad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2).
\end{aligned}\right.$$

Ces égalités (8) et (8 *bis*) seront évidemment vérifiées si l'on pose

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
X_1 &= \Psi_{31} + \Psi_{12}, \\
X_2 &= \Psi_{12} + \Psi_{23}, \\
X_3 &= \Psi_{23} + \Psi_{31},
\end{aligned}\right.$$

qui entraînent

$$\Psi = \Psi_{23} + \Psi_{31} + \Psi_{12},$$

mais elles n'entraînent pas nécessairement ces égalités (9).

Voyons à quelles conséquences conduiraient ces égalités (9).

Les actions que le système S_2 exercerait sur le système S_1, si ces

deux systèmes existaient seuls, seraient données par les égalités

$$A_{12} = -E\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \alpha_1}, \qquad \mathcal{A}_{12} = -E\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial a_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$L_{12} = -E\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \lambda_1}, \qquad \mathcal{L}_{12} = -E\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial l_1}.$$

Les actions que le système S_3 exercerait sur le système S_1, si ces deux systèmes existaient seuls, seraient données par les égalités

$$A_{13} = -E\frac{\partial \Psi_{13}}{\partial \alpha_1}, \qquad \mathcal{A}_{13} = -E\frac{\partial \Psi_{13}}{\partial a_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$L_{13} = -E\frac{\partial \Psi_{13}}{\partial \lambda_1}, \qquad \mathcal{L}_{13} = -E\frac{\partial \Psi_{13}}{\partial l_1}.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (4 *bis*) et aux égalités (9), donnent

$$A_1 = A_{12} + A_{13}, \qquad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{13},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$L_1 = L_{12} + L_{13}, \qquad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{13}.$$

De ces égalités, et d'autres égalités analogues, qui se démontreraient de la même manière, on déduirait le théorème suivant :

Dans un système complexe formé de plusieurs systèmes indépendants, les actions que chacun de ces derniers subit de la part de l'ensemble des autres s'obtiennent en superposant les actions qu'il subirait de la part de chacun des autres, si chacun des autres était placé seul en sa présence.

On voit que *ce théorème, bien que compatible avec la définition des actions mutuelles qui s'exercent entre divers systèmes, n'en est cependant pas une conséquence nécessaire.* Toutes les fois que, dans une théorie particulière, on en admettra l'exactitude, on fera par cela même une hypothèse.

Revenons à l'étude générale d'un système Σ composé de n systèmes

indépendants $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Supposons que ces n systèmes soient n corps dont chacun occupe, dans l'espace, une position variable, mais possède un état invariable. Nous dirons alors que *toute modification du système est un déplacement sans changement d'état*.

Lorsqu'on déplace simplement le système S_i dans l'espace, sans en changer les propriétés, l'énergie interne U_i de ce système demeure invariable; par conséquent, dans un déplacement sans changement d'état, chacune des quantités $U_1, U_2, \ldots, U_n$ demeure invariable. D'après l'égalité (5), l'énergie interne Υ du système Σ ne diffère que par une constante de la fonction Ψ. On arrive donc au théorème suivant :

Lorsqu'un système complexe, formé de plusieurs systèmes indépendants, est assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état, l'ensemble des actions qui s'exercent entre les divers systèmes partiels admet pour potentiel le produit de l'énergie interne du système complexe par l'équivalent mécanique de la chaleur.

Ce théorème est très fréquemment employé dans les applications de la Thermodynamique.

De ce théorème en découle un autre :

Soit $\mathfrak{T}$ la force vive du système Σ. L'énergie totale de ce système aura pour valeur $\left(\Upsilon + \frac{1}{E}\mathfrak{T}\right)$. Si le système Σ est isolé, cette énergie totale ne peut varier. L'égalité

$$\Upsilon + \frac{1}{E}\mathfrak{T} = \text{const.}$$

doit subsister dans toute modification du système. Si le système Σ est assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état, cette égalité pourra être remplacée par la suivante

$$E\Psi + \mathfrak{T} = \text{const.}$$

ou

$$E\,d\Psi + d\mathfrak{T} = 0.$$

Or $(-\mathrm{E}\,d\Psi)$ représente le travail qu'ont effectué les actions qui s'exercent entre les systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_n$, pendant que la force vive du système Σ a augmenté de $d\mathfrak{T}$; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Concevons un système complexe, formé de systèmes indépendants, isolé, et assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état; dans toute modification réelle que subit un pareil système, sa force vive subit un accroissement égal au travail qu'accomplissent les actions qui s'exercent entre les divers systèmes partiels dont il est composé.

On remarquera que nous avons défini les forces et les influences qu'un système matériel subit de la part d'un autre système dont il est indépendant; nous n'avons pas défini les forces ou les influences qui s'exercent entre deux parties d'un même système, lorsque ces deux parties ne peuvent être regardées comme deux systèmes indépendants. Parfois, en Physique, on parle de semblables forces ou de semblables influences; c'est ainsi qu'en Électrodynamique on parle des actions qui s'exercent entre les diverses parties d'un même conducteur traversé par des courants. Lorsqu'on voudra considérer de semblables actions, on devra en donner une définition spéciale, et il n'y aura pas lieu de s'étonner si les actions ainsi définies ne satisfont pas à certains théorèmes auxquels les actions qui s'exercent entre systèmes indépendants, définies comme nous venons de le faire, sont nécessairement assujetties. Cette remarque trouve, en Électrodynamique et en Électromagnétisme, d'importantes applications.

5. *De la quantité de chaleur.* — Revenons à l'équation fondamentale (3).

Posons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[\quad\left(\mathrm{A} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right)u \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \left(\mathrm{L} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}\right)w \\ &\quad + \left(\mathcal{A} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\right)\varphi + \ldots + \left(\mathcal{L} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l}\right)\psi\Big]\,dt = \mathrm{E}\,d\mathrm{Q}, \end{aligned}\right.$$

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[\left(A' - E\frac{\partial U'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial u'}\right)u' \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \left(L' - E\frac{\partial U'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial w'}\right)w' \\ &+ \left(\mathcal{A}' - E\frac{\partial U'}{\partial a'}\right)\varphi' + \ldots + \left(\mathcal{L}' - E\frac{\partial U'}{\partial l'}\right)\psi'\Big]dt = E\,dQ'. \end{aligned}\right.$$

L'égalité (3) deviendra, en tenant compte des égalités (4) et des égalités analogues relatives aux actions du système S sur le système S',

$$(11)\qquad dQ + dQ' = 0.$$

Nous donnerons à la quantité dQ le nom de *quantité de chaleur dégagée par le système* S dans le temps dt; lorsque cette quantité sera négative, nous dirons que sa valeur absolue est la *quantité de chaleur absorbée* par le système S durant le même temps. La quantité dQ' sera de même nommée la *quantité de chaleur* dégagée par le système S' pendant le temps dt.

L'égalité (11) nous enseigne alors que, *si l'on considère un système complexe isolé* Σ, *formé de deux systèmes indépendants* S *et* S', *dans toute modification réelle du système* Σ, *l'un des deux systèmes* S, S', *dégage autant de chaleur que l'autre en absorbe*.

Supposons le système S isolé dans l'espace. Le système S' n'existant pas, tous les termes qui composent le premier membre de l'égalité (10 *bis*) sont identiquement nuls. Il en est de même de dQ' et partant, d'après l'égalité (11), de dQ. De là le théorème suivant :

Lorsqu'un système, isolé dans l'espace, éprouve une modification réelle, il n'absorbe pas et ne dégage pas de chaleur.

Diverses théories de Physique nous conduisent à regarder un corps comme susceptible de dégager de la chaleur ou d'en absorber alors même que ce corps nous semble isolé dans le vide; cette manière de voir n'est compatible avec la définition que nous venons de donner pour la quantité de chaleur dégagée par un système que si nous regardons l'espace qui nous semble vide comme rempli par un certain

corps, l'éther. Cette remarque aide à saisir l'importance du théorème précédent.

Posons

$$(12)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u} - A = ER_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial w} - L = ER_\lambda, \end{cases}$$

$$(12\ bis)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial U}{\partial a} - \mathcal{A} = E\mathfrak{R}_a, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial l} - \mathcal{L} = E\mathfrak{R}_l. \end{cases}$$

Nous donnerons aux quantités $R_\alpha, \dots, R_\lambda, \mathfrak{R}_a, \dots, \mathfrak{R}_l$ le nom de *coefficients calorifiques* du système S, soumis à l'action du système S' et animé du mouvement qui l'anime à l'instant t. Nous voyons, en effet, que ces coefficients dépendent :

1° Des propriétés du système S;

2° Des vitesses et des accélérations des divers points de ce système;

3° Des actions du système S' sur le système S.

Envisageons une modification virtuelle $\delta\alpha, \dots, \delta\lambda, \delta a, \dots, \delta l$ du système S. Par définition, la quantité

$$(13)\qquad dQ = -(R_\alpha\,\delta\alpha + \dots + R_\lambda\,\delta\lambda + \mathfrak{R}_a\,\delta a + \dots + \mathfrak{R}_l\,\delta l)$$

se nomme la *quantité de chaleur dégagée par le système* S *dans la modification virtuelle considérée.*

Cette quantité, on le voit, n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction de $\alpha, \dots, \lambda, a, \dots, l$, car les coefficients de $\delta\alpha, \dots, \delta\lambda, \delta a, \dots, \delta l$ dépendent, en général, d'autres variables.

Nous savons que la quantité

$$(14)\qquad d\mathfrak{T} = A\,\delta\alpha + \dots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \dots + \mathcal{L}\,\delta l$$

représente le travail virtuel des actions exercées sur le système S.

Nous donnerons à la quantité

$$(15) \qquad d\tau = \left(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial u}\right)\delta\alpha + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial w}\right)\delta\lambda$$

le nom de *travail virtuel des forces d'inertie appliquées au système* S.

Les égalités (12), (12 *bis*), (13), (14) et (15) nous donnent alors l'égalité suivante, applicable à toute transformation virtuelle du système S,

$$(16) \qquad \mathrm{E}(dQ + \delta U) = d\varpi + d\tau.$$

En multipliant par l'équivalent mécanique de la chaleur la somme de la quantité de chaleur dégagée par un système durant une modification virtuelle et de la variation subie par l'énergie interne du système durant la même modification, on obtient un certain produit; ce produit est égal au travail virtuel des actions extérieures et des forces d'inertie appliquées au système.

Cette proposition constitue l'énoncé le plus général de la *loi de l'équivalence de la chaleur et du travail.*

Lorsqu'on a affaire non plus à une modification virtuelle quelconque, mais à une modification réelle, l'égalité (16) peut se transformer. Dans ce cas, en effet, le travail $d\tau$ des forces d'inertie devient égal à la variation changée de signe de la force vive, et l'on peut écrire

$$(17) \qquad d\varpi - \mathrm{E}\,dQ = \frac{d}{dt}(\mathrm{EU} + \mathfrak{C})\,dt.$$

On voit que, *pour toute modification réelle, la quantité*

$$d\varpi - \mathrm{E}\,dQ$$

est une différentielle totale.

Considérons un système Σ formé de deux systèmes partiels indépendants, S_1, S_2; soit σ le système formé par l'ensemble des corps étrangers à Σ.

Soient

$$U_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1),$$
$$U_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2)$$

les énergies internes des systèmes S_1, S_2, considérés isolément.

Le système Σ aura pour énergie interne la quantité

$$\Upsilon = U_1 + U_2 + \Psi_{12}(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2).$$

Soit u l'énergie interne du système σ considéré isolément. L'énergie interne du système formé par l'ensemble $\Sigma\sigma$ aura pour expression

$$\Upsilon + u + X,$$

X dépendant des variables qui définissent la position et les propriétés de chacun des trois systèmes S_1, S_2, σ.

Supposons que le système Σ éprouve une modification virtuelle

$$\delta\alpha_1, \quad \ldots, \quad \delta\lambda_1, \quad \delta a_1, \quad \ldots, \quad \delta l_1, \quad \delta\alpha_2, \quad \ldots, \quad \delta\lambda_2, \quad \delta a_2, \quad \ldots, \quad \delta l_2,$$

et cherchons l'expression de la quantité de chaleur dQ dégagée par le système Σ. Nous aurons

$$\begin{aligned}
E\,dQ = -\Big[& \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\alpha_1} + E\frac{\partial X}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u_1}\right)\delta\alpha_1 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\lambda_1} + E\frac{\partial X}{\partial\lambda_1} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial w_1}\right)\delta\lambda_1 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial a_1} + E\frac{\partial X}{\partial a_1}\right)\delta a_1 + \ldots + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial l_1} + E\frac{\partial X}{\partial l_1}\right)\delta l_1 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\alpha_2} + E\frac{\partial X}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u_2}\right)\delta\alpha_2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\lambda_2} + E\frac{\partial X}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial w_2}\right)\delta\lambda_2 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial a_2} + E\frac{\partial X}{\partial a_2}\right)\delta a_2 + \ldots + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial l_2} + E\frac{\partial X}{\partial l_2}\right)\delta l_2\Big].
\end{aligned}$$

Mais la force vive $\mathfrak{T}$ du système Σ est la somme des forces vives $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ des systèmes S_1, S_2. On voit donc sans peine que l'égalité précédente peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
E\,dQ = -\Bigg\{ & \left[E\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(U_1+\Psi_{12}+X) - \frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial u_1}\right]\delta\alpha_1 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[E\frac{\partial}{\partial\lambda_1}(U_1+\Psi_{12}+X) - \frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial w_1}\right]\delta\lambda_1 \\
& + E\frac{\partial}{\partial a_1}(U_1+\Psi_{12}+X)\delta a_1 + \ldots + E\frac{\partial}{\partial l_1}(U_1+\Psi_{12}+X)\delta l_1 \Bigg\} \\
& - \left[E\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(U_2+\Psi_{12}+X) - \frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial u_2}\right]\delta\alpha_2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[E\frac{\partial}{\partial\lambda_2}(U_2+\Psi_{12}+X) - \frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial w_2}\right]\delta\lambda_2 \\
& + E\frac{\partial}{\partial a_2}(U_2+\Psi_{12}+X)\delta a_2 + \ldots + E\frac{\partial}{\partial l_2}(U_2+\Psi_{12}+X)\delta l_2 \Bigg\} \\
= \; & E(dQ_1 + dQ_2),
\end{aligned}
$$

dQ_1, dQ_2 désignant les quantités de chaleur que, dans la même modification virtuelle, dégagent les deux systèmes S_1, S_2. On arrive ainsi au théorème suivant :

Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes, la quantité de chaleur qu'il dégage dans une modification virtuelle quelconque est égale à la somme algébrique des quantités de chaleur que ses diverses parties dégagent dans la même modification.

Ce théorème nous sera utile dans la suite.

Ici vient naturellement se placer une réflexion semblable à celle que nous a suggérée la définition du travail : on ne peut parler de la quantité de chaleur dégagée par chacune des parties d'un système qu'autant que chacune de ces parties peut être considérée comme un système indépendant. Lorsque les diverses parties d'un système ne sont pas indépendantes les unes des autres, le mot : quantité de chaleur dégagée par chacune d'elles n'a aucun sens.

4. *Le problème classique de la Dynamique.* — Supposons que, pour un certain système, les coefficients calorifiques

$$R_\alpha, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad \mathfrak{R}_a, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_l$$

soient tous égaux à o identiquement, ou, en d'autres termes, que la quantité de chaleur dégagée par le système dans une modification réelle ou virtuelle quelconque soit égale à o. Les égalités (12) et (12 *bis*) deviendront

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} - A = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} - L = 0, \end{array} \right.$$

$$(18\,bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \dfrac{\partial U}{\partial a} - \mathcal{A} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E \dfrac{\partial U}{\partial l} - \mathcal{L} = 0. \end{array} \right.$$

On reconnaît les équations du mouvement d'un système dans lequel les frottements sont nuls; dans le cas que l'on étudie ordinairement en Mécanique, il n'existe pas d'autres variables que celles qui figurent dans les équations (1) du Chapitre I; il n'existe donc pas d'équation du type (18 *bis*); toutes les équations qui régissent le mouvement du système ont la forme (18), donnée, on le sait, par Lagrange.

On voit que les lois de la Dynamique rentrent, comme cas particulier, dans les lois de la Thermodynamique; elles se déduisent de ces dernières en supposant tous les coefficients calorifiques du système égaux à o; mais dans quel cas cette hypothèse est-elle vérifiée? C'est une question qui reste à examiner et que rien, dans ce que nous avons dit jusqu'ici, ne permet de résoudre. Dans la plupart des cas, elle n'est résolue que par voie d'hypothèse, directe ou indirecte. D'ailleurs, nous verrons plus tard qu'il existe une autre manière, distincte de celle-là, de faire dériver les équations de la Dynamique des équations de la Thermodynamique.

5. *Calorimétrie.* — Imaginons un système isolé formé lui-même de trois systèmes indépendants, S_1, S_2, S_3, à l'égard desquels nous ferons certaines suppositions.

Soient U_1, U_2, U_3 les énergies internes des systèmes S_1, S_2, S_3 considérés isolément; l'énergie interne du système complexe formé par leur ensemble pourra s'écrire

$$\Upsilon = U_1 + U_2 + U_3 + \Psi.$$

1° A l'égard de la fonction Ψ, nous supposerons qu'elle soit de la forme

$$\Psi = \Psi_{23} + \Psi_{31} + \Psi_{12},$$

la fonction Ψ_{ij} dépendant uniquement des variables qui caractérisent l'état des deux systèmes S_i, S_j. Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante : Les actions que l'un quelconque des trois systèmes S_1, S_2, S_3 éprouve de la part de l'ensemble des deux autres s'obtiennent en composant entre elles les actions qu'il éprouve de la part de chacun des deux autres pris isolément.

2° Les actions du système S_3 sur le système S_1 sont nulles, ou sont telles qu'elles n'effectuent aucun travail dans les modifications du système S_1 que l'on a à étudier.

3° Les actions du système S_2 sur le système S_1 sont nulles; il en est de même des actions du système S_1 sur le système S_2.

De ces deux hypothèses résultent les conséquences suivantes :

Dans les modifications du système S_1 que l'on a à étudier, le travail des actions extérieures appliquées à ce système est toujours égal à o.

Les actions extérieures appliquées au système S_2 se réduisent aux actions exercées par le système S_3.

4° La quantité de chaleur dégagée ou absorbée par le système S_3 est constamment égale à o.

Comme la quantité de chaleur dégagée par l'ensemble S_1, S_2, S_3, qui forme un système isolé, doit être égale à o; comme, d'autre part, cette quantité de chaleur doit être égale à la somme des quantités de chaleur dégagée par chacun des trois systèmes S_1, S_2, S_3, on voit que la quantité de chaleur dQ_2, dégagée pendant le temps dt par le système S_2, sera égale et de signe contraire à la quantité de chaleur dQ_1, déga-

gée par le système S_1 pendant le même temps,

$$dQ_1 + dQ_2 = 0. \tag{19}$$

A l'égard de la quantité dQ_1, on peut écrire, en vertu de l'égalité (10), et en observant que, d'après nos hypothèses,

$$(A_1 u_1 + \ldots + L_1 \varpi_1 + \mathcal{A}_1 \varphi_1 + \ldots + \mathcal{L}_1 \psi_1)\, dt = 0,$$

l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\Big[& \left(E \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha_1}\right) u_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(E \frac{\partial U_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \varpi_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda_1}\right) \varpi_1 \\ & + \; E \frac{\partial U_1}{\partial a_1}\varphi_1 + \ldots + E\frac{\partial U_1}{\partial l_1}\psi_1 \Big]\, dt = -\, E\, dQ_1.\end{aligned}$$

En vertu de l'égalité (19), celle-ci devient

$$\begin{aligned} E\, dQ_2 = \quad \Big[& \left(E \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha_1}\right) u_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(E \frac{\partial U_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \varpi_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda_1}\right) \varpi_1 \\ & + \; E \frac{\partial U_1}{\partial a_1}\varphi_1 + \ldots + E\frac{\partial U_1}{\partial l_1}\psi_1 \Big]\, dt.\end{aligned}$$

Cette égalité s'intègre immédiatement et donne l'expression suivante pour la quantité de chaleur Q_2 dégagée par le système S_2 pendant une modification finie quelconque

$$EQ_2 = EU''_1 + \mathfrak{T}''_1 - EU'_1 - \mathfrak{T}'_1, \tag{20}$$

U'_1, $\mathfrak{T}'_1$ représentant les valeurs de U_1, $\mathfrak{T}_1$ à l'instant initial de la modification, et U''_1, $\mathfrak{T}''_1$ représentant les valeurs de U_1, $\mathfrak{T}_1$ à l'instant final de la même modification.

Cette égalité (20) permet déjà d'apprécier l'égalité des quantités de chaleur dégagées par des modifications différentes produites au sein de systèmes différents.

Supposons, en effet, que nous conservions le système S_1, mais que nous remplacions l'ensemble (S_2, S_3) par divers ensembles (S'_2, S'_3), (S''_2, S''_3), ..., les hypothèses indiquées demeurant toujours vérifiées. Si, durant des modifications diverses de ces divers ensembles, le système S_1 est toujours parti du même état initial et du même mouvement initial pour aboutir au même état final et au même mouvement final, les quantités de chaleur Q_2, Q'_2, Q''_2, ..., dégagées dans ces diverses modifications par les systèmes S_2, S'_2, S''_2, ..., soumis respectivement aux actions des S_1, S'_1, S''_1, ..., sont égales entre elles.

Imposons maintenant au système S_1 de nouvelles restrictions :

5° Le système S_1 est en repos au début et à la fin de chacune des modifications que nous étudions, ou, s'il est en mouvement, son mouvement absolu est le même dans les deux cas ;

6° L'état du système S_1 est fixé par la connaissance d'une seule variable α_1 ;

7° Dans les modifications étudiées, la valeur finale de cette variable α''_1 diffère peu de sa valeur initiale α'_1.

La cinquième hypothèse nous donne

$$\mathfrak{T}''_1 - \mathfrak{T}'_1 = 0.$$

La sixième et la septième nous permettent d'écrire

$$U''_1 - U'_1 = \varpi_1(\alpha''_1 - \alpha'_1),$$

ϖ_1 dépendant uniquement de l'état initial du système S_1.

L'égalité (20) devient alors

$$Q_2 = \varpi_1(\alpha''_1 - \alpha'_1).$$

Si donc nous avons soin de toujours prendre le système S_1 dans le même état initial, et si, dans diverses modifications des ensembles (S_1, S_2), (S'_1, S'_2), (S''_1, S''_2), ..., nous observons les variations

$(\alpha''_1 - \alpha'_1)$, $(\alpha''_1 - \alpha'_1)'$, $(\alpha''_1 - \alpha'_1)''$, ... subies par la variable qui définit l'état du système S_1, nous pourrons déterminer les valeurs relatives des quantités de chaleur Q_2, Q'_2, Q''_2, ... dégagées par les systèmes S_2, S'_2, S''_2, ... dans ces diverses modifications.

Le système S_1 que nous venons de définir se nomme un *calorimètre*. Les calorimètres usités dans la pratique ne réalisent que d'une manière approchée ce type idéal du calorimètre; par des corrections diverses, fondées soit sur des hypothèses directes, soit sur les conséquences de diverses théories physiques, on s'efforce de diminuer l'écart entre leurs indications et celles du calorimètre idéal. Nous laissons au lecteur le soin de rechercher par quelle suite d'idées, dans chaque cas particulier, on est conduit à admettre que le calorimètre réel vérifie sensiblement les sept hypothèses que nous avons énumérées ([1]).

Le calorimètre détermine le rapport de deux quantités de chaleur dégagées par deux systèmes différents dans deux circonstances différentes; il permettra donc de déterminer la valeur d'une quantité de chaleur, de la mesurer d'une manière absolue, si l'on connaît la quantité de chaleur prise pour unité.

La définition donnée par les égalités (10), (12), (12 *bis*) et (13), de la quantité de chaleur dégagée durant une modification réelle ou virtuelle d'un système, montre qu'une quantité de chaleur est une grandeur de même espèce qu'une œuvre; l'unité de quantité de chaleur est donc déterminée lorsqu'on connaît l'unité d'œuvre. Effectivement, de l'égalité (10), il est facile de conclure la proposition suivante :

Si l'œuvre accomplie, durant une modification quelconque d'un système, par les corps étrangers à ce système, est égale à l'unité d'œuvre; et si, durant cette modification, les actions exercées sur ce système par les corps étrangers n'effectuent aucun travail, le sys-

---

([1]) Dans la pratique, le système S_1, invariablement lié à la terre, n'a pas *rigoureusement* le même mouvement absolu au début et à la fin de chaque modification; mais, étant données les hypothèses admises au sujet du mouvement absolu de la terre, le mouvement absolu du calorimètre subit, au cours d'une opération, des variations qui n'exercent qu'une influence négligeable sur les résultats des déterminations expérimentales.

tème absorbe durant cette modification une quantité de chaleur égale à l'unité.

A l'égard de l'unité d'œuvre, nous n'avons jusqu'ici établi aucune convention; une seule convention a été établie au sujet du *signe* de l'œuvre; nous sommes convenus de choisir ce signe de telle sorte que l'œuvre accomplie pour mettre un système en mouvement, sans changer son état, soit positive. Nous pouvons donc prendre pour unité d'œuvre une œuvre quelconque, pourvu qu'elle soit positive.

Nous allons prouver que l'œuvre accomplie pour élever la température de l'unité de masse d'eau (dont nous supposons l'état défini uniquement par la température) d'une première température déterminée, que nous nommons le 0 de l'échelle centigrade, à une autre température déterminée, que nous nommons le $+1$ de l'échelle centigrade, est positive. Nous pourrons alors prendre cette œuvre pour unité d'œuvre, l'unité de quantité de chaleur sera la quantité de chaleur absorbée par l'unité de masse d'eau, lorsque, sans travail externe, sa température s'élève de $0°$ C. à $+1°$ C.

Pour démontrer la proposition énoncée, imaginons que nous ayons un système complexe et isolé, formé lui-même de deux systèmes indépendants S et S′. Le système S est immobile; son état est supposé défini uniquement par sa température; le système S′ est un corps mobile dont l'état est supposé invariable. Ces deux systèmes S et S′ n'exercent aucune action l'un sur l'autre. Si l'on désigne par $U(\vartheta)$ l'énergie interne du système S, supposé isolé et porté à la température ϑ; par $\mathfrak{T}$ la force vive du système S′, l'énergie totale de notre système complexe aura la forme très simple

$$\mathcal{E} = U(\vartheta) + \frac{\mathfrak{T}}{E}.$$

Au début de la modification, le système S a la température ϑ; le système S′ est en mouvement, et sa force vive a la valeur $\mathfrak{T}$. Le système S′ vient heurter le système S et rebondit. Après le choc, il a une force vive $\mathfrak{T}'$; le système S a une température ϑ'. Le système étant

supposé isolé, l'énergie totale n'a pas varié. On a donc

$$U(\mathfrak{S}) + \frac{\mathfrak{T}}{E} = U(\mathfrak{S}') + \frac{\mathfrak{T}'}{E},$$

ou

$$\frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{E} = U(\mathfrak{S}') - U(\mathfrak{S}). \tag{21}$$

L'expérience montre que $\mathfrak{T}'$ est inférieur à $\mathfrak{T}$; donc

$$[U(\mathfrak{S}') - U(\mathfrak{S})]$$

est positif.

Le système S, passant sans travail externe et sans variation de force vive de la température $\mathfrak{S}$ à la température $\mathfrak{S}'$, absorberait une quantité de chaleur *positive* donnée par l'égalité

$$Q = U(\mathfrak{S}') - U(\mathfrak{S}). \tag{22}$$

Nous connaissons donc une modification qui absorbe une quantité de chaleur positive. Le calorimètre, qui nous donne en grandeur et en signe le rapport des quantités de chaleur dégagées dans deux modifications, nous permet, dès lors, de déterminer le signe de toute quantité de chaleur et de prouver *expérimentalement* la proposition énoncée.

L'unité de quantité de chaleur étant déterminée, le calorimètre nous permet de mesurer une quantité quelconque de chaleur, en particulier la quantité de chaleur Q, donnée par l'égalité (22). Si l'on mesure, d'autre part, la variation de force vive $(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}')$, on déduira de l'égalité (21) une détermination expérimentale de l'équivalent mécanique de la chaleur E.

On sait que G.-A. Hirn a réalisé une expérience réelle voisine de l'expérience idéale que nous venons de décrire.

D'autres méthodes ont été employées, notamment par Joule, pour déterminer la valeur de E. Les principes posés conduisent aisément à la justification de ces méthodes.

Commentaire aux principes de la Thermodynamique (1);

PAR M. P. DUHEM.

TROISIÈME PARTIE.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME EN ÉQUILIBRE (2).

1. *Le potentiel thermodynamique interne.* — Soient

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta) \qquad \text{et} \qquad S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$$

l'énergie interne et l'entropie d'un système. Ce système est, bien en-

---

(1) Voir t. VIII, p. 269, et t. IX, p. 293.

(2) Nous avons développé en détail les propriétés thermodynamiques des systèmes en équilibre dans un Mémoire récent : *Sur les équations générales de la Thermodynamique* (*Annales de l'École Normale,* 3e série, t. VII, p. 231). Pour éviter autant que possible de reproduire ici ce Mémoire, nous avons limité le présent Chapitre à l'exposé des propriétés indispensables pour l'intelligence des Chapitres suivants.

tendu, soumis aux restrictions indispensables pour la définition de l'entropie; en particulier, la température ϑ a la même valeur en chacun de ses points.

Posons

$$(1) \qquad \mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta) = E[U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta) - F(\vartheta) S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)].$$

La fonction $\mathcal{F}$ sera, comme les fonctions U et S, une fonction *uniforme* et continue des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$; comme les fonctions U et S, elle sera indépendante de celles de ces variables qui servent seulement à fixer la position absolue du système dans l'espace.

Les deux quantités U et S étant chacune déterminées à une constante près, la fonction $\mathcal{F}$ est déterminée à une fonction près de la température, cette fonction de la température étant de la forme

$$C + C' F(\vartheta),$$

où C et C′ sont deux constantes arbitraires.

Cette fonction $\mathcal{F}$ est une généralisation de l'une des *fonctions caractéristiques* de M. Massieu; c'est l'*available energy* de M. Gibbs et de Maxwell, la *freie Energie* de M. H. von Helmholtz. Nous lui donnerons le nom de *potentiel thermodynamique interne du système.*

Entre les actions A, B, ..., L, Θ, qui maintiennent le système en équilibre et les coefficients calorifiques du système en équilibre R_α, $R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C, nous avons les relations [IIe Partie, Chap. III, égalités (2)],

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} R_\alpha &= \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{A}{E}, \\ R_\beta &= \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{B}{E}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda &= \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{L}{E}, \\ C &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \frac{\Theta}{E}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, nous avons [IIe Partie, Chap. III, égalités (16)],

$$(3)\quad \begin{cases} R_\alpha = F(\mathfrak{T})\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ R_\beta = F(\mathfrak{T})\dfrac{\partial S}{\partial \beta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda = F(\mathfrak{T})\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ C = F(\mathfrak{T})\dfrac{\partial S}{\partial \mathfrak{T}}. \end{cases}$$

Les égalités (1), (2) et (3) donnent sans peine

$$(4)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha}, \\ B = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta}, \\ \dots\dots\dots, \\ L = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda}, \\ \Theta = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{T}} + ES\,\dfrac{dF(\mathfrak{T})}{d\mathfrak{T}}. \end{cases}$$

Si à ces équations on joint la condition que les corps étrangers au système aient la même température que lui, on obtient les *conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système*.

La dernière égalité (4) donne

$$(5)\qquad ES = \frac{1}{\dfrac{dF(\mathfrak{T})}{d\mathfrak{T}}}\left(\Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{T}}\right).$$

Les égalités (1) et (5) donnent

$$(6)\qquad EU = \mathfrak{F} + \frac{F(\mathfrak{T})}{\dfrac{dF(\mathfrak{T})}{d\mathfrak{T}}}\left(\Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{T}}\right).$$

Les égalités (3) et (5) donnent

$$(7)\quad \begin{cases} R_\alpha = \dfrac{F(\mathfrak{I})}{\dfrac{dF(\mathfrak{I})}{d\mathfrak{I}}}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{I}\,\partial\alpha}\right), \\ R_\beta = \dfrac{F(\mathfrak{I})}{\dfrac{dF(\mathfrak{I})}{d\mathfrak{I}}}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\beta} - \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{I}\,\partial\beta}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda = \dfrac{F(\mathfrak{I})}{\dfrac{dF(\mathfrak{I})}{d\mathfrak{I}}}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{I}\,\partial\lambda}\right), \\ C = \dfrac{F(\mathfrak{I})}{\dfrac{dF(\mathfrak{I})}{d\mathfrak{I}}}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\mathfrak{I}} - \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{I}^2}\right) - \dfrac{F(\mathfrak{I})\,F''(\mathfrak{I})}{[F'(\mathfrak{I})]^2}\left(\Theta - \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{I}}\right). \end{cases}$$

Ainsi donc, *si l'on connaît :*

1° *L'expression du potentiel thermodynamique interne du système;*

2° *L'expression*

$$\Theta = f_\mathfrak{I}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mathfrak{I})$$

de la quantité Θ *relative au système en équilibre,*

On peut déterminer :

1° *L'énergie interne et l'entropie du système dans un état quelconque;*

2° *Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système;*

3° *Les coefficients calorifiques du système en équilibre.*

C'est la généralisation d'une proposition bien connue de M. Massieu.

2. *Propriétés d'un système formé de plusieurs parties indépendantes qui ont la même température.* — Pour ne pas compliquer les raisonnements sans avantage au point de vue de la généralité, nous supposerons que le système soit seulement formé de deux parties distinctes, indépendantes l'une de l'autre, que nous désignerons par les indices 1 et 2. Chacune de ces deux parties sera supposée à la même

température en tous ses points; $\mathfrak{S}_1$ sera la température de la partie 1 et $\mathfrak{S}_2$ la température de la partie 2; pour le moment, nous supposerons ces températures quelconques; tout à l'heure, nous leur imposerons la condition d'être égales entre elles.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1$ les variables indépendantes qui déterminent l'état du système 1, y compris sa position absolue dans l'espace; l'énergie interne, l'entropie, le potentiel thermodynamique interne du système 1 seront des fonctions uniformes de ces variables, ou, du moins, de celles d'entre elles qui ne servent pas uniquement à déterminer la position absolue du système dans l'espace; désignons respectivement ces trois fonctions par

$$\begin{gathered} \Upsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1), \\ \Sigma_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1), \\ \mathfrak{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1). \end{gathered}$$

Soient, de même, $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2$ les variables indépendantes qui définissent l'état du système 2. Soient

$$\begin{gathered} \Upsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2), \\ \Sigma_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2), \\ \mathfrak{F}_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2) \end{gathered}$$

l'énergie interne, l'entropie et le potentiel thermodynamique interne du système 2.

L'état du système complexe (1, 2), formé par l'ensemble des deux systèmes 1 et 2, et sa position absolue dans l'espace sont déterminés lorsqu'on connaît l'ensemble des variables

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad \mathfrak{S}_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \lambda_2, \quad \mathfrak{S}_2.$$

L'énergie interne de ce système (1, 2) aura donc pour valeur

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} = {} & \Upsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1) \\ & + \Upsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2) \\ & + \mathrm{X}_{12}(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2), \end{aligned} \right.$$

X_{12} étant une fonction uniforme des variables mises en évidence, ou,

du moins, de celles de ces variables qui ne servent pas uniquement à fixer la position absolue du système (1, 2); en outre, on peut convenir de prendre cette fonction égale à 0 lorsque les deux systèmes 1 et 2 sont infiniment éloignés l'un de l'autre.

Si nous désignons par U' l'énergie interne des corps étrangers au système (1, 2), l'énergie interne du système formé par le système (1, 2) et par les corps extérieurs aura pour valeur

$$\mathcal{U} = U + U' + \Psi. \tag{9}$$

La fonction Ψ dépendra des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \vartheta_2$, et aussi des variables qui déterminent l'état des corps extérieurs au système (1, 2).

Les actions extérieures exercées sur le système (1, 2) auront pour valeurs [Ire Partie, Chap. III, égalités (4)],

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{A}_1 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}, & \mathcal{A}_2 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2}, \\ \mathcal{B}_1 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_1}, & \mathcal{B}_2 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{L}_1 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1}, & \mathcal{L}_2 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2}, \\ \mathcal{T}_1 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\vartheta_1}, & \mathcal{T}_2 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\vartheta_2}. \end{array}\right. \tag{10}$$

D'autre part, les corps extérieurs au système 1 se composent :

1° Des corps extérieurs au système (1, 2);

2° Du corps 2.

Dès lors, il est facile de voir que les actions extérieures appliquées au système 1 ont pour valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = -E\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(X_{12} + \Psi), \\ B_1 = -E\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(X_{12} + \Psi), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots, \\ L_1 = -E\dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}(X_{12} + \Psi), \\ \Theta_1 = -E\dfrac{\partial}{\partial\vartheta_1}(X_{12} + \Psi). \end{array}\right. \tag{11}$$

De même, les actions extérieures au système 2 ont pour valeurs

$$(11\ bis)\quad \begin{cases} A_2 = -E\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(X_{12}+\Psi), \\ B_2 = -E\dfrac{\partial}{\partial\beta_2}(X_{12}+\Psi), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L_2 = -E\dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(X_{12}+\Psi), \\ \Theta_2 = -E\dfrac{\partial}{\partial\vartheta_2}(X_{12}+\Psi). \end{cases}$$

Tout cela est général. Supposons maintenant que le système (1, 2) soit en équilibre, et appliquons ce principe, qui ressort évidemment de la définition de l'équilibre : *pour que le système* (1, 2) *soit en équilibre, il faut et il suffit que chacun des deux systèmes* 1 *et* 2 *soient en équilibre.*

Pour que le système 1 soit en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait, en premier lieu,

$$(12)\qquad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta,$$

ϑ étant la température commune des corps extérieurs au système (1, 2);

En second lieu, en vertu des égalités (4) et (11),

$$(13)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1}, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\beta_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1}, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\vartheta_1}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\vartheta_1} - EF'(\vartheta_1)\Sigma_1. \end{cases}$$

Pour que le système 2 soit en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait :

En premier lieu les égalités (12);

En second lieu, en vertu des égalités (4) et (11 *bis*),

$$(13\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{E}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(\mathrm{X}_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial\alpha_2},\\ \mathrm{E}\dfrac{\partial}{\partial\beta_2}(\mathrm{X}_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial\beta_2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \mathrm{E}\dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(\mathrm{X}_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial\lambda_2},\\ \mathrm{E}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta_2}(\mathrm{X}_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial\vartheta_2} - \mathrm{E}F'(\vartheta_2)\Sigma_2. \end{array}\right.$$

Lorsque les égalités (12) sont satisfaites, le système (1, 2) a un potentiel thermodynamique interne que nous désignerons par $\mathfrak{F}$ et une entropie que nous désignerons par S.

En général, le travail virtuel des forces extérieures appliquées à ce système est exprimé par

$$\begin{array}{l}\mathcal{A}_1\delta\alpha_1 + \mathcal{B}_1\delta\beta_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\delta\lambda_1 + \mathcal{E}_1\delta\vartheta_1\\ + \mathcal{A}_1\delta\alpha_2 + \mathcal{B}_2\delta\beta_2 + \ldots + \mathcal{L}_1\delta\lambda_2 + \mathcal{E}_2\delta\vartheta_2,\end{array}$$

$\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{L}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{L}_2, \mathcal{E}_2$ étant donnés par les égalités (10). Dans le cas particulier où les égalités (12) sont constamment vérifiées, ce travail virtuel devient

$$\begin{array}{l}\mathcal{A}_1\delta\alpha_1 + \mathcal{B}_1\delta\beta_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\delta\lambda_1\\ + \mathcal{A}_2\delta\alpha_2 + \mathcal{B}_2\delta\beta_2 + \ldots + \mathcal{L}_2\delta\lambda_2 + \mathcal{E}\delta\vartheta,\end{array}$$

$\mathcal{E}$ étant défini par l'égalité

$$(14)\qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta_2}\right)_{\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta}.$$

Dès lors, pour l'équilibre du système (1, 2), il faut et il suffit que l'on ait :

En premier lieu, les égalités (12);

En second lieu, en vertu des égalités (4), (10) et (14), les égalités

$$(15)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha_1}, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha_2},\\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\beta_1}, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\beta_2},\\ \dots\dots, & \dots\dots,\\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda_1}, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda_2},\\ E\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{I}_1} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{I}_2}\right) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{I}} - EF'(\mathfrak{I})S. \end{cases}$$

Le principe énoncé il y a un instant exige que, moyennant les égalités (12), l'ensemble des égalités (15) soit équivalent à l'ensemble des égalités (13) et (13 *bis*); cette condition s'exprime par les égalités

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_1 - EX_{12}) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_2 - EX_{12}) = 0,\\ \dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_1 - EX_{12}) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial\beta_2}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_2 - EX_{12}) = 0,\\ \dots\dots, & \dots\dots,\\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_1 - EX_{12}) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_2 - EX_{12}) = 0, \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{I}} - \dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{I}_1}(\mathfrak{F}_1 + EX_{12}) - \dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{I}_2}(\mathfrak{F}_2 + EX_{12})\\ \qquad + EF'(\mathfrak{I})(S - \Sigma_1 - \Sigma_2) = 0. \end{cases}$$

La fonction $\mathfrak{F}_1$ ne dépend pas des variables $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2$; la fonction $\mathfrak{F}_2$ ne dépend pas des variables $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$; les égalités (16) peuvent donc s'écrire

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0,\\ \dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0,\\ \dots\dots,\\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0,\\ \dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0,\\ \dots\dots,\\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0. \end{cases}$$

En vertu des égalités (12), on a

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathfrak{S}_1} = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathfrak{S}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathfrak{S}_2} = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathfrak{S}}.$$

En vertu de ces mêmes égalités, X_{12} peut être regardé comme une fonction des variables

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \lambda_2, \quad \mathfrak{S},$$

et l'on a

$$\frac{\partial X_{12}}{\partial \mathfrak{S}} = \frac{\partial X_{12}}{\partial \mathfrak{S}_1} + \frac{\partial X_{12}}{\partial \mathfrak{S}_2}.$$

L'égalité (17) peut donc s'écrire

$$(19) \qquad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{S}}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) + EF'(\mathfrak{S})(\Sigma_1 + \Sigma_2 - S) = 0.$$

Les égalités (18) donnent

$$(20) \qquad \mathfrak{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} + f(\mathfrak{S}),$$

$f(\mathfrak{S})$ étant une fonction arbitraire de la température $\mathfrak{S}$; l'égalité (19) donne alors

$$(21) \qquad S = \Sigma_1 + \Sigma_2 - \frac{f'(\mathfrak{S})}{EF'(\mathfrak{S})}.$$

Si l'on convient de prendre pour potentiel thermodynamique interne d'un système formé de deux parties à la même température, infiniment éloignées l'une de l'autre, la somme des potentiels thermodynamiques internes des deux parties, on aura identiquement, d'après l'égalité (20),

$$f(\mathfrak{S}) = 0.$$

Les égalités (20) et (21) deviendront donc

$$(20\ bis) \qquad \mathfrak{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12},$$

$$(21\ bis) \qquad S = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes, toutes à la même température, le potentiel thermodynamique interne du système s'obtient en faisant la somme des potentiels thermodynamiques internes des parties, et en y ajoutant l'une des déterminations du potentiel des actions mutuelles de ces parties, celle qui s'annule lorsqu'on éloigne infiniment ces parties les unes des autres.

L'entropie du système est égale à la somme des entropies des diverses parties.

Ces théorèmes ont de fréquentes applications en Thermodynamique; on peut les rapprocher d'un théorème analogue, relatif à l'énergie interne, démontré dans la Ire Partie (Chap. III, n° **2**); mais ce dernier était général, tandis que les théorèmes que nous venons de démontrer supposent que les diverses parties du système sont à la même température, et que chacune d'elles vérifie les conditions indiquées au Chapitre III de la IIe Partie.

L'égalité (21 *bis*) entraîne une nouvelle conséquence importante:

Les coefficients calorifiques du système 1 en équilibre sont

$$R_{\alpha_1}, \quad R_{\beta_1}, \quad \ldots, \quad R_{\lambda_1}, \quad C_1.$$

Les coefficients calorifiques du système 2 en équilibre sont

$$R_{\alpha_2}, \quad R_{\beta_2}, \quad \ldots, \quad R_{\lambda_2}, \quad C_2.$$

Les coefficients calorifiques du système (1, 2) en équilibre sont

$$\rho_{\alpha_1}, \quad \rho_{\beta_1}, \quad \ldots, \quad \rho_{\lambda_1}, \quad \rho_{\alpha_2}, \quad \rho_{\beta_2}, \quad \ldots, \quad \rho_{\lambda_2}, \quad \gamma.$$

Nous avons, en vertu des égalités (3),

$$\rho_{\alpha_1} = F(\vartheta)\frac{dS}{\partial\alpha_1}, \qquad \rho_{\alpha_2} = F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial\alpha_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\rho_{\lambda_1} = F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial\lambda_1}, \qquad \rho_{\lambda_2} = F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial\lambda_2},$$

$$\gamma = F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial\vartheta}.$$

Si l'on tient compte de l'égalité (21 *bis*) et si l'on observe que

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \alpha_1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \lambda_1} = 0,$$

on pourra écrire

$$\rho_{\alpha_1} = F(\vartheta)\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \alpha_1}, \quad \rho_{\alpha_2} = F(\vartheta)\frac{\partial \Sigma_2}{\partial \alpha_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\rho_{\lambda_1} = F(\vartheta)\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \lambda_1}, \quad \rho_{\lambda_2} = F(\vartheta)\frac{\partial \Sigma_2}{\partial \lambda_2},$$
$$\gamma = F(\vartheta)\left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \vartheta}\right),$$

ou bien, en vertu des égalités (3),

$$(22) \quad \begin{cases} \rho_{\alpha_1} = R_{\alpha_1}, & \rho_{\alpha_2} = R_{\alpha_2}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \rho_{\lambda_1} = R_{\lambda_1}, & \rho_{\lambda_2} = R_{\lambda_2}, \end{cases}$$
$$\gamma = C_1 + C_2.$$

Ces remarquables égalités (22) sont soumises aux mêmes restrictions que l'égalité (21 *bis*).

3. *Hypothèse fondamentale; variables normales.* — Nous allons maintenant invoquer une hypothèse fondamentale qui, en général, est admise implicitement dans les traités de Thermodynamique.

Soit un système indépendant 1, ayant la même température en tous ses points, défini par des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1$; soit ensuite un autre système indépendant quelconque 2, n'ayant pas forcément la même température en tous ses points, défini par des variables α_2, $\beta_2, \ldots, \lambda_2$, formé des corps étrangers au système 1.

L'énergie interne U du système (1, 2) pourra s'écrire

$$\begin{aligned} U = \; & \Upsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1) \\ & + \Upsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2) \\ & + \Psi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2), \end{aligned}$$

Υ_1 étant l'énergie interne du système 1 et Υ_2 l'énergie interne du système 2.

L'hypothèse que nous voulons énoncer est la suivante :

On peut choisir les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, de telle sorte :

1° Que lorsque ϑ_1 varie, $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ gardant des valeurs constantes, aucun point matériel du système 1 ne se déplace dans l'espace; la force vive $\mathfrak{T}_1$ du système 1 est alors indépendante de ϑ_1 et de $\frac{d\vartheta_1}{dt}$;

2° Que la fonction Ψ ne dépend pas de la variable ϑ_1, et cela quels que soient les corps qui composent le système 2.

Lorsque les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ ont été choisies de la sorte, nous dirons que *le système* $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1$ *forme un système de variables normales* définissant le système 1.

Le travail virtuel des actions extérieures auxquelles est soumis le système 1 est une expression de la forme

$$A_1\,\delta\alpha_1 + B_1\,\delta\beta_1 + \ldots + L_1\,\delta\lambda_1 + \Theta_1\,\delta\vartheta_1.$$

D'après les égalités (4) du Chapitre III (Ire Partie), on a

$$\Theta_1 = -E\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta_1}.$$

Si donc le système de variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1$ est un système de variables normales, on a

$$\Theta_1 = 0.$$

Si un système, ayant la même température en tous ses points, est défini par des variables normales, quels que soient les corps étrangers à ce système, les actions qu'ils exercent sur ce système n'effectuent aucun travail lorsque la température du système varie seule.

Cette proposition ne suppose pas le système en équilibre.

Que deviennent les propriétés d'un système en équilibre lorsqu'il est défini par des variables normales?

Pour un tel système, la quantité

$$\Theta = f_{\mathfrak{I}}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{I})$$

est identiquement nulle.

Dès lors, les équations (4), (5), (6) et (7) deviennent

$$(4\,bis) \qquad A = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}, \qquad B = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}, \qquad \ldots, \qquad L = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda},$$

$$(5\,bis) \qquad EF'(\mathfrak{I})\,S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{I}},$$

$$(6\,bis) \qquad EU = \mathcal{F} - \frac{F(\mathfrak{I})}{F'(\mathfrak{I})}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{I}},$$

$$(7\,bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} R_\alpha &= -\frac{F(\mathfrak{I})}{EF'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial \beta}, \\ R_\beta &= -\frac{F(\mathfrak{I})}{EF'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta\,\partial \mathfrak{I}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda &= -\frac{F(\mathfrak{I})}{EF'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \mathfrak{I}}, \\ C &= -\frac{F(\mathfrak{I})}{EF'(\mathfrak{I})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{I}^2} + \frac{F(\mathfrak{I})\,F''(\mathfrak{I})}{E[F'(\mathfrak{I})]^2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{I}}. \end{aligned} \right.$$

Lors donc qu'un système est défini par des variables normales, il suffit de connaître le potentiel thermodynamique interne de ce système pour pouvoir déterminer les équations d'équilibre, l'énergie, l'entropie et les coefficients calorifiques. C'est la proposition bien connue de M. F. Massieu.

Dorénavant, lorsque nous considérerons un système dont tous les points sont à la même température, nous le supposerons défini par des variables normales.

4. *Le problème de l'équilibre.* — Comment, en général, le pro-

blème de l'équilibre d'un système se pose-t-il, lorsqu'on connaît l'expression du potentiel thermodynamique interne de ce système?

On suppose donné l'état des corps extérieurs à ce système; ces corps sont portés à une température uniforme θ. On se propose de déterminer l'état pris par le système sous l'action de ces corps.

La fonction Ψ, considérée au numéro précédent, devient, puisque l'état des corps extérieurs au système est supposé déterminé, une fonction des seules variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, en désignant par $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$ les variables normales qui définissent le système.

En vertu des égalités (4) (Ire Partie, Chap. III) et des égalités (4 *bis*) du présent Chapitre, on a

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha} = 0, \\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta} + \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\beta} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda} = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on y joint l'équation

$$(24)\qquad \vartheta = \theta,$$

qui exprime l'égalité entre la température du système et celle des corps extérieurs, on aura un nombre d'équations égal au nombre des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, dont on veut déterminer la valeur. Ces équations permettront donc de déterminer l'état d'équilibre du système, pourvu que l'on connaisse l'expression des quantités

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\beta},\quad \ldots,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda},$$

en fonction de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$; c'est-à-dire pourvu que l'on sache comment les actions extérieures appliquées au système varient avec l'état de ce système. D'ailleurs, si les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, sont des variables normales, ces actions ne dépendent pas de la température du système.

Une fois l'état du système connu, les équations (5 *bis*), (6 *bis*), (7 *bis*) en feront connaître l'énergie, l'entropie et les coefficients calorifiques.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME EN MOUVEMENT.

1. *Sens du mot mouvement.* — Nous prenons, dans ce Chapitre, le mot *mouvement* pour désigner non seulement un changement de position dans l'espace, mais encore un changement d'état quelconque, lors même qu'il ne serait accompagné d'aucun déplacement. Ainsi, il y aurait mouvement si les variables que nous avons désignées par a, b, ..., l (Ire Partie, Chap. III, n° **4**) variaient seules, les variables α, β, ..., λ gardant des valeurs fixes. De la sorte, le mot *mouvement* s'oppose non pas au mot *repos,* mais au mot *équilibre*.

2. *Mouvement d'un système qui a la même température en tous ses points.* — Imaginons un système qui ait la même température en tous ses points, cette température n'étant pas forcément celle des corps extérieurs; ce système n'est pas en équilibre; il s'agit de déterminer les lois de son mouvement.

A chaque instant t, l'état des corps extérieurs est supposé donné. Les actions extérieures qui agissent sur le système sont, en général, des fonctions des variables α, β, ..., λ, qui définissent le système, et des variables qui définissent les corps extérieurs; ces dernières étant des fonctions données de t, les actions extérieures sont, en définitive, des fonctions données de α, β, ..., λ, t; nous les désignerons par

$$A'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t),$$
$$B'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$L'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t).$$

Posons, pour abréger,

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Lorsque le système est en équilibre, on a [Chap. I, égalités (23)],

$$A' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} = 0, \quad B' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta} = 0, \quad \ldots, \quad L' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda} = 0.$$

D'autre part, on a identiquement

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} = 0.$$

On a donc, dans le cas où le système est en équilibre,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} = 0, \\ B' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta'} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} = 0. \end{array} \right.$$

Lorsque le système n'est pas en équilibre, il n'est pas certain que ces égalités soient vérifiées; les premiers membres pourront avoir des valeurs différentes de o; désignons par $-f_\alpha, -f_\beta, \ldots, -f_\lambda$ ces valeurs; nous pourrons écrire, *sans aucune hypothèse*,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\mathfrak{T} - \mathfrak{F})}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} + A' + f_\alpha = 0, \\ \frac{\partial(\mathfrak{T} - \mathfrak{F})}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta'} + B' + f_\beta = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial(\mathfrak{T} - \mathfrak{F})}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} + L' + f_\lambda = 0. \end{array} \right.$$

Les quantités $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$ seront nommées les *résistances pas-*

sives que le système a à surmonter; la quantité

$$f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda$$

se nomme le *travail élémentaire des résistances passives.*

Jusqu'ici, nous l'avons dit, les équations (2) n'ont rien d'hypothétique; elles ne prennent un caractère hypothétique qu'à partir du moment où nous assignons une forme particulière aux résistances passives; or, voici, à cet égard, quelles suppositions nous ferons :

Première convention. — Les résistances passives f_α, f_β, ..., f_λ dépendent uniquement des variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad \vartheta,$$
$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt},$$

relatives au système, et des variables analogues relatives aux corps extérieurs.

Deuxième convention. — Les résistances passives ne changent pas de valeur, si l'on change la position absolue ou le mouvement absolu du système complexe formé par le système étudié et les corps qui lui sont étrangers; elles ne dépendent que de la *position relative* des parties du système et des corps étrangers, du *mouvement relatif* des parties du système et des corps étrangers.

Comme toutes les hypothèses que nous faisons, ces suppositions, bien que très naturelles, n'ont rien de logiquement nécessaire; elles ne peuvent être vérifiées qu'en constatant l'accord des conséquences des équations (2) avec les faits d'expérience.

Lorsque l'état des corps extérieurs est donné à chaque instant t, les résistances passives deviennent des fonctions des variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad \vartheta, \quad \alpha', \quad \beta', \quad \ldots, \quad \lambda', \quad t.$$

Les équations (2) deviennent alors des équations différentielles du second ordre, qui détermineraient les valeurs des variables α, β, ..., λ,

$\mathfrak{S}$, en fonction de t, et, partant, le mouvement du système, si elles étaient en nombre suffisant; mais *le nombre des variables dont il faut déterminer la valeur à chaque instant excède d'une unité le nombre des équations du mouvement fournies par la Thermodynamique;* il faudra donc, pour compléter la mise en équations du problème, emprunter une dernière équation à une théorie physique étrangère à la Thermodynamique; telle serait, par exemple, l'équation

$$\mathfrak{S} = \varphi(t)$$

qui ferait connaître à chaque instant la température du système.

3. *Coefficients calorifiques d'un système en mouvement.* — Les coefficients calorifiques d'un système animé d'un mouvement quelconque sont définis par les égalités [Ire Partie, Chap. III, égalités (12)],

$$(3)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} - A' = ER'_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} - L' = ER'_\lambda, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} = EC'. \end{cases}$$

Mais on a [Chap. I, égalités (1)],

$$EU = \mathfrak{F} + E\,F(\mathfrak{S})S.$$

Les égalités (3) peuvent donc s'écrire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} + E\,F(\mathfrak{S})\dfrac{\partial S}{\partial \alpha} - A' = ER'_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} + E\,F(\mathfrak{S})\dfrac{\partial S}{\partial \lambda} - L' = ER'_\lambda, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}} + E\,F(\mathfrak{S})\dfrac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} + E\,F'(\mathfrak{S})S = EC', \end{cases}$$

ou bien, en tenant compte des égalités (2) du présent Chapitre et de l'égalité (5 *bis*) du Chapitre I,

$$(4)\quad \begin{cases} ER'_\alpha = E\,F(\vartheta)\dfrac{\partial S}{\partial \alpha} + f_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ ER'_\lambda = E\,F(\vartheta)\dfrac{\partial S}{\partial \lambda} + f_\lambda, \\ EC' = E\,F(\vartheta)\dfrac{\partial S}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

Soient R_α, R_β, ..., R_λ, C les coefficients calorifiques du système en équilibre dans l'état $(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)$. Si nous comparons les égalités (4) que nous venons d'écrire aux égalités (3) du Chapitre I, nous aurons

$$(5)\quad \begin{cases} R'_\alpha = R_\alpha + \dfrac{f_\alpha}{E}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ R'_\lambda = R_\lambda + \dfrac{f_\beta}{E}, \\ C' = C. \end{cases}$$

La chaleur spécifique d'un système pris dans un état déterminé est la même, que le système soit en équilibre ou en mouvement; si l'on considère une variable autre que la température, le coefficient calorifique correspondant à cette variable n'a pas la même valeur, selon que le système est en équilibre ou en mouvement; la seconde valeur surpasse la première d'une quantité équivalente à la résistance passive qui correspond à cette variable.

4. *Propriété fondamentale des résistances passives.* — Soient A, B, ..., L les actions extérieures qui maintiendraient le système en équilibre dans l'état $(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)$; ces forces sont données par les égalités (4 *bis*) du Chapitre I.

Les égalités (2) peuvent s'écrire

$$(6)\quad \begin{cases} A' - A = -\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} - f_\alpha, \\ B' - B = -\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta'} - f_\beta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L' - L = -\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} - f_\lambda. \end{cases}$$

Nous donnerons aux quantités $(A' - A)$, $(B' - B)$, ..., $(L' - L)$ le nom d'*actions efficaces* exercées sur le système; à la quantité

$$(A' - A)\,d\alpha + (B' - B)\,d\beta + \ldots + (L' - L)\,d\lambda$$

le nom de *travail efficace*.

Les égalités (6), multipliées respectivement par $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, et ajoutées membre à membre, nous donnent

$$(7)\quad \begin{cases} (A' - A)\,d\alpha + (B' - B)\,d\beta + \ldots + (L' - L)\,d\lambda \\ \quad = d\mathfrak{T} - (f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda). \end{cases}$$

Cette égalité obtenue, voici l'hypothèse fondamentale que nous ferons :

HYPOTHÈSE. — *Le travail efficace des actions extérieures à un système est, dans toute transformation réelle, au moins égal à l'accroissement de force vive.*

D'après cette hypothèse, on a, dans toute transformation réelle,

$$(A' - A)\,d\alpha + (B' - B)\,d\beta + \ldots + (L' - L)\,d\lambda \geqq d\mathfrak{T},$$

et, par conséquent, d'après l'égalité (7),

$$(8)\quad f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda \leqq 0.$$

L'hypothèse précédente équivaut donc à la proposition suivante :

Dans toute transformation réelle d'un système, le travail des résistances passives est nul ou négatif.

Multiplions de même par $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, $d\mathfrak{S}$ les deux membres des équations (4) et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous aurons

$$\begin{aligned} &E(R'_\alpha\, d\alpha + R'_\beta\, d\beta + \ldots + R'_\lambda\, d\lambda + C\, d\mathfrak{S}) \\ &\quad = EF(\mathfrak{S})\, dS + f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda, \end{aligned}$$

ou bien, en désignant par dQ la quantité de chaleur dégagée par le système dans une transformation élémentaire,

$$E\, dQ = -EF(\mathfrak{S})\, dS - (f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda). \tag{9}$$

Écrivons une semblable égalité pour tous les éléments d'un cycle fermé et ajoutons membre à membre toutes ces égalités, après avoir divisé les deux membres de chacune d'elles par $F(\mathfrak{S})$; comme l'intégrale

$$\int dS,$$

étendue à un cycle fermé, est égale à o, nous aurons

$$\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} = -\frac{1}{E}\int \frac{f_\alpha d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda}{F(\mathfrak{S})}.$$

La quantité $(f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda)$ ne pouvant jamais être positive, on voit que, pour tout cycle fermé réel, on a

$$\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} \geqq 0. \tag{10}$$

Cette inégalité célèbre est due à Clausius.

Clausius a donné à la quantité

$$-(f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda),$$

qui est égale au travail des résistances passives changé de signe, et qui, par conséquent, n'est négative dans aucune modification réelle du système, le nom de *travail non compensé* accompli durant cette

modification. La quantité $\mathrm{EF}(\mathfrak{S})\,d\mathrm{S}$ est au contraire, pour lui, le *travail compensé* accompli durant cette même modification.

D'après les égalités (2), on a

$$\begin{aligned} -(f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda) \\ = \mathrm{A}'\,d\alpha + \mathrm{B}'\,d\beta + \ldots + \mathrm{L}'\,d\lambda \\ - \left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda}\,d\lambda\right) - d\mathfrak{T}, \end{aligned}$$

ou bien, en désignant par $d\mathfrak{G}$ le travail des actions extérieures au système,

$$(11)\qquad -(f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda) = d\mathfrak{G} - d\mathfrak{T} - d\mathfrak{F} + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{S}}\,d\mathfrak{S}.$$

Dans le cas où la modification est isothermique, $d\mathfrak{S}$ est égal à o, et l'égalité (11) devient

$$(11\ bis)\qquad -(f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda) = d\mathfrak{G} - d\mathfrak{T} - d\mathfrak{F}.$$

Pour calculer le travail non compensé accompli dans une modification isothermique, prenez le travail externe et retranchez-en la somme des accroissements de la force vive et du potentiel thermodynamique interne. Ce théorème a de fréquentes applications.

Appliquons l'équation (9) aux transformations d'un système isolé dans l'espace ; pour un pareil système, nous avons, par définition,

$$d\mathrm{Q} = 0.$$

L'équation (9) devient donc

$$d\mathrm{S} = -\frac{f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda}{\mathrm{EF}(\mathfrak{S})}.$$

Le second membre ne peut être négatif pour aucune transformation réelle du système ; donc, *aucune transformation réelle d'un système isolé ne peut faire décroître l'entropie de ce système.* On sait que cette proposition est due à Clausius ; il l'avait démontrée seulement dans le cas où la force vive du système est égale à o.

5. *Systèmes sans viscosité.* — Dans chaque cas particulier, on devra ajouter aux hypothèses déjà faites sur les résistances passives d'autres hypothèses propres à déterminer la forme des fonctions f_α, $f_\beta, \ldots, f_\lambda$.

Parmi ces hypothèses, la plus simple que l'on puisse faire, et qui est celle que l'on essayera toujours, au moins comme première approximation, consiste à faire

$$f_\alpha = 0, \qquad f_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad f_\lambda = 0. \tag{12}$$

Lorsqu'on suppose satisfaites ces égalités (12), on dit que l'on suppose le système *dénué de viscosité*.

Pour étudier les propriétés des systèmes dénués de viscosité, distinguons les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, dont dépend la force vive des variables $a, b, \ldots. l$, qui n'y figurent pas ; à ces dernières, doit être adjointe la température $\mathfrak{S}$.

Moyennant les égalités (12), les égalités (2) deviendront

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\mathfrak{T} - \mathfrak{F})}{\partial \alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} + \mathrm{A}'(\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{T} - \mathfrak{F})}{\partial \lambda} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} + \mathrm{L}'(\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l, t) = 0, \end{cases}$$

$$(13\ bis) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial a} + \mathcal{A}'(\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l} + \mathcal{L}'(\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l, t) = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont moins nombreuses que les variables à déterminer; pour achever de déterminer le mouvement du système, il faut leur adjoindre une dernière équation fournie par des hypothèses spéciales.

Ces équations appartiennent à deux types bien distincts. Les équations (13 *bis*), qui correspondent aux variables $a, b, \ldots, l$, sont des équations au sens ordinaire du mot. Les équations (13), au contraire, qui correspondent aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, sont des équations aux dérivées partielles du second ordre du type donné par Lagrange.

L'équation supplémentaire, qui correspond à la variable θ, peut évidemment appartenir à un troisième type.

Dans le cas où cette équation supplémentaire fait connaître la température en fonction du temps, ce qui a lieu, en particulier, dans le cas où la température est constante, on peut traiter de la manière suivante le problème du mouvement du système.

On résoudra les équations (13 *bis*) par rapport à $a, b, \ldots, l$; on connaîtra ainsi $a, b, \ldots, l$, en fonctions de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta, t$ et, puisque ϑ est connu en fonction de t, en fonctions de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t$. Si l'on reporte ces valeurs des variables $a, b, \ldots, l$ dans la fonction $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l)$, celle-ci se transformera en une fonction des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t$, que nous désignerons par

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t).$$

De même, les fonctions

$$\begin{gathered} A'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l, t) \end{gathered}$$

deviendront des fonctions des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t$, que nous désignerons par

$$\begin{gathered} \mathfrak{A}'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{L}'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t). \end{gathered}$$

Les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ seront alors déterminées en fonction de t par les équations

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t) + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha} = \mathfrak{A}'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t) + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda} = \mathfrak{L}'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t), \end{aligned} \right.$$

qui ont la forme la plus générale des équations classiques de la Dynamique.

La méthode que nous venons d'indiquer est celle qui sert à étudier le mouvement des corps bons conducteurs électrisés, des corps parfaitement doux aimantés, etc.

Dans le cas du *problème classique de la Dynamique*, la question se présente sous une forme encore un peu plus simple. En Dynamique, on n'introduit pas la variable ϑ; c'est supposer implicitement que la température garde une valeur invariable; les autres variables introduites figurent toutes dans l'expression de la force vive; le problème est donc ramené à l'intégration des équations

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\,\mathcal{F}(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'}-\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha}=\mathrm{A}'(\alpha,\beta,\ldots,\lambda,t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\,\mathcal{F}(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'}-\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda}=\mathrm{L}'(\alpha,\beta,\ldots,\lambda,t),\end{array}\right.$$

qui diffèrent des équations (14) en ce que la fonction $\mathcal{F}$ ne dépend pas explicitement du temps, tandis que la fonction $\mathcal{G}$ en dépend.

Le problème classique de la Dynamique se trouve ainsi rattaché d'une manière logique, à titre de cas particulier, à la Thermodynamique. Nous avons signalé (1re Partie, Chap. III, n° **4**) une méthode qui s'offrait pour opérer ce rapprochement et nous avions marqué en quoi cette méthode laissait place au doute. Nous voyons maintenant que cette méthode conduirait, en général, à des résultats inexacts; en effet, elle conduirait à remplacer, dans les équations (15), le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ par le produit EU de l'énergie interne et de l'équivalent mécanique de la chaleur; et ces deux fonctions ne sont pas ordinairement égales entre elles.

Il est cependant un cas, particulier en théorie, mais à peu près le seul que l'on traite dans la Dynamique classique, et principalement dans la Mécanique céleste, où les deux méthodes conduisent à des résultats identiques.

Concevons un système formé d'un certain nombre de parties indépendantes 1, 2, ..., n, dont chacune peut se déplacer dans l'espace, mais en gardant un état invariable. Soient Υ_1, Υ_2, ... Υ_n, les énergies internes de ces diverses parties, qui sont des constantes; soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ les potentiels thermodynamiques internes de ces parties,

qui sont également des constantes. Nous savons que nous avons d'une part (Ire Partie, Chap. III, n° **2**),

$$\mathrm{U} = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \ldots + \Upsilon_n + \Psi$$

et, d'autre part (IIIe Partie, Chap. I, n° **2**),

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n + \mathrm{E}\Psi,$$

$\mathrm{E}\Psi$ étant l'une des déterminations du *potentiel des actions mutuelles* des parties 1, 2, ..., n, celle qui s'annule lorsque ces parties sont infiniment éloignées les unes des autres. Les trois quantités $\mathfrak{F}$, EU, $\mathrm{E}\Psi$, ne diffèrent donc les unes des autres que par des constantes.

Ainsi, *pour écrire les équations du mouvement d'un système formé de parties indépendantes qui se déplacent sans changer d'état, on peut substituer les unes aux autres, dans les équations de Lagrange, les trois fonctions suivantes :*

Le potentiel thermodynamique interne;

Le produit de l'énergie interne par l'équivalent mécanique de la chaleur;

Le potentiel des actions mutuelles des diverses parties du système.

En dehors de ce cas particulier, une pareille substitution entraînerait en général une erreur; cette erreur a été commise fréquemment.

Revenons aux propriétés générales des systèmes dénués de viscosité. Pour un semblable système, les équations (4) deviennent

$$(16) \quad \begin{cases} \mathrm{R}'_\alpha = \mathrm{F}(\mathfrak{S})\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha}, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}'_\lambda = \mathrm{F}(\mathfrak{S})\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda}, \\ \mathrm{C}' = \mathrm{F}(\mathfrak{S})\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathfrak{S}}. \end{cases}$$

Dans un système dénué de viscosité, les coefficients calorifiques ont la même valeur, que le système soit en équilibre ou en mouvement.

De ces équations (16), on déduit

$$\frac{1}{F(\vartheta)}(R'_\alpha\, d\alpha + \ldots + R'_\lambda\, d\lambda + C'\, d\vartheta) = dS,$$

ou, en désignant par dQ la quantité de chaleur dégagée dans une modification élémentaire,

$$\frac{dQ}{F(\vartheta)} = -\, dS.$$

En intégrant cette équation pour un cycle fermé, on trouve la proposition suivante :

Lorsqu'un système dénué de viscosité parcourt réellement un cycle fermé, on a, pour ce cycle entier,

$$\int \frac{dQ}{F(\vartheta)} = 0.$$

Appliquons les équations (16) à un système formé de n parties indépendantes qui se déplacent les unes par rapport aux autres en gardant un état invariable. Désignons par Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n les entropies de ces diverses parties, qui sont des constantes. Nous aurons [Chap. I, égalité (21 *bis*)],

$$S = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_n;$$

l'entropie du système sera aussi une constante; les équations (16) nous donneront alors la proposition suivante :

Lorsqu'un système est formé de parties indépendantes qui se déplacent sans changer d'état, tous les coefficients calorifiques de ce système sont égaux à 0.

Ce théorème nous fait comprendre pourquoi la méthode indiquée dans la Ire Partie (Chap. III, n° 4) pour relier le problème classique de la Dynamique à la Thermodynamique devient légitime dans ce cas particulier.

Pour terminer ce qui concerne les systèmes dénués de viscosité,

énonçons une CONJECTURE. Il nous semble *probable* que l'on pourra, dans tous les phénomènes physiques, admettre la supposition suivante :

Les résistances passives qui correspondent aux variables $a, b, \ldots, l$, qui ne figurent pas dans l'expression de la force vive, sont toujours égales à o.

On pourrait alors, en toutes circonstances, remplacer les égalités (2) par les égalités

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\mathcal{F}-\mathcal{T})}{\partial\alpha}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\alpha'}=\mathrm{A}'+f_\alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial(\mathcal{F}-\mathcal{T})}{\partial\lambda}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\lambda'}=\mathrm{L}'+f_\lambda, \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial a}=\mathcal{A}', \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial l}=\mathcal{L}'. \end{cases}$$

Ce serait la forme générale des équations de la Thermodynamique pour un système de température uniforme; nous le répétons, nous ne donnons cette hypothèse qu'à titre de conjecture; les développements qui suivent en sont indépendants.

6. *Système formé de parties indépendantes qui ont des températures différentes.* — Nous allons maintenant examiner un cas beaucoup plus général que tous ceux qui précèdent; nous allons étudier un système formé d'un nombre quelconque de parties indépendantes les unes des autres; nous supposerons que la température de chacune de ces parties soit uniforme à chaque instant, tout en étant susceptible de varier d'un instant à l'autre; *nous ne supposerons pas que cette température ait à chaque instant la même valeur pour toutes ces parties.*

Pour ne pas compliquer inutilement les écritures, nous considérerons seulement deux parties indépendantes, que nous désignerons par les indices 1 et 2.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1$ les variables normales qui définissent l'état de la partie 1, y compris sa position absolue dans l'espace; soient $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \vartheta_2$ les variables normales qui définissent l'état de la partie 2, y compris sa position absolue dans l'espace.

L'énergie interne du système aura une valeur

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} U = {} & \Upsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1) + \Upsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \vartheta_2) \\ & + X_{12}(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2). \end{aligned} \right.$$

Soit

$$A''_1\, d\alpha_1 + B''_1\, d\beta_1 + \ldots + L''_1\, d\lambda_1 + A''_2\, d\alpha_2 + B''_2\, d\beta_2 + \ldots + L''_2\, d\lambda_2$$

le travail virtuel des actions extérieures qui agissent sur le système.

Chacune des deux parties 1 et 2 peut être regardée comme un système indépendant. Le travail virtuel des actions extérieures à chacun de ces deux systèmes est représenté par les expressions

$$A'_1\, d\alpha_1 + B'_1\, d\beta_1 + \ldots + L'_1\, d\lambda_1,$$
$$A'_2\, d\alpha_2 + B'_2\, d\beta_2 + \ldots + L'_2\, d\lambda_2,$$

avec

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{ll} A'_1 = A''_1 - E\dfrac{\partial X_{12}}{\partial \alpha_1}, & A'_2 = A''_2 - E\dfrac{\partial X_{12}}{\partial \alpha_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L'_1 = L''_1 - E\dfrac{\partial X_{12}}{\partial \lambda_1}, & L'_2 = L''_2 - E\dfrac{\partial X_{12}}{\partial \lambda_2}. \end{array} \right.$$

La partie 1 forme un système indépendant, de température uniforme, cette température n'étant pas forcément la même que celle des corps étrangers; on peut appliquer à ce système les considérations exposées dans les paragraphes précédents; il admet un potentiel thermodynamique interne $\mathfrak{F}_1$, et l'on a, à chaque instant,

$$(21)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{T}_1)}{\partial \alpha_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha'_1} = A'_1 + f_{\alpha_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{T}_1)}{\partial \lambda_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda'_1} = L'_1 + f_{\lambda_1}. \end{array} \right.$$

On a de même, en désignant par $\mathfrak{F}_2$ le potentiel thermodynamique interne du système 2,

$$(21\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\mathfrak{F}_2-\mathfrak{T}_2)}{\partial\alpha_2}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha'_2}=A'_2+f_{\alpha_2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \dfrac{\partial(\mathfrak{F}_2-\mathfrak{T}_2)}{\partial\lambda_2}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda'_2}=L'_2+f_{\lambda_2}. \end{array}\right.$$

Tenons compte des égalités (20); observons que $\mathfrak{F}_1$ ne dépend pas de $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, non plus que $\mathfrak{F}_2$ de $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$; que $\mathfrak{T}_1$ ne dépend pas de $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \alpha'_2, \beta'_2, \ldots, \lambda'_2$, non plus que $\mathfrak{T}_2$ de $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \lambda'_1$; posons

$$(22)\qquad \mathfrak{T}=\mathfrak{T}_1+\mathfrak{T}_2,$$

$$(23)\qquad \mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2+EX_{12},$$

et nous pourrons remplacer les égalités (21) et (21 *bis*) par les égalités

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\mathfrak{F}-\mathfrak{T})}{\partial\alpha_1}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'_1}=A''_1+f_{\alpha_1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \dfrac{\partial(\mathfrak{F}-\mathfrak{T})}{\partial\lambda_1}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'_1}=L''_1+f_{\lambda_1},\\ \dfrac{\partial(\mathfrak{F}-\mathfrak{T})}{\partial\alpha_2}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'_2}=A''_2+f_{\alpha_2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \dfrac{\partial(\mathfrak{F}-\mathfrak{T})}{\partial\lambda_2}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'_2}=L''_2+f_{\lambda_2}. \end{array}\right.$$

Ces égalités (24) sont tout à fait de même forme que les égalités (2) qui régissent le mouvement d'un système de température uniforme; leur nombre est inférieur de deux unités (de n unités, si le système se compose de n parties indépendantes) au nombre des variables dont les valeurs doivent être déterminées en fonctions du temps. On devra donc leur adjoindre deux équations empruntées à des considérations étrangères à la Thermodynamique; telles seraient, par exemple, les

deux équations

$$(25) \qquad \vartheta_1 = \varphi_1(t), \qquad \vartheta_2 = \varphi_2(t),$$

qui feraient connaître, à chaque instant, la température de chacune des deux parties indépendantes dont se compose le système.

Calculons la quantité de chaleur dQ dégagée par le système durant une modification élémentaire.

Nous avons (Ire Partie, Chap. III, n° 3)

$$dQ = dQ_1 + dQ_2,$$

dQ_1 et dQ_2 étant les quantités de chaleur dégagées par les parties 1 et 2, durant la même modification.

Soient S_1, S_2 les entropies des parties 1 et 2. Nous aurons [égalité (9)],

$$(26) \quad \begin{cases} E\,dQ_1 = -\,E\,F(\vartheta_1)\,dS_1 - (f_{\alpha_1}\,d\alpha_1 + f_{\beta_1}\,d\beta_1 + \ldots + f_{\lambda_1}\,d\lambda_1), \\ E\,dQ_2 = -\,E\,F(\vartheta_2)\,dS_2 - (f_{\alpha_2}\,d\alpha_2 + f_{\beta_2}\,d\beta_2 + \ldots + f_{\lambda_2}\,d\lambda_2). \end{cases}$$

Nous déduisons de ces égalités (26)

$$(27) \quad \begin{cases} \dfrac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \dfrac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} = -\,d(S_1 + S_2) \\ \qquad - \dfrac{f_{\alpha_1}\,d\alpha_1 + f_{\beta_1}\,d\beta_1 + \ldots + f_{\lambda_1}\,d\lambda_1}{E\,F(\vartheta_1)} \\ \qquad - \dfrac{f_{\alpha_2}\,d\alpha_2 + f_{\beta_2}\,d\beta_2 + \ldots + f_{\lambda_2}\,d\lambda_2}{E\,F(\vartheta_2)}. \end{cases}$$

Intégrons cette égalité (27) pour un cycle fermé, et nous aurons cette généralisation du théorème de Clausius, due à M. H. Poincaré :

Lorsqu'un système formé de n parties indépendantes, dont chacune a une température distincte, mais uniforme, décrit un cycle fermé, on a

$$(28) \qquad \int \left[\frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} + \cdots + \frac{dQ_n}{F(\vartheta_n)} \right] \geq 0.$$

Dans le cas particulier où le système est dénué de viscosité, le signe d'inégalité disparaît.

On voit ainsi comment plusieurs des propriétés d'un système de température uniforme s'étendent à un système composé de parties indépendantes, portées à des températures différentes les unes des autres.

CHAPITRE III.

LES LIAISONS.

1. *Liaisons bilatérales et liaisons unilatérales.* — Imaginons un système formé de parties séparées, indépendantes les unes des autres. Pour simplifier et préciser les raisonnements, sans d'ailleurs nuire à leur généralité, réduisons le nombre de ces parties à deux et désignons-les par les indices 1 et 2.

Supposons chacune de ces parties de température uniforme et définie par des variables normales; soient $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, a_1, b_1, \ldots, l_1, \vartheta_1$ les variables normales qui définissent la partie 1 et $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, a_2, b_2, \ldots, l_2, \vartheta_2$ les variables normales qui définissent la partie 2.

Imaginons que, par un déplacement continu, on amène ces parties au contact. Tandis que ces parties tendent à se mettre au contact, les variables

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \ldots, & \lambda_1, & a_1, & \ldots, & l_1, & \vartheta_1, \\ \alpha_2, & \ldots, & \lambda_2, & a_2, & \ldots, & l_2, & \vartheta_2 \end{matrix}$$

tendent vers des valeurs limites, et nous admettrons que la connaissance de ces valeurs limites suffit à déterminer l'état du système au moment où le contact est établi.

Cela revient à faire l'HYPOTHÈSE suivante : *L'état du système au moment où les parties* 1 *et* 2 *sont contiguës diffère infiniment peu de l'état du système au moment où ces parties sont infiniment près de se toucher*. Ce qui va suivre ne pourrait s'appliquer à un système pour lequel on ne supposerait pas vérifiée cette hypothèse.

En général, une fois le contact établi, les parties 1 et 2 cessent d'être indépendantes.

En premier lieu, il est parfois possible d'imposer au système, une fois le contact établi, des modifications virtuelles dans lesquelles l'état de chacune des parties 1 et 2 éprouve des variations qui seraient inconcevables si ces parties n'étaient pas contiguës.

Si, par exemple, les parties 1 et 2 sont des corps électrisés, la distribution électrique peut varier sur chacune d'elles, mais, tant qu'elles sont séparées, la charge totale de chacune d'elles demeure forcément constante; au contraire, lorsque le contact est établi entre elles, la charge totale de l'une peut diminuer, pourvu que la charge de l'autre augmente d'une quantité égale.

De même, lorsque les parties 1 et 2 sont au contact, il peut se faire qu'elles se mélangent l'une à l'autre, modification inconcevable tant qu'elles sont séparées.

Laissons de côté ces cas où le contact des diverses parties introduit de nouveaux modes de variation dans le système; supposons que, dans toute variation virtuelle du système, chacune des deux parties 1 et 2 éprouve une modification qui serait encore une variation virtuelle de cette partie si elle était isolée; ces deux parties ne seront pas, néanmoins, deux systèmes indépendants.

En effet, une fois le contact établi, les déplacements virtuels de chacune de ces deux parties ne sont plus absolument arbitraires; ces déplacements virtuels peuvent ou bien maintenir le contact des parties, ou bien faire cesser ce contact soit en certains points, soit en totalité, ou bien encore établir de nouveaux contacts; mais, puisque nous excluons l'hypothèse du mélange, ils ne doivent pas tendre à faire pénétrer les deux parties l'une dans l'autre, à amener en un même lieu une portion de l'une et une portion de l'autre.

Cherchons une méthode analytique propre à exclure les déplacements qui amèneraient les deux parties à se pénétrer.

Imaginons que la surface S_1, qui termine la partie 1, et la surface S_2, qui termine la partie 2, soient en contact en un certain point p. Soient p_1 le point matériel de la partie 1 et p_2 le point matériel de la partie 2 qui se trouvent en p. Soient N_1, N_2 les normales en p aux surfaces S_1, S_2, dirigées respectivement vers l'intérieur des parties 1 et 2. Pour qu'un déplacement $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$ du point p_1 et un déplacement $(\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2)$ du point p_2 amènent les parties 1 et 2 à se pénétrer au

voisinage de ces points, il faut et il suffit que l'on ait

$$\cos(N_1, x)\,\delta x_1 + \cos(N_1, y)\,\delta y_1 + \cos(N_1, z)\,\delta z_1 + \cos(N_2, x)\,\delta x_2 + \cos(N_2, y)\,\delta y_2 + \cos(N_2, z)\,\delta z_2 < 0.$$

On exclura donc les déplacements qui tendraient à faire pénétrer les deux corps l'un dans l'autre en imposant aux déplacements virtuels la condition

$$\cos(N_1, x)\,\delta x_1 + \cos(N_1, y)\,\delta y_1 + \cos(N_1, z)\,\delta z_1 + \cos(N_2, x)\,\delta x_2 + \cos(N_2, y)\,\delta y_2 + \cos(N_2, z)\,\delta z_2 \geqq 0.$$

Or $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\delta\alpha_1, \ldots; \delta\lambda_1$; $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$ s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\delta\alpha_2, \ldots, \delta\lambda_2$ [Ire Partie, Chap. I, égalités (2)]. La condition précédente peut donc s'écrire

$$M_1\,\delta\alpha_1 + N_1\,\delta\beta_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + N_2\,\delta\beta_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0,$$

$M_1, N_1, \ldots, P_1$ étant des fonctions des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et $M_2, N_2, \ldots, P_2$ étant des fonctions des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

Ainsi, les déplacements virtuels d'un système formé de diverses parties au contact sont soumis à un certain nombre de conditions de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0, \\ M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

que l'on nomme les *conditions de liaisons du système*.

Si l'on voulait conserver seulement les déplacements virtuels qui n'altèrent pas le contact des parties 1 et 2, on devrait remplacer les *conditions* (1) par les *équations*

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Lorsqu'on exclut les déplacements virtuels qui feraient cesser un contact, lorsque, par conséquent, on suppose tous les déplacements virtuels soumis aux équations (2), on dit que le système est soumis seulement à des *liaisons bilatérales;* dans ce cas, si

$$\delta\alpha_1, \ldots, \delta\lambda_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\lambda_2$$

est un déplacement virtuel du système,

$$(-\delta\alpha_1), \ldots, (-\delta\lambda_1),$$
$$(-\delta\alpha_2), \ldots, (-\delta\lambda_2)$$

est aussi un déplacement virtuel du système, en sorte que tous les déplacements virtuels du système sont *renversables.*

Lorsque, au contraire, on laisse libres les déplacements qui peuvent faire cesser des contacts, les liaisons du système, exprimées par les conditions (1), sont dites *liaisons unilatérales;* les déplacements virtuels *ne sont plus tous renversables.*

2. *Énergie interne d'un système à liaisons.* — Imaginons un système formé de deux parties 1 et 2, susceptibles d'être séparées ou au contact. Désignons par $\mho$ l'énergie interne du système lorsque les deux parties 1 et 2 sont au contact.

Séparons infiniment peu ces deux parties; l'énergie interne du système prendra la valeur

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Upsilon_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \vartheta_1) + \Upsilon_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \vartheta_2) \\ + \Psi(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2), \end{array} \right.$$

les variables ayant des valeurs infiniment voisines de celles qui assurent le contact des parties 1 et 2.

Mais la modification que nous venons de considérer change infiniment peu, par hypothèse, l'état du système; par conséquent, l'œuvre accomplie dans cette modification est infiniment petite; par conséquent aussi l'énergie interne du système varie infiniment peu; la quantité $\mho$ est égale à la limite vers laquelle tend la quantité (3) lorsque les parties 1 et 2 tendent à s'appliquer l'une contre l'autre. D'où la proposition suivante :

L'énergie interne d'un système formé de plusieurs parties en

contact est égale à la limite vers laquelle tend l'énergie interne du système lorsque ses diverses parties, séparées les unes des autres, tendent à s'appliquer les unes contre les autres.

Prenons un système isolé formé de plusieurs parties, dans un état où ses diverses parties 1 et 2 sont infiniment près d'être au contact; calculons les quantités

$$E\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} = -A_1, \qquad E\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} = -A_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$E\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} = -L_1, \qquad E\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} = -L_2,$$
$$E\frac{\partial\Psi}{\partial a_1} = -\mathcal{A}_1, \qquad E\frac{\partial\Psi}{\partial a_2} = -\mathcal{A}_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$E\frac{\partial\Psi}{\partial l_1} = -\mathcal{L}_1, \qquad E\frac{\partial\Psi}{\partial l_2} = -\mathcal{L}_2.$$

Calculons les *valeurs limites* vers lesquelles tendent ces quantités lorsque les parties 1 et 2 tendent à s'appliquer l'une contre l'autre; *par définition*, les limites des quantités $A_1, \ldots, L, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{L}_1$ seront les actions que la partie 2, appliquée contre la partie 1, exerce sur cette partie 1; de même, les limites des quantités $A_2, \ldots, L_2, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{L}_2$ seront les actions que la partie 1 exerce sur la partie 2. Les travaux virtuels de ces actions auront pour valeurs respectives

$$A_1\delta\alpha_1 + \ldots + L_1\delta\lambda_1 + \mathcal{A}_1\delta a_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\delta l_1,$$
$$A_2\delta\alpha_2 + \ldots + L_2\delta\lambda_2 + \mathcal{A}_2\delta a_2 + \ldots + \mathcal{L}_2\delta l_2,$$

$\delta\alpha_1, \ldots, \delta\lambda_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\lambda_2$ étant d'ailleurs soumis aux conditions de liaisons.

Ce que nous venons de dire constitue une définition; en effet, les actions mutuelles de deux systèmes 1 et 2 n'étaient définies jusqu'ici qu'autant que ces systèmes étaient indépendants et ce n'est pas ici le cas.

3. *Entropie et potentiel thermodynamique d'un système à liaisons.* — Imaginons encore un système formé de plusieurs parties, deux par exemple, les parties 1 et 2, et supposons que ces parties soient toutes à la même température ; ce système aura alors une entropie et un potentiel thermodynamique interne, que les parties qui le composent soient ou ne soient pas au contact. En raisonnant comme dans le cas précédent, on prouvera que *l'entropie et le potentiel thermodynamique interne d'un système de température uniforme, formé de plusieurs parties en contact, sont égaux respectivement aux limites vers lesquelles tendent l'entropie et le potentiel thermodynamique du système lorsque les diverses parties, isolées, tendent à s'accoler les unes aux autres.*

Si nous conservons nos notations habituelles, cette entropie $\mathcal{S}$ et ce potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ seront les valeurs limites des quantités

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \Sigma_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \vartheta) + \Sigma_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \vartheta),\\
\mathcal{F} &= \mathcal{F}_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \vartheta) + \mathcal{F}_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \vartheta),\\
&\quad + \mathrm{E}\Psi(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \vartheta).
\end{aligned}
$$

4. *Équilibre d'un système soumis à des liaisons bilatérales.* — Imaginons un système formé de deux parties 1 et 2, entre lesquelles existent des conditions de liaisons

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\mathrm{M}_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}_1\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0,\\
\mathrm{M}'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}'_1\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}'_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Supposons que nous soyons assuré d'une manière quelconque que le système ne peut prendre aucun mouvement durant lequel quelqu'une des inégalités

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{M}_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}_1\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}_2\,\delta\lambda_2 > 0,\\
\mathrm{M}'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}'_1\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}'_2\,\delta\lambda_2 > 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

serait satisfaite.

Dès lors, en remplaçant les conditions de liaisons (1) par les équations de liaisons (2), nous sommes assurés de ne rien modifier à l'état d'équilibre ou de mouvement du système; nous pouvons donc considérer le système comme soumis uniquement aux liaisons bilatérales

$$(2)\quad \begin{cases} M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supposons que les deux parties 1 et 2 soient à la même température $\mathfrak{S}$. Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système que forment ces deux parties.

Donnons à ce système un déplacement virtuel, isothermique, compatible avec les égalités (2). Les actions extérieures effectuent un travail virtuel $d\varpi$; le potentiel thermodynamique interne subit une variation $\delta\mathcal{F}$; d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, les conditions nécessaires et suffisantes que nous cherchons s'obtiendront en écrivant que, pour tout déplacement virtuel isothermique du système, on a

$$(4)\qquad \delta\mathcal{F} = d\varpi.$$

Or, on peut écrire

$$\begin{aligned} d\varpi = {} & A_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + L_1\,d\lambda_1 + \mathcal{A}_1\,\delta a_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\,\delta l_1 \\ & + A_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + L_2\,d\lambda_2 + \mathcal{A}_2\,\delta a_2 + \ldots + \mathcal{L}_2\,\delta l_2, \\ \delta\mathcal{F} = {} & \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1}\,\delta\lambda_1 + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial a_1}\,\delta a_1 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial l_1}\,\delta l_1 \\ & + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2}\,\delta\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2}\,\delta\lambda_2 + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial a_2}\,\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial l_2}\,\delta l_2 \\ & + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1}\,\delta\lambda_1 + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\,\delta a_1 + \ldots + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial l_2}\,\delta l_2 \\ & + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2}\,\delta\alpha_2 + \ldots + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2}\,\delta\lambda_2 + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial a_2}\,\delta a_2 + \ldots + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial l_2}\,\delta l_2. \end{aligned}$$

L'égalité (4) peut donc s'écrire

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(A_1 - E\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \alpha_1}\right)\delta\alpha_1 + \ldots + \left(L_1 - E\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \lambda_1}\right)\delta\lambda_1 \\ &+ \left(\mathcal{A}_1 - E\frac{\partial \Psi}{\partial a_1} - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial a_1}\right)\delta a_1 + \ldots + \left(\mathcal{L}_1 - E\frac{\partial \Psi}{\partial l_1} - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial l_1}\right)\delta l_1 \\ &+ \left(A_2 - E\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \alpha_2}\right)\delta\alpha_2 + \ldots + \left(L_2 - E\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \lambda_2}\right)\delta\lambda_2 \\ &+ \left(\mathcal{A}_2 - E\frac{\partial \Psi}{\partial a_2} - \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial a_2}\right)\delta a_2 + \ldots + \left(\mathcal{L}_2 - E\frac{\partial \Psi}{\partial l_2} - \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial l_2}\right)\delta l_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Mais cette égalité doit avoir lieu non pas quelles que soient les variations

$$\delta\alpha_1,\ \ldots,\ \delta\lambda_1,\ \delta a_1,\ \ldots,\ \delta l_1,\ \delta\alpha_2,\ \ldots,\ \delta\lambda_2,\ \delta a_2,\ \ldots,\ \delta l_2,$$

mais seulement lorsque les égalités (2) sont satisfaites.

Il faut et il suffit pour cela qu'il existe des facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$, en nombre égal à celui des équations (2), *ces facteurs dépendant uniquement des variables* $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2$, tels que l'égalité (5) ait lieu quels que soient

$$\begin{aligned} &\delta\alpha_1,\ \ldots,\ \delta\lambda_1,\ \delta a_1,\ \ldots,\ \delta l_1, \\ &\delta\alpha_2,\ \ldots,\ \delta\lambda_2,\ \delta a_1,\ \ldots,\ \delta l_2, \end{aligned}$$

lorsqu'on ajoute à son premier membre l'expression

$$\begin{aligned} &\Pi(M_1\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\delta\lambda_1 + M_2\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\delta\lambda_2) \\ &+ \Pi'(M'_1\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\delta\lambda_1 + M'_2\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\delta\lambda_2) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En d'autres termes, pour que le système soumis aux liaisons bilaté-

rales (2) soit en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots = \dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} + \Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \ldots = \dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1}, \end{array}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_1} = \dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{L}_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_1} = \dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial l_1}, \end{array}\right.$$

$$(6\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} A_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots = \dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} + \Pi P_2 + \Pi' P'_2 + \ldots = \dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2}, \end{array}\right.$$

$$(7\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_2} = \dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial a_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{L}_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_2} = \dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial l_2}. \end{array}\right.$$

Examinons les conséquences de ces égalités (6), (7), (6 *bis*), (7 *bis*).

D'après la définition des actions exercées par la partie 2 sur la partie 1, nous pouvons dire que

$$A_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1},\quad \ldots,\quad L_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1},\quad \mathcal{A}_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial a_1},\quad \ldots,\quad \mathcal{L}_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial l_1}$$

sont les actions exercées sur la partie 1 par les corps étrangers à cette partie. Nous voyons alors que les égalités (6) et (7) conduisent à l'important théorème que voici :

Les conditions d'équilibre d'un système qui, au lieu d'être indépendant, présente des liaisons bilatérales avec les corps qui l'environnent s'écrivent comme les conditions d'équilibre d'un système

indépendant, pourvu qu'aux forces extérieures auxquelles ce système est soumis on adjoigne des forces fictives

$$(8)\quad \begin{cases} F_{\alpha_1} = \Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F'_{\lambda_1} = \Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \ldots. \end{cases}$$

Ces forces fictives, nommées FORCES DE LIAISONS, *ne dépendent que des variables qui fixent la position relative du système et des corps extérieurs, et non des variables qui changeraient l'état du système ou des corps extérieurs sans faire varier leur position relative.*

Le travail virtuel des forces extérieures de liaisons appliquées au système (1) a pour valeur

$$\begin{aligned} F_{\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + F_{\lambda_1}\delta\lambda_1 = &\ (\Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots)\delta\alpha_1 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \ldots)\delta\lambda_1. \end{aligned}$$

Le système 1 exerce de même sur les corps extérieurs des forces de liaison

$$(8\ bis)\quad \begin{cases} F_{\alpha_2} = \Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{\lambda_2} = \Pi P_2 + \Pi' P'_2 + \ldots, \end{cases}$$

dont le travail virtuel a pour valeur

$$\begin{aligned} F_{\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + F_{\lambda_2}\delta\lambda_2 = &\ (\Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots)\delta\alpha_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\Pi P_2 + \Pi' P'_2 + \ldots)\delta\lambda_2. \end{aligned}$$

Le travail virtuel total des forces de liaisons qui s'exercent entre les deux systèmes 1 et 2 a pour valeur

$$\begin{aligned} &F_{\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + F_{\lambda_1}\delta\lambda_1 + F_{\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + F_{\lambda_2}\delta\lambda_2 \\ &\quad = \Pi(M_1\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\delta\lambda_1 + M_2\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\delta\lambda_2) \\ &\quad + \Pi'(M'_1\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\delta\lambda_1 + M'_2\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\delta\lambda_2) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on tient compte des égalités (2), on peut énoncer le théorème suivant :

Le travail virtuel de toutes les forces de liaisons qui s'exercent entre les deux systèmes (1) *et* (2) *est nul pour tout déplacement virtuel qui respecte les liaisons bilatérales existant entre les deux systèmes.*

Les conditions d'équilibre d'un système qui est assujetti aux corps étrangers par des liaisons bilatérales diffèrent en un point essentiel des conditions d'équilibre d'un système indépendant.

Supposons que l'on donne à un système indépendant une modification virtuelle $\delta\alpha, \ldots, \delta\lambda, \delta a, \ldots, \delta l$, l'état des corps étrangers demeurant invariable ; le travail virtuel des actions extérieures sera, dans ce cas, la différentielle totale d'une fonction des variables $\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l$ (*voir* Chap. I, nº **4**). Considérons au contraire un système assujetti à des liaisons bilatérales avec les corps extérieurs ; le travail virtuel des actions extérieures et des forces de liaison, qui doit, dans ce cas, remplacer le travail des seules actions extérieures, ne sera plus, en général, une différentielle totale. Comme nous avons eu soin de ne jamais supposer, dans nos démonstrations, que le travail virtuel des actions extérieures fût une différentielle totale, les résultats de ces démonstrations s'appliquent aux systèmes qui présentent, avec les corps extérieurs, des liaisons bilatérales.

5. *Équilibre d'un système soumis à des liaisons unilatérales.* — Pourquoi, en traitant, au numéro précédent, de l'équilibre d'un système soumis à des liaisons, avons-nous dû ajouter cette restriction que ces liaisons étaient bilatérales? La raison en est simple. Nous avons fait usage des lois de l'équilibre des systèmes telles qu'elles ont été établies au Chapitre I. Or, tout, dans l'établissement de ces lois, suppose que le système soit défini, au voisinage de l'état étudié, par un système unique de paramètres, variables arbitrairement d'une manière continue. Cette condition n'est pas réalisée dans un système soumis à des liaisons unilatérales. Prenons un système formé de diverses parties qui, dans l'état étudié, sont au contact ; deux systèmes différents de

variables devront être employés pour définir les états du système voisins de celui-là, selon qu'en ces états le contact sera conservé ou supprimé. On voit donc bien que nos raisonnements tomberaient si le système présentait des liaisons unilatérales.

Les raisonnements précédents supposent que l'on soit assuré de la proposition suivante : Le système ne peut, à partir de l'état considéré, et les vitesses des diverses parties étant toutes égales à o, prendre un mouvement dont le premier élément représenterait un déplacement virtuel non renversable; nous aurons donc les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système si, aux conditions établies dans le numéro précédent, nous joignons des conditions nécessaires et suffisantes pour que tout mouvement de ce type soit exclu.

Malheureusement, nous ne pouvons établir avec une entière rigueur ces conditions nécessaires et suffisantes; nous ne pouvons indiquer d'une manière assurée qu'une condition qui est *suffisante* pour rendre impossible tout mouvement du système débutant, sans vitesse initiale, par un déplacement non renversable.

Cette condition est la suivante :

Si, pour toute modification virtuelle non renversable, on a l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right)\delta\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1} - L_1\right)\delta\lambda_1 \\
&+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_1} - \mathcal{A}_1\right)\delta a_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_1} - \mathcal{L}_1\right)\delta l_1 \\
&+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_2} - A_2\right)\delta\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_2} - L_3\right)\delta\lambda_2 \\
&+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_2} - \mathcal{A}_2\right)\delta\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_2} - \mathcal{L}_2\right)\delta l_2 > 0,
\end{aligned}$$

on est assuré que le système ne peut prendre, sans vitesse initiale, aucun mouvement commençant par un déplacement virtuel non renversable.

Imaginons, en effet, que le système puisse prendre un semblable mouvement. Soit t_0 l'instant initial de ce mouvement. Soient $d\alpha_1, \ldots, d\lambda_1, da_1, \ldots, dl_1, d\alpha_2, \ldots, d\lambda_2, da_2, \ldots, dl_2$ le premier élément de

ce mouvement. Supposons que l'on ait

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_1} - \mathrm{A}_1\right) d\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2 > 0.$$

Le premier membre de cette inégalité varie d'une manière continue durant le mouvement du système; nous pourrions donc déterminer un instant t_1, postérieur à t_0 et assez voisin de t_0, pour que, entre les instants t_0 et t_1, ce premier membre demeure constamment positif; nous aurions certainement alors

$$\int_{t_1}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_1} - \mathrm{A}_1\right) d\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2\right] > 0.$$

Mais, le système ayant rompu à l'instant t_0 certaines liaisons unilatérales, on peut toujours supposer l'instant t_1 assez voisin de l'instant t_0 pour que, entre ces deux instants, le système soit soumis exclusivement à des liaisons bilatérales. Pendant ce temps, son état sera défini par un système unique de paramètres, variables arbitrairement d'une manière continue; sa température étant uniforme on pourra lui appliquer les lois du mouvement d'un système de température uniforme, telles qu'elles ont été établies au Chapitre II; ces lois nous donneront immédiatement l'égalité

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_1} - \mathrm{A}_1\right) d\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2\right]$$
$$= \mathfrak{T}_0 - \mathfrak{T}_1 + \int_{t_0}^{t_1} (f_{\alpha_1} d\alpha_1 + \ldots + f_{l_2} dl_2).$$

Les vitesses initiales étant toutes égales à o par hypothèse, il en est de même de $\mathfrak{T}_0$, et l'égalité précédente nous donne l'inégalité

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_1} - \mathrm{A}_1\right) d\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2\right] < 0,$$

qui est en contradiction avec la précédente.

Cette contradiction démontre l'exactitude de la proposition énoncée.

La condition précédente, suffisante pour entraver tout mouvement qui débuterait par un déplacement non renversable, est-elle en même temps nécessaire à cet objet? Fourier, Gauss, Cauchy et, depuis,

beaucoup d'autres géomètres l'ont pensé; mais il nous semble difficile de le démontrer rigoureusement en s'appuyant uniquement sur ce qui précède.

6. *Mouvement d'un système, de température uniforme, soumis à des liaisons bilatérales.* — Pour ne pas allonger outre mesure le présent travail, nous n'étudierons le mouvement d'un système qu'autant que les liaisons entre ses diverses parties demeurent bilatérales.

Considérons un système formé de deux parties 1 et 2, entre lesquelles existent des liaisons bilatérales; supposons les deux parties 1 et 2 à la même température ϑ. L'ensemble de ces deux parties formera alors un système auquel on pourra appliquer les lois générales du mouvement exposées au Chapitre II.

Nous pouvons, sans avoir besoin de connaître explicitement les variables indépendantes qui définissent ce système, énoncer les lois du mouvement de la manière suivante :

Soient

$d\varpi$ le travail virtuel des actions extérieures;
$\delta\mathcal{F}$ la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne;
$d\tau$ le travail virtuel des forces d'inertie;
$d\varphi$ le travail virtuel des résistances passives.

Pour tout déplacement virtuel du système, nous devons avoir

$$d\varpi + d\varphi - \delta\mathcal{F} = d\tau. \tag{9}$$

Or, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} d\varpi = {} & A_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + L_1\,\delta\lambda_1 + \mathcal{A}_1\,\delta a_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\,\delta l_1 \\ & + A_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + L_2\,\delta\lambda_2 + \mathcal{A}_2\,\delta a_2 + \ldots + \mathcal{L}_2\,\delta l_2, \\ \delta\mathcal{F} = {} & \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1}\,\delta\lambda_1 + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial a_1}\,\delta a_1 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial l_1}\,\delta l_1 \\ & + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2}\,\delta\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2}\,\delta\lambda_2 + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial a_2}\,\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial l_2}\,\delta l_2 \\ & + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1}\,\delta\lambda_1 + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\,\delta a_1 + \ldots + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial l_1}\,\delta l_1 \\ & + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2}\,\delta\alpha_2 + \ldots + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2}\,\delta\lambda_2 + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial a_2}\,\delta a_2 + \ldots + E\,\frac{\partial\Psi}{\partial l_2}\,\delta l_2, \end{aligned}$$

$$d\varphi = f_{\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + f_{\lambda_1}\delta\lambda_1 + f_{a_1}\delta a_1 + \ldots + f_{l_1}\delta l_1$$
$$+ f_{\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + f_{\lambda_2}\delta\lambda_2 + f_{a_2}\delta a_2 + \ldots + f_{l_2}\delta l_2,$$

$$d\tau = \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha'_1}\right)\delta\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda'_1}\right)\delta\lambda_1$$
$$+ \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha'_2}\right)\delta\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda'_2}\right)\delta\lambda_2.$$

L'égalité (9) peut donc s'écrire

$$(9\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} & A_1\delta\alpha_1 + \ldots + \mathfrak{L}_2\delta l_2 - \frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots - \frac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial l_2}\delta l_2 \\ & - E\frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\delta\alpha_1 - \ldots - E\frac{\partial\Psi}{\partial l_2}\delta l_2 + f_{\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + f_{l_2}\delta l_2 \\ & = \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha'_1}\right)\delta\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda'_2}\right)\delta\lambda_2. \end{aligned}\right.$$

Mais, dans cette égalité (9 *bis*), les quantités $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\lambda_2$ n'ont pas des valeurs arbitraires ; elles sont soumises aux équations de liaison

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & M_1\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\delta\lambda_1 + M_2\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\delta\lambda_2 = 0, \\ & M'_1\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\delta\lambda_1 + M'_2\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\delta\lambda_2 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Dès lors, il existe des facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$, tels qu'en multipliant par Π le premier membre de la première équation (2), par Π' le premier membre de la seconde, etc., et en ajoutant les résultats obtenus au premier membre de l'équation (9 *bis*), celle-ci ait lieu quelles que soient les quantités $\delta\alpha_1, \ldots, \delta l_2$.

Les facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$ dépendent uniquement des variables $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2$ et de leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps et point des variables $a_1, \ldots, l_1, a_2, \ldots, l_2$, ni des dérivées de ces variables par rapport au temps.

On doit donc avoir, à chaque instant du mouvement,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & A_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots \\ & \qquad + f_{\alpha_1} - \frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha'_1} - \frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\alpha_1} = 0, \\ & \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & L_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} + \Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \ldots \\ & \qquad + f_{\lambda_1} - \frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda'_1} - \frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\lambda_1} = 0; \end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_1} + f_{a_1} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial a_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathcal{L}_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_1} + f_{l_1} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial l_1} = 0; \end{cases}$$

$$(10\,bis)\quad \begin{cases} A_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \dots \\ \qquad + f_{\alpha_2} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}'_2}{\partial\alpha'_2} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial\alpha_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} + \Pi P_2 + \Pi' P'_2 + \dots \\ \qquad + f_{\lambda_2} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}'_2}{\partial\lambda'_2} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial\lambda_2} = 0; \end{cases}$$

$$(11\,bis)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_2} + f_{a_2} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial a_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathcal{L}_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_2} + f_{l_2} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial l_2} = 0. \end{cases}$$

Si l'on joint à ces équations une dernière équation indiquant de quelle manière la température $\mathfrak{S}$ du système varie avec le temps, on aura toutes les équations du mouvement du système.

Les équations (10) et (10 *bis*) conduisent à la conséquence suivante :

On peut étendre à un système qui présente, avec les corps extérieurs, des liaisons bilatérales, toutes les lois du mouvement d'un système indépendant des corps extérieurs, pourvu que l'on ajoute aux forces extérieures des forces fictives

$$F_{\alpha_1} = \Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$F_{\lambda_1} = \Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \dots.$$

Ces forces de liaison dépendent uniquement des variables $\alpha_1, \dots, \lambda_1, \alpha_2, \dots, \lambda_2$, *qui fixent la position du système et des corps extérieurs, et des dérivées premières et secondes, par rapport au temps, de ces variables.*

Cette proposition, toutefois, n'est démontrée qu'autant que l'ensemble formé par le système et les corps extérieurs a, à chaque instant, une température uniforme.

Considérons une modification infiniment petite quelconque du système dont les deux parties 1 et 2, à la même température, ont entre elles des liaisons bilatérales; le travail total des forces de liaisons qui s'exercent entre ces deux parties aura pour valeur

$$\left[(\Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots)\frac{d\alpha_1}{dt} + \ldots + (\Pi P_1 + \Pi' P'_1)\frac{d\lambda_1}{dt}\right.$$
$$\left. + (\Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots)\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots + (\Pi P_2 + \Pi' P'_2)\frac{d\lambda_2}{dt}\right] dt.$$

Mais les équations de liaison (2) doivent être vérifiées si l'on pose

$$\frac{d\alpha_1}{dt}dt = \delta\alpha_1, \qquad \frac{d\alpha_2}{dt}dt = \delta\alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d\lambda_1}{dt}dt = \delta\lambda_1, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt}dt = \delta\lambda_2.$$

Le travail précédent est donc égal à 0.

7. *Mouvement d'un système dont les diverses parties, portées à des températures différentes, sont assujetties à des liaisons bilatérales.* — Tout ce que nous avons dit jusqu'ici sur les liaisons a été déduit de ce qui a été établi dans les deux Chapitres précédents, sans que nous ayons eu besoin d'invoquer aucune hypothèse nouvelle. Il n'en sera pas de même de ce qui va être exposé au présent numéro.

Nous avons traité, au Chapitre II, n° **6**, le mouvement d'un système formé de diverses parties indépendantes portées à des températures différentes. Les équations que nous avons obtenues peuvent être condensées dans la proposition suivante :

Supposons que le système soit formé de deux parties 1 et 2. Soit

$$\mho = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Psi$$

l'énergie interne de ce système, et posons

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + E\Psi,$$

$\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ étant les potentiels thermodynamiques internes des parties 1 et 2, supposées isolées. Si nous donnons au système un déplacement virtuel quelconque, nous aurons

$$d\varpi + d\varphi - \delta\mathfrak{F} = d\tau, \tag{12}$$

les divers symboles ayant le même sens qu'en l'égalité (9).

Cela posé, voici l'hypothèse que nous admettrons :

Hypothèse. — *Le résultat précédent demeure exact même dans le cas où les diverses parties qui constituent le système sont portées à des températures différentes et présentent entre elles des liaisons bilatérales.*

Cette hypothèse admise, il suffit de reprendre les considérations exposées au numéro précédent, pour être en droit d'étendre tous les résultats obtenus dans ce numéro à un système dont la température n'est pas uniforme.

8. *Coefficients calorifiques d'un système soumis à des liaisons bilatérales.* — Nous ne connaissons jusqu'ici le sens du mot *quantité de chaleur dégagée par un système* qu'autant que ce système est indépendant des corps étrangers. S'il s'agit d'un système présentant avec les corps étrangers des liaisons bilatérales, nous ne pourrons pas employer ce mot avant d'en avoir donné une définition.

Considérons donc un système soumis à des liaisons bilatérales avec les corps extérieurs; soit U l'énergie interne de ce système; soient $F_\alpha, \ldots, F_\lambda$ les forces de liaisons.

Posons

$$\left\{\begin{array}{l} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} - (A + F_\alpha) = ER_\alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} - (A + F_\lambda) = ER_\lambda, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial a} - \mathcal{A} = E\mathfrak{R}_a, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial l} - \mathcal{L} = E\mathfrak{R}_l. \end{array}\right. \tag{13}$$

La somme

$$-(R_\alpha \delta\alpha + \ldots + R_\lambda \delta\lambda + \mathfrak{R}_a \delta a + \ldots + \mathfrak{R}_l \delta l)$$

sera, par définition, la *quantité de chaleur dégagée* par le système durant la modification réelle ou virtuelle $\delta\alpha, \ldots, \delta\lambda, \delta a, \ldots, \delta l$.

Il résulte évidemment de cette définition, qui renferme comme cas particulier celle que nous avons donnée pour un système indépendant (Ire Partie, Chap. III, n° **3**), qu'*une modification réelle ou virtuelle d'un système isolé entraîne un dégagement de chaleur égal à* o.

Considérons un système formé de deux parties 1 et 2. Soient $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1$ les variables qui définissent la première partie; $\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2$ les variables qui définissent la seconde partie.

Ces deux parties présentent entre elles des contacts qu'expriment les équations de liaisons

$$(14)\quad \begin{cases} M_1 \delta\alpha_1 + \ldots + P_1 \delta\lambda_1 + M_2 \delta\alpha_2 + \ldots + P_2 \delta\lambda_2 = 0, \\ M'_1 \delta\alpha_1 + \ldots + P'_1 \delta\lambda_1 + M'_2 \delta\alpha_2 + \ldots + P'_2 \delta\lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En outre, elles présentent avec les corps extérieurs des contacts qu'expriment les équations de liaisons

$$(15)\quad \begin{cases} m_1 \delta\alpha_1 + \ldots + p_1 \delta\lambda_1 + \mu_1 \delta \mathrm{a} + \ldots + \varpi_1 \delta \mathrm{l}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_2 \delta\alpha_2 + \ldots + p_2 \delta\lambda_2 + \mu_2 \delta \mathrm{a} + \ldots + \varpi_2 \delta \mathrm{l}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$\mathrm{a}, \ldots, \mathrm{l}$ étant les variables qui définissent la position des corps extérieurs.

L'énergie interne du système formé par l'ensemble des deux parties sera désignée par

$$\mho = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Psi.$$

Les actions extérieures appliquées au système formé des deux parties

seront désignées par $A_1, \ldots, L_1, A_2, \ldots, L_2, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{L}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{L}_2$.

Dans une modification quelconque du système, la partie 1 dégagera une quantité de chaleur dQ_1 donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} -\mathrm{E}\,dQ_1 = & \Big[\mathrm{E}\frac{\partial \Upsilon_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha'_1} \\ & \quad - \Big(\mathrm{A}_1 - \mathrm{E}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} + \Pi \mathrm{M}_1 + \Pi' \mathrm{M}'_1 + \ldots + \mathcal{P}_1 m_1 + \ldots\Big)\Big]\delta\alpha_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \Big[\mathrm{E}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda'_1} \\ & \quad - \Big(\mathrm{L}_1 - \mathrm{E}\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} + \Pi \mathrm{P}_1 + \Pi' \mathrm{P}'_1 + \ldots + \mathcal{P}_1 p_1 + \ldots\Big)\Big]\delta\lambda_1 \\ & + \Big(\mathrm{E}\frac{\partial \Upsilon_1}{\partial a_1} + \mathrm{E}\frac{\partial \Psi}{\partial a_1} - \mathcal{A}_1\Big)\delta a_1 + \ldots + \Big(\mathrm{E}\frac{\partial \Upsilon_1}{\partial l_1} + \mathrm{E}\frac{\partial \Psi}{\partial l_1} - \mathcal{L}_1\Big)\delta l_1. \end{aligned}$$

De même, la partie 2 dégagera une quantité de chaleur dQ_2 donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} -\mathrm{E}\,dQ_2 = & \Big[\mathrm{E}\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \alpha'_2} \\ & \quad - \Big(\mathrm{A}_2 - \mathrm{E}\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} + \Pi \mathrm{M}_2 + \Pi' \mathrm{M}'_2 + \ldots + \mathcal{P}_2 m_2 + \ldots\Big)\Big]\delta\alpha_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \Big[\mathrm{E}\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \lambda'_2} \\ & \quad - \Big(\mathrm{L}_2 - \mathrm{E}\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} + \Pi \mathrm{P}_2 + \Pi' \mathrm{P}'_2 + \ldots + \mathcal{P}_2 p_2 + \ldots\Big)\Big]\delta\lambda_2 \\ & + \Big(\mathrm{E}\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial a_2} + \mathrm{E}\frac{\partial \Psi}{\partial a_2} - \mathcal{A}_2\Big)\delta a_2 + \ldots + \Big(\mathrm{E}\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial l_2} + \mathrm{E}\frac{\partial \Psi}{\partial l_2} - \mathcal{L}_2\Big)\delta l_2. \end{aligned}$$

On a, en vertu des égalités (14),

$$\begin{gathered} \Pi(\mathrm{M}_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}_1\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}_2\,\delta\lambda_2) = 0, \\ \Pi'(\mathrm{M}'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}'_1\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}'_2\,\delta\lambda_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Les deux égalités précédentes donnent alors sans peine

$$\begin{aligned}
-\mathrm{E}(dQ_1+dQ_2) = & \left[\mathrm{E}\frac{\partial \mho}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} - (\mathrm{A}_1 + \mathfrak{P}_1 m_1 + \ldots)\right]\delta\alpha_1 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[\mathrm{E}\frac{\partial \mho}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{d\lambda'_2} - (\mathrm{L}_2 + \mathfrak{P}_2 p_2 + \ldots)\right]\delta\lambda_2 \\
& + \left(\mathrm{E}\frac{\partial \mho}{\partial a_1} - \mathcal{A}_1\right)\delta a_1 + \ldots + \left(\mathrm{E}\frac{\partial \mho}{\partial l_2} - \mathcal{L}_2\right)\delta l_2.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne par dQ la quantité de chaleur dégagée dans la modification considérée par le système que composent les deux parties 1 et 2, le second membre de l'égalité précédente représente la quantité $-\mathrm{E}\,dQ$; on a donc

$$dQ = dQ_1 + dQ_2.$$

Si donc un système, qui peut présenter des liaisons bilatérales avec les corps avoisinants, est formé de parties qui peuvent présenter entre elles des liaisons bilatérales, la quantité de chaleur que le système dégage dans une modification quelconque est la somme algébrique des quantités de chaleur que dégagent, dans la même modification, ses diverses parties.

Si l'on rapproche cette proposition de la précédente, on obtient celle-ci :

Lorsqu'un système isolé est formé de deux parties ayant entre elles des liaisons bilatérales, la quantité de chaleur dégagée par l'une de ses parties, dans une modification réelle ou virtuelle du système, est égale à la quantité de chaleur absorbée par l'autre.

Nous avons étudié (Ire Partie, Chap. III, nº 5) les procédés calorimétriques; nous avons considéré trois systèmes S_1, S_2, S_3, que nous avons supposés indépendants; les propositions qui précèdent permettent d'étendre la théorie de la calorimétrie au cas où les systèmes S_1, S_2, S_3 présentent entre eux des liaisons bilatérales; c'est ce cas qui est, en général, réalisé dans la pratique.

Des égalités (13), on déduit aisément la conséquence suivante :

Soient, dans une modification réelle ou virtuelle d'un système qui

présente, avec les corps extérieurs, des liaisons bilatérales, $d\mathfrak{T}$ le travail des actions extérieures et des forces extérieures de liaisons; $d\tau$ le travail des forces d'inertie; nous aurons

$$\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + d\tau = d\mathfrak{T} + \mathrm{E}\,d\mathrm{Q}.$$

Dans le cas d'une modification réelle, cette égalité devient

$$\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + \delta\mathfrak{C} = d\mathfrak{T} + \mathrm{E}\,d\mathrm{Q}.$$

Ces égalités expriment le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail pour un système soumis à des liaisons bilatérales de la part des corps qui l'environnent.

Tout ce que nous venons de dire demeure vrai lors même que la température du système n'est pas uniforme. Supposons maintenant que cette température soit uniforme. Les égalités

$$(13\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{E}\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\alpha'} - (\mathrm{A} + \mathrm{F}_\alpha) = \mathrm{ER}_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathrm{E}\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\lambda'} - (\mathrm{L} + \mathrm{F}_\lambda) = \mathrm{ER}_\lambda, \\ \mathrm{E}\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial a} - \mathcal{A} = \mathrm{E}\mathcal{R}_a, \qquad \dots, \qquad \mathrm{E}\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial l} - \mathcal{L} = \mathrm{E}\mathcal{R}_l, \\ \qquad\qquad \mathrm{E}\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial\vartheta} = \mathrm{EC}, \end{array}\right.$$

qui définissent les coefficients calorifiques du système, jointes aux équations du mouvement

$$(10\ ter)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{E}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\alpha'} - (\mathrm{A} + \mathrm{F}_\alpha + f_\alpha) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathrm{E}\dfrac{\partial}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\lambda'} - (\mathrm{L} + \mathrm{F}_\lambda + f_\lambda) = 0, \\ \mathrm{E}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial a} - (\mathcal{A} + f_a) = 0, \qquad \dots, \qquad \mathrm{E}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial l} - (\mathcal{L} + f_l) = 0, \end{array}\right.$$

et aux identités

$$\mathcal{F} = \mathrm{E}[\mathrm{U} - \mathrm{F}(\vartheta)\mathrm{S}],$$
$$\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\vartheta} = \mathrm{F}(\vartheta)\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\vartheta}$$

donnent

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{E}\mathrm{R}_\alpha = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{I})\,\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha} + f_\alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{E}\mathrm{R}_\lambda = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{I})\,\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda} + f_\lambda, \\ \mathrm{E}\mathfrak{R}_a = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{I})\,\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial a} + f_a, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{E}\mathfrak{R}_l = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{I})\,\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial l} + f_l, \\ \mathrm{E}\mathrm{C} \;= \mathrm{E}\mathrm{F}(\mathfrak{I})\,\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathfrak{I}}, \end{array}\right.$$

égalités semblables à celles que l'on obtient pour un système indépendant.

On déduit de là, pour une modification réelle quelconque,

$$(17)\quad \frac{\mathrm{E}\,d\mathrm{Q}}{\mathrm{F}(\mathfrak{I})} = -\,\mathrm{E}\,d\mathrm{S} - \frac{f_\alpha\,d\alpha + \ldots + f_l\,dl}{\mathrm{F}(\mathfrak{I})}.$$

Imaginons un système formé de n parties 1, 2, ..., n, indépendantes ou offrant entre elles des liaisons bilatérales; chacune de ces parties a une température uniforme, mais cette température n'est pas forcément la même pour toutes ces parties; le système lui-même peut présenter avec les corps avoisinants des liaisons bilatérales.

Pour chacune de ces parties, écrivons une égalité analogue à l'égalité (17) et ajoutons membre à membre ces diverses égalités. Si nous posons

$$(18)\quad \mathfrak{s} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \ldots + \mathrm{S}_n,$$

nous trouverons

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\frac{d\mathrm{Q}_1}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_1)} + \frac{d\mathrm{Q}_2}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_2)} + \ldots + \frac{d\mathrm{Q}_n}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_n)}\right] &= -\,\mathrm{E}\,d\mathfrak{s} \\ &- \frac{f_{\alpha_1}d\alpha_1 + \ldots + f_{l_1}dl_1}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_1)} - \frac{f_{\alpha_2}d\alpha_2 + \ldots + f_{l_2}dl_2}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_2)} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{f_{\alpha_n}d\alpha_n + \ldots + f_{l_n}dl_n}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_n)}. \end{aligned}$$

Intégrons cette égalité pour un cycle fermé, en observant que l'on a

$$\int d\mathrm{S} = 0,$$

$$f_{\alpha_1} d\alpha_1 + \ldots + f_{l_1} dl_1 \leqq 0,$$

$$f_{\alpha_2} d\alpha_2 + \ldots + f_{l_2} dl_2 \leqq 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{\alpha_n} d\alpha_n + \ldots + f_{l_n} dl_n \leqq 0,$$

et nous trouverons l'inégalité

$$(19) \qquad \int \left[\frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} + \ldots + \frac{dQ_n}{F(\vartheta_n)} \right] \geqq 0.$$

Cette inégalité est ainsi étendue aux systèmes que forment des parties portées à des températures différentes et présentant entre elles des liaisons bilatérales.

CHAPITRE IV.

STABILITÉ ET DÉPLACEMENT DE L'ÉQUILIBRE.

1. *Du potentiel thermodynamique total.* — Le travail virtuel des actions extérieures à un système (en y comprenant, au besoin, les forces de liaisons extérieures)

$$\mathrm{A}\,\delta\alpha + \mathrm{B}\,\delta\beta + \ldots + \mathrm{L}\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l$$

n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction uniforme des variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$. Cependant, s'il n'en est pas ainsi en général, il en est ainsi dans un grand nombre de cas particuliers importants.

Lorsqu'il existe une fonction uniforme Ω telle que l'on ait

$$(1) \qquad \mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta + \ldots + \mathrm{L}\,d\lambda + \mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \ldots + \mathcal{L}\,dl = -\,d\Omega,$$

on dit que *les actions extérieures au système admettent un potentiel*

et que Ω est ce potentiel. Ce potentiel, lorsqu'il existe, est évidemment déterminé à une constante près.

Lorsque les actions extérieures admettent un potentiel, nous donnons le nom de *potentiel thermodynamique total* du système à la somme

$$\Phi = \mathcal{F} + \Omega \tag{2}$$

du potentiel thermodynamique interne et du potentiel des actions extérieures.

Voici un cas important où un système admet un potentiel thermodynamique total :

Imaginons les variations réelles ou virtuelles des corps extérieurs tellement liées aux variations réelles ou virtuelles du système que les actions extérieures A, B, ..., L, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{L}$ gardent des valeurs invariables. On pourra alors écrire

$$\begin{aligned} & \mathrm{A}\, d\alpha + \mathrm{B}\, d\beta + \ldots + \mathrm{L}\, d\lambda + \mathcal{A}\, a + \mathcal{B}\, b + \ldots + \mathcal{L}\, l \\ & = d(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \ldots + \mathrm{L}\lambda + \mathcal{A}\, a + \mathcal{B}\, b + \ldots + \mathcal{L}\, l) \end{aligned}$$

et le système admettra pour potentiel thermodynamique total la quantité

$$\Phi = \mathcal{F} - (\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \ldots + \mathrm{L}\lambda + \mathcal{A}\, da + \mathcal{B}\, db + \ldots + \mathcal{L}\, dl). \tag{3}$$

Nous donnerons à cette quantité, que l'on a souvent à considérer dans les applications, le nom de *potentiel thermodynamique sous actions constantes*.

2. *Stabilité de l'équilibre à température constante.* — Il nous est désormais inutile de distinguer les variables $a, b, \ldots, l$ des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Considérons donc un système dont la température soit uniforme et qui soit défini par les variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$. Pour tout mouvement réel de ce système, nous aurons [Chap. II, équation (11)],

$$\begin{aligned} & d\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}}\, d\mathfrak{S} - (\mathrm{A}\, d\alpha + \mathrm{B}\, d\beta + \ldots + \mathrm{L}\, d\lambda) \\ & = -\, d\mathfrak{T} + (f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda). \end{aligned}$$

Si les actions extérieures admettent un potentiel Ω, cette égalité, jointe aux égalités (1) et (2), deviendra

$$d\Phi - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}} d\mathfrak{I} = - d\mathfrak{T} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda.$$

Si la modification est isothermique, cette égalité deviendra

$$d\Phi = - d\mathfrak{T} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda. \tag{4}$$

Intégrée entre un état initial 0 et un état final 1 du système, elle deviendra

$$\Phi_0 - \Phi_1 = \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_0 - \int_0^1 (f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda). \tag{4 bis}$$

Il suffit alors d'observer que la quantité

$$\int_0^1 (f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda)$$

ne peut jamais être positive, et de répéter presque textuellement la démonstration, devenue classique, de Lejeune-Dirichlet [1] pour parvenir au théorème suivant :

Un système dont la température est maintenue constante est assurément en équilibre stable dans un état où son potentiel thermodynamique total présente une valeur minima parmi toutes celles qu'il peut prendre à la même température.

Il n'est pas du tout certain qu'il n'y ait, pour un système, d'autre état d'équilibre stable que ceux qui correspondent à un minimum du potentiel thermodynamique total.

Dans ce qui va suivre, lorsque nous parlerons d'un système *en équilibre*, nous entendrons désigner abréviativement par là un sys-

---

[1] LEJEUNE-DIRICHLET, *Ueber die Stabilität des Gleichgewichts* (*Journal de Crelle*, t. 22, p. 85; 1846).

tème dont le potentiel thermodynamique total a une valeur minima parmi toutes celles qu'il peut prendre à la même température.

3. *Déplacement de l'équilibre par une variation de température.* — Un système est en équilibre, à une température donnée ϑ, lorsqu'il est soumis aux actions A, B, ..., L; les variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, qui, avec la température ϑ, achèvent de déterminer ce système, ont, dans cet état, des valeurs données par les équations

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \mathrm{A}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \mathrm{B}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = \mathrm{L}.$$

Supposons que les actions A, B, ..., L admettent un potentiel Ω, qui sera une fonction de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, mais point de ϑ (Chap. I, n° **3**) et posons, conformément à l'égalité (1), $\Phi = \mathcal{F} + \Omega$. Les équations précédentes pourront s'écrire

$$(5) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0.$$

Résolues par rapport à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ces équations deviennent

$$\alpha = \alpha(\vartheta), \qquad \beta = \beta(\vartheta), \qquad \ldots, \qquad \lambda = \lambda(\vartheta).$$

A la température $(\vartheta + d\vartheta)$, sous l'action des mêmes corps étrangers, il s'établira un nouvel état d'équilibre, dans lequel les variables normales qui définissent l'état du système auront les nouvelles valeurs

$$\alpha' = \alpha(\vartheta) + \frac{d\,\alpha(\vartheta)}{d\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$\beta' = \beta(\vartheta) + \frac{d\,\beta(\vartheta)}{d\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda' = \lambda(\vartheta) + \frac{d\,\lambda(\vartheta)}{d\vartheta}\, d\vartheta.$$

Les équations d'équilibre (5), différentiées par rapport à ϑ, donnent

le système d'équations

$$(6)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{S}}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}\dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{S}}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\dfrac{d\beta}{d\mathfrak{S}}+\ldots+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{S}}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\,\partial\mathfrak{S}}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\,\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{S}}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\dfrac{d\beta}{d\mathfrak{S}}+\ldots+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\,\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{S}}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{S}}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda\,\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{S}}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda\,\partial\beta}\dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{S}}+\ldots+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}\dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{S}}=0.\end{cases}$$

Multiplions les deux membres de la première de ces équations par $\frac{d\alpha}{d\mathfrak{S}}$, les deux membres de la seconde par $\frac{d\beta}{d\mathfrak{S}}$, ..., les deux membres de la dernière par $\frac{\partial\lambda}{\partial\mathfrak{S}}$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus : nous obtiendrons l'égalité suivante

$$(7)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{S}}\dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{S}}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\,\partial\mathfrak{S}}\dfrac{d\beta}{d\mathfrak{S}}+\ldots+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{S}}\dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{S}}\\[2mm] \quad+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}\left(\dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{S}}\right)^2+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\left(\dfrac{d\beta}{d\mathfrak{S}}\right)^2+\ldots+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\left(\dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{S}}\right)^2\\[2mm] \qquad\qquad+2\sum\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\mu\,\partial\nu}\dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{S}}\dfrac{d\mu}{d\mathfrak{S}}=0.\end{cases}$$

Dans cette égalité, on doit attribuer au symbole $\sum\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{d\mu}{d\mathfrak{S}}\frac{d\nu}{d\mathfrak{S}}$ la signification suivante :

On considère toutes les valeurs, distinctes les unes des autres, de la quantité $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{d\mu}{d\mathfrak{S}}\frac{d\nu}{d\mathfrak{S}}$ que l'on peut obtenir en remplaçant μ et ν par deux lettres, distinctes les unes des autres, prises dans l'ensemble α, β, ..., λ, et l'on fait la somme de toutes ces valeurs distinctes.

Par hypothèse, les valeurs de α, β, ..., λ, que définissent les égalités (5), donnent à Φ une valeur minimum parmi toutes celles qu'il peut prendre à la température $\mathfrak{S}$. Dès lors, si l'on donne à α, β, ..., λ ces valeurs, on est assuré que la forme quadratique

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}a^2+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}b^2+\ldots+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}l^2+2\sum\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu\,\partial\nu}mn$$

est positive, quelles que soient les valeurs, différentes de o, que l'on attribue aux quantités a, b, ..., l.

Il en sera ainsi, en particulier, si l'on fait

$$a = \frac{d\alpha}{d\vartheta}, \qquad b = \frac{d\beta}{d\vartheta}, \qquad \ldots, \qquad l = \frac{d\lambda}{d\vartheta}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{d\vartheta}\right)^5 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}\left(\frac{d\beta}{d\vartheta}\right)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{d\vartheta}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu}\,\frac{d\mu}{d\vartheta}\,\frac{d\nu}{d\vartheta} > 0.$$

Cette inégalité, jointe à l'égalité (7), donne l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial \vartheta}\,\frac{d\alpha}{d\vartheta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial \vartheta}\,\frac{d\beta}{d\vartheta} + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda\, \partial \vartheta}\,\frac{d\lambda}{d\vartheta} < 0.$$

Posons

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{d\vartheta}\,d\vartheta, \qquad d\beta = \frac{d\beta}{d\vartheta}\,d\vartheta, \qquad d\lambda = \frac{d\lambda}{d\vartheta}\,d\vartheta.$$

L'inégalité que nous venons d'obtenir pourra s'énoncer de la manière suivante.

La quantité

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial \vartheta}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial \vartheta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda\, \partial \vartheta}\,d\lambda$$

est de signe contraire à $d\vartheta$.

Les actions extérieures A, B, ..., L, égales au signe près aux dérivées partielles de la fonction Ω par rapport à α, β, ..., λ, sont indépendantes de la température ϑ; on a donc

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha\, \partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta\, \partial \vartheta} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda\, \partial \vartheta} = 0.$$

Dès lors, en vertu de l'égalité (1), le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer ainsi :

La quantité

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha\, \partial \vartheta}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \beta\, \partial \vartheta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda\, \partial \vartheta}\,d\lambda$$

est de signe contraire à $d\vartheta$.

En vertu de l'égalité (5 *bis*) du Chapitre I, la quantité (8) peut s'écrire

$$- \mathrm{E}\,\mathrm{F}'(\mathfrak{I})\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda}\,d\lambda\right).$$

En vertu des égalités (3) du même Chapitre, elle devient

$$- \frac{\mathrm{E}\,\mathrm{F}'(\mathfrak{I})}{\mathrm{F}(\mathfrak{I})}(\mathrm{R}_\alpha\,d\alpha + \mathrm{R}_\beta\,d\beta + \ldots + \mathrm{R}_\lambda\,d\lambda).$$

La quantité $\frac{\mathrm{F}'(\mathfrak{I})}{\mathrm{F}(\mathfrak{I})}$ étant assurément positive, on voit que la quantité

$$\mathrm{R}_\alpha\,d\alpha + \mathrm{R}_\beta\,d\beta + \ldots + \mathrm{R}_\lambda\,d\lambda$$

est de même signe que $d\mathfrak{I}$, ce qui exprime la loi suivante :

Considérons un système soumis à des actions qui admettent un potentiel. Ce système est en équilibre à une température donnée. Si l'on élève cette température, il s'établit un équilibre différent du premier; les variables normales qui caractérisent l'état du système subissent certaines variations; si elles subissaient ces mêmes variations à température constante, la modification virtuelle imposée au système entraînerait une absorption de chaleur.

Cette loi, entrevue par Lavoisier et Laplace, a été énoncée par M. J.-H. Van t' Hoff.

4. *Déplacement isothermique de l'équilibre.* — Un système est soumis à des actions constantes A, B, ..., L, et porté à la température $\mathfrak{I}$; il prend un certain état d'équilibre stable rendant minimum le potentiel thermodynamique sous les actions constantes A, B, ..., L. Les variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ont des valeurs définies en fonctions de A, B, ..., L, $\mathfrak{I}$, par les équations

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} = \mathrm{A}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta} = \mathrm{B}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda} = \mathrm{L}.$$

Laissons à la température la valeur $\mathfrak{I}$ et donnons aux actions A,

B, ..., L, de nouvelles valeurs, voisines des précédentes, $(A + dA)$, $(B + dB)$, ..., $(L + dL)$; le système prendra un nouvel état d'équilibre défini par des valeurs $(\alpha + d\alpha)$, $(\beta + d\beta)$, ..., $(\lambda + d\lambda)$ des variables normales α, β, ..., λ, en posant pour abréger

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= \frac{\partial\alpha}{\partial A}\,dA + \frac{\partial\alpha}{\partial B}\,dB + \ldots + \frac{\partial\alpha}{\partial L}\,dL,\\
d\beta &= \frac{\partial\beta}{\partial A}\,dA + \frac{\partial\beta}{\partial B}\,dB + \ldots + \frac{\partial\beta}{\partial L}\,dL,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
d\lambda &= \frac{\partial\lambda}{\partial A}\,dA + \frac{\partial\lambda}{\partial B}\,dB + \ldots + \frac{\partial\lambda}{\partial L}\,dL.
\end{aligned}
$$

Les égalités (9), différentiées, nous donneront

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha^2}\,d\alpha + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\lambda}\,d\lambda = dA,\\
&\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\beta\,\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\beta^2}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\beta\,\partial\lambda}\,d\lambda = dB,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\lambda\,\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\lambda\,\partial\beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\lambda^2}\,d\lambda = dL.
\end{aligned}
$$

Multiplions la première de ces égalités par $d\alpha$, la seconde par $d\beta$, ..., la dernière par $d\lambda$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2 + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\beta^2}(d\beta)^2 + \ldots + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu\\
&\quad = dA\,d\alpha + dB\,d\beta + \ldots + dL\,d\lambda.
\end{aligned}
\right.
$$

Proposons-nous de déterminer le signe du premier membre de l'égalité (10).

Considérons le potentiel thermodynamique sous les actions constantes A, B, ..., L.

$$
(11)\qquad \Phi = \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta) - (A\alpha + B\beta + \ldots + L\lambda).
$$

Par hypothèse, les valeurs de α, β, ..., λ, que définissent les égalités (9), font prendre à ce potentiel une valeur minima parmi toutes celles qu'il peut prendre à la température $\mathfrak{S}$. Si donc on donne à α, β, ..., λ ces valeurs, la forme quadratique

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} a^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} b^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} l^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu \, \partial \nu} mn$$

sera positive quelles que soient les valeurs non nulles attribuées aux quantités a, b, ..., l; elle le sera, en particulier, si l'on pose

$$a = d\alpha, \qquad b = d\beta, \qquad \ldots, \qquad l = d\lambda.$$

On aura donc

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} (da)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} (db)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} (dl)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu \, \partial \nu} dm \, dn > 0.$$

Mais les actions A, B, ..., L, qui figurent dans l'expression (11) de Φ, étant des constantes, on a

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \beta^2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu \, \partial \nu} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mu \, \partial \nu}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \beta^2} (d\beta)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mu \, \partial \nu} d\mu \, d\nu > 0.$$

L'égalité (10) nous conduit donc à l'inégalité

$$dA \, d\alpha + dB \, d\beta + \ldots + dL \, d\lambda > 0,$$

qui exprime la proposition suivante :

Un système est en équilibre, à une température donnée, sous certaines actions extérieures; à ces actions extérieures, on ajoute certaines actions perturbatrices infiniment petites, la température demeurant la même; l'équilibre primitif est troublé, et un nouvel

état d'équilibre s'établit; dans le passage de l'ancien état d'équilibre au nouveau, les actions perturbatrices effectuent toujours un travail positif.

Un cas particulier de cette loi avait été énoncé par M. H. Le Chatelier.

5. *Stabilité isentropique de l'équilibre.* — On nomme, d'après M. Gibbs, *modification isentropique* une modification durant laquelle l'entropie du système demeure invariable; dans une semblable modification, les variations $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, $d\vartheta$ des variables normales sont liées par la relation

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0. \tag{12}$$

Les modifications isentropiques sont intéressantes à considérer en ce que si le système qui décrit une modification isentropique est à chaque instant en équilibre sous l'action des corps extérieurs, la modification isentropique qu'il décrit est ce que nous avons nommé une *modification adiabatique réversible;* réciproquement, toute modification adiabatique réversible est isentropique.

Imaginons un système soumis à des actions extérieures qui admettent un potentiel Ω, et supposons ce système en équilibre. Nous avons

$$\frac{\partial(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial \beta} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial \lambda} = 0.$$

Ces égalités peuvent encore s'écrire

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - E\,F(\vartheta)\dfrac{\partial S}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = 0, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \beta} - E\,F(\vartheta)\dfrac{\partial S}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \beta} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - E\,F(\vartheta)\dfrac{\partial S}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0. \end{array} \right.$$

Joignons-y l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} = o$$

qui peut encore s'écrire, puisque Ω peut toujours être pris indépendant de $\mathfrak{S}$,

$$(13\,bis) \qquad E \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - E\,F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{S}} = o.$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (13) par $d\alpha$, les deux membres de la seconde par $d\beta$, ..., les deux membres de la dernière par $d\lambda$, les deux membres de l'égalité (13 *bis*) par $d\mathfrak{S}$, $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, $d\mathfrak{S}$ définissant une modification isentropique; ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de l'égalité (12) et nous trouverons

$$(14) \qquad d(EU + \Omega) = o.$$

Ainsi *toute modification isentropique imposée à un système à partir d'un état d'équilibre vérifie l'égalité* (14); du reste, cette égalité exprime simplement que la modification considérée est adiabatique.

Reprenons l'égalité générale [(Chap. II, égalité (11)],

$$d\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}} d\mathfrak{S} + d\Omega = - d\mathfrak{T} + f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda.$$

Elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} &E\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda} d\lambda\right) \\ &\quad - EF(\mathfrak{S})\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} d\lambda\right) + d\Omega \\ &\quad = - d\mathfrak{T} + f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda \end{aligned}$$

et l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} = o$$

permet de la transformer en

$$d(\mathrm{EU} + \Omega) - \mathrm{E\,F}(\vartheta)\,d\mathrm{S} = -\,d\mathfrak{T} + f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda.$$

Pour une modification isentropique, cette égalité se réduit à

$$(15) \qquad d(\mathrm{EU} + \Omega) = -\,d\mathfrak{T} + f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda.$$

La quantité

$$f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda$$

ne pouvant jamais être positive, on peut, à partir des égalités (14) et (15), construire une démonstration semblable à celle de Lejeune-Dirichlet, et obtenir le théorème suivant :

L'équilibre d'un système est assurément stable pour toutes les modifications isentropiques que l'on peut lui imposer si la quantité $(\mathrm{EU} + \Omega)$ *a une valeur minima parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans changement de valeur de l'entropie.*

Ce théorème a été énoncé par M. J.-W. Gibbs. On peut dire avec lui que si la quantité $(\mathfrak{F} + \Omega)$ est le *potentiel thermodynamique à température constante,* la quantité $(\mathrm{EU} + \Omega)$ est le *potentiel thermodynamique à entropie constante.*

Considérons un système en équilibre. Si l'équilibre de ce système est stable pour toutes les modifications isothermiques qu'on peut lui imposer, est-il stable aussi pour toutes les modifications isentropiques? En d'autres termes, s'il est stable lorsqu'on suppose le système entouré de sources de chaleur qui en maintiennent la température constante, est-il encore stable lorsqu'on suppose le système entouré d'une enceinte imperméable à la chaleur?

Pour répondre à cette question, il nous faut invoquer un postulat fondamental, que nous nommerons *Postulat d'Helmholtz,* M. H. von Helmholtz étant le seul physicien, à notre connaissance, qui l'ait explicitement énoncé [1]. Ce postulat est le suivant :

---

[1] H. von Helmholtz, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge.* I. (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie,* 1882, 1er semestre, p. 12 et 19).

Postulat d'Helmholtz. — *Lorsqu'un système est rapporté à des variables normales, la capacité calorifique de ce système est positive.*

Ce postulat s'exprime par l'inégalité

$$C > 0, \tag{16}$$

que les égalités

$$C = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}},$$

$$C = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}},$$

$$C = \frac{F(\mathfrak{S}) F''(\mathfrak{S})}{E[F'(\mathfrak{S})]^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}} - \frac{F(\mathfrak{S})}{E F'(\mathfrak{S})} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}^2}$$

permettent d'écrire sous l'une quelconque des trois formes

$$(16\ bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} > 0, \\[2mm] \dfrac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} > 0, \\[2mm] \dfrac{F''(\mathfrak{S})}{F'(\mathfrak{S})} \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}} - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}^2} > 0. \end{array} \right.$$

Il faut bien observer que ce postulat pourrait cesser d'être conforme à l'expérience si le système n'était pas défini par des variables normales; c'est ainsi que la capacité calorifique de la vapeur d'eau *sous tension de vapeur saturée* est négative. Cette remarque montre en outre que le postulat qui précède, pour naturel qu'il paraisse, n'est ni évident, ni nécessaire.

Ce postulat admis, nous allons montrer que la stabilité isothermique de l'équilibre entraîne la stabilité isentropique.

Conservons le symbole d pour désigner les variables isentropiques et servons-nous du symbole δ pour désigner les variations isothermiques. La proposition à démontrer se ramène évidemment à celle-ci : *Sachant que, pour un système en équilibre, on a*

$$\delta^2(\mathcal{F} + \Omega) > 0, \tag{17}$$

démontrer que l'on a

$$(18) \qquad d^2(EU + \Omega) > 0.$$

L'inégalité (17) peut s'écrire plus explicitement

$$(17\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial\alpha^2}(\delta\alpha)^2 + \ldots \\ & + \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial\lambda^2}(\delta\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}\delta\mu\,\delta\nu > 0. \end{aligned} \right.$$

Dans une modification isothermique, les quantités $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda$ sont absolument arbitraires; l'inégalité précédente (17 *bis*) aura donc encore lieu si l'on remplace $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda$ par les variations $d\alpha$, $d\beta, \ldots, d\lambda$, qui correspondent à une modification isentropique. Nous aurons par conséquent, pour toute modification isentropique,

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2 + \ldots \\ & + \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu > 0. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, l'identité

$$(12) \qquad \frac{\partial S}{\partial\alpha}d\alpha + \ldots + \frac{\partial S}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial S}{\partial\vartheta}d\vartheta = 0,$$

qui définit une modification isentropique, donne par différentiation

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 S}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 S}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu \\ & + \frac{\partial S}{\partial\alpha}d^2\alpha + \ldots + \frac{\partial S}{\partial\lambda}d^2\lambda \\ & + \left(2\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}d\alpha + \ldots + 2\frac{\partial^2 S}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}d\lambda + \frac{\partial^2 S}{\partial\vartheta^2}d\vartheta\right)d\vartheta + \frac{\partial S}{\partial\vartheta}d^2\vartheta = 0. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons membre à membre l'inégalité (19) et l'égalité (20), cette dernière ayant été au préalable multipliée par $E\,F(\vartheta)$; tenons compte, en outre, de l'identité

$$(21) \qquad \mathcal{F} + E\,F(\vartheta)S = EU,$$

et nous obtiendrons l'inégalité

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots\\ &\quad+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu\\ &\quad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{I})\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\lambda}d^2\lambda\right)\\ &\quad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{I})\left(2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{I}}d\alpha+\ldots+2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{I}}d\lambda+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{I}^2}d\mathfrak{I}\right)d\mathfrak{I}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{I})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{I}}d^2\mathfrak{I}>0. \end{aligned}\right.$$

Mais le système étant en équilibre, on a

$$\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial\alpha}=0,\qquad\ldots,\qquad\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial\lambda}=0$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial\lambda}d^2\lambda=0,$$

ce qui, en vertu de l'identité (21), peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda}d^2\lambda\\ &\qquad=\mathrm{E\,F}(\mathfrak{I})\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\alpha}d^2\lambda+\ldots+\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\lambda}d^2\lambda\right). \end{aligned}$$

Moyennant cette égalité, l'inégalité (22) devient

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots\\ &\quad+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu\\ &\quad+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda}d^2\lambda\\ &\quad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{I})\left(2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{I}}d\alpha+\ldots+2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{I}}d\lambda+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{I}^2}d\mathfrak{I}\right)d\mathfrak{I}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{I})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{I}}d^2\mathfrak{I}>0. \end{aligned}\right.$$

L'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial \vartheta}$$

peut s'écrire, en observant que Ω est indépendant de ϑ,

$$E\,F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\,d\vartheta = \frac{\partial(EU+\Omega)}{\partial \vartheta}\,d\vartheta.$$

Différentiée, elle donne

$$\begin{aligned}
&E\,F(\vartheta)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}\,d\alpha+\ldots+\frac{\partial^2 S}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}\,d\lambda+\frac{\partial^2 S}{\partial\vartheta^2}\,d\vartheta\right)d\vartheta\\
&\quad+E\,F'(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial\vartheta}(d\vartheta)^2+E\,F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial\vartheta}\,d^2\vartheta\\
&=\left[\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}\,d\alpha+\ldots\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}\,d\lambda+\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\vartheta^2}\,d\vartheta+\right]d\vartheta+\frac{\partial(EU+\Omega)}{\partial\vartheta}\,d^2\vartheta.
\end{aligned}$$

Comparée à l'inégalité (23), cette égalité nous permet d'écrire

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu\\
&\quad+\left[\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}\,d\alpha+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}\,d\lambda+\frac{\partial^2(EU+\Omega)}{\partial\vartheta^2}\,d\vartheta\right]d\vartheta\\
&\quad+\frac{\partial(EU+\Omega)}{\partial\alpha}\,d^2\alpha+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial(EU+\Omega)}{\partial\lambda}\,d^2\lambda+\frac{\partial(EU+\Omega)}{\partial\vartheta}\,d^2\vartheta\\
&\quad+E\,F(\vartheta)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}\,d\alpha+\ldots+\frac{\partial^2 S}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}\,d\lambda\right)d\vartheta\\
&\qquad\qquad-E\,F'(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial\vartheta}(d\vartheta)^2>0.
\end{aligned}\right.$$

L'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial \vartheta},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\vartheta} = \mathrm{E\,F}(\vartheta)\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\vartheta}$$

donne les identités

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha\,\partial\vartheta} = \mathrm{E\,F}(\vartheta)\dfrac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda\,\partial\vartheta} = \mathrm{E\,F}(\vartheta)\dfrac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}. \end{cases}$$

Moyennant ces égalités (25), l'inégalité (24) devient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\vartheta^2}(d\vartheta)^2 \\ &+2\sum\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu \\ &+2\left[\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}d\alpha+\ldots+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}d\lambda\right]d\vartheta \\ &+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda}d^2\lambda+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\vartheta}d^2\vartheta \\ &\qquad -\mathrm{EF}'(\vartheta)\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\vartheta}(d\vartheta)^2>0, \end{aligned}$$

ou bien

$$d^2(\mathrm{EU}+\Omega)-\mathrm{E}\frac{\mathrm{F}'(\vartheta)}{\mathrm{F}(\vartheta)}\mathrm{C}(d\vartheta)^2>0.$$

Les quantités E, $\mathrm{F}(\vartheta)$, $\mathrm{F}'(\vartheta)$, sont essentiellement positives; d'après le postulat d'Helmholtz, il en est de même de la quantité C; l'inégalité précédente exige donc que l'on ait

$$d^2(\mathrm{EU}+\Omega)>0.$$

C'est l'inégalité (18) que nous voulions démontrer.

6. *Déplacement isentropique de l'équilibre.* — Prenons un système en équilibre stable, pour les modifications isothermiques, sous les actions constantes A, B, ..., L. La quantité

$$\Phi = \mathcal{F}(\alpha,\beta,\ldots,\lambda,\vartheta)-(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\ldots+\mathrm{L}\lambda),$$

dans laquelle les quantités A, B, ..., L sont indépendantes des variables α, β, ..., λ, a une valeur minima parmi celles qu'elle peut prendre à la même température ϑ. On a donc, en premier lieu,

$$(26) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} - A = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} - L = 0;$$

en second lieu,

$$(27) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(\delta\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}(\delta\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu}\delta\mu\,\delta\nu > 0.$$

Cette dernière inégalité a lieu quelles que soient les valeurs non toutes nulles de $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$.

Donnons aux actions A, B, ..., L des variations infiniment petites dA, dB, ..., dL, tandis que le système ne peut échanger de chaleur avec l'extérieur. Le système éprouvera une modification isentropique et parviendra à un nouvel état d'équilibre. Dans cet état, les variables normales qui définissent le système auront les nouvelles valeurs

$$\alpha + d\alpha, \quad \ldots, \quad \lambda + d\lambda, \quad \vartheta + d\vartheta.$$

La modification étant isentropique, on devra avoir l'égalité

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}d\alpha + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial S}{\partial \vartheta}d\vartheta = 0,$$

que l'identité

$$E\,F'(\vartheta)S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}$$

permet de transformer en

$$(28) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial \vartheta}d\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \vartheta}d\lambda + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta^2}d\vartheta - \frac{F''(\vartheta)}{F'(\vartheta)}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}d\vartheta = 0.$$

D'autre part, les égalités (26) donnent, par différentiation,

$$(29) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}d\alpha + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial \lambda}d\lambda + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial \vartheta}d\vartheta = dA, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \alpha}d\alpha + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}d\lambda + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \vartheta}d\vartheta = dL. \end{array} \right.$$

Multiplions la première des égalités (29) par $d\alpha$, ..., la dernière par $d\lambda$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{I}}\,d\alpha+\ldots+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{I}}\,d\lambda\right)d\mathfrak{I}\\&\quad=d\mathrm{A}\,d\alpha+\ldots+d\mathrm{L}\,d\lambda,\end{aligned}$$

égalité que la relation (28) transforme en

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu\\&\quad-\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{I}^2}-\frac{\mathrm{F}''(\mathfrak{I})}{\mathrm{F}'(\mathfrak{I})}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{I}}\right](d\mathfrak{I})^2\\&\quad=d\mathrm{A}\,d\alpha+\ldots+d\mathrm{L}\,d\lambda,\end{aligned}$$

ou bien en

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}&d\mathrm{A}\,d\alpha+\ldots+d\mathrm{L}\,d\lambda\\&\quad=\frac{\mathrm{E}\mathrm{F}'(\mathfrak{I})}{\mathrm{F}(\mathfrak{I})}\,\mathrm{C}(d\mathfrak{I})^2+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots\\&\quad+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu.\end{aligned}\right.$$

L'inégalité (27) ayant lieu quels que soient $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$ doit avoir lieu si l'on fait

$$\delta\alpha=d\alpha,\qquad\ldots,\qquad\delta\lambda=d\lambda.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu>0.$$

D'autre part, le postulat d'Helmholtz donne

$$\frac{\mathrm{E}\,\mathrm{F}'(\mathfrak{I})}{\mathrm{F}(\mathfrak{I})}\,\mathrm{C}(d\mathfrak{I})^2>0.$$

On a donc

$$(31)\qquad d\mathrm{A}\,d\alpha+\ldots+d\mathrm{L}\,d\lambda>0.$$

Cette inégalité (31) équivaut au théorème suivant :

Un système est en équilibre sous certaines actions extérieures; il ne peut éprouver que des modifications isentropiques; on ajoute aux actions extérieures des actions perturbatrices infiniment petites; le système parvient à un nouvel état d'équilibre; dans le passage de l'ancien état d'équilibre au nouveau, les actions perturbatrices effectuent toujours un travail positif.

Ce principe du déplacement isentropique de l'équilibre est utile dans la discussion de certains problèmes relatifs à la détente des vapeurs.

7. *La chaleur spécifique sous actions constantes.* — Imaginons un système maintenu en équilibre par des actions extérieures constantes A, B, ..., L. Il passe d'un état défini par des valeurs α, β, ..., λ, ϑ, des variables normales, à un nouvel état défini par des valeurs $(\alpha + D\alpha)$, $(\beta + D\beta)$, ..., $(\lambda + D\lambda)$, $(\vartheta + D\vartheta)$ des variables normales.

Les équations d'équilibre

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} - A = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} - L = 0$$

donnent par différentiation

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} D\alpha + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \, \partial \lambda} D\lambda + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \, \partial \vartheta} D\vartheta = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \, \partial \alpha} D\alpha + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} D\lambda + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \, \partial \vartheta} D\vartheta = 0. \end{array} \right.$$

Ces égalités nous donnent pour $D\alpha$, $D\beta$, ..., $D\lambda$ des valeurs proportionnelles à $D\vartheta$, les coefficients de proportionnalité dépendant des variables α, β, ..., λ, ϑ.

Il en résulte que la quantité de chaleur absorbée dans la modification précédente,

$$R_\alpha D\alpha + \ldots + R_\lambda D\lambda + C D\vartheta,$$

peut s'écrire $\Gamma D\vartheta$, Γ étant une fonction de α, β, ..., λ, ϑ.

Γ est ce que nous nommerons la *capacité calorifique sous les actions constantes* A, B, ..., L. C'est la capacité calorifique relative au système de variables [1] non normal A, B, ..., L, ϑ.

On a donc, par définition,

$$(\Gamma - C)\,D\vartheta = R_\alpha\,D\alpha + \ldots + R_\lambda\,D\lambda,$$

ou bien [Chap. I, égalités (7 *bis*)],

$$(33) \qquad (\Gamma - C)\,D\vartheta = -\frac{F(\vartheta)}{E\,F'(\vartheta)}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}\,D\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\vartheta}\,D\lambda\right)$$

Mais des égalités (32), on déduit aisément l'égalité

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(D\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(D\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,D\mu\,D\nu + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}\,D\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\vartheta}\,D\lambda\right)D\vartheta = 0.$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (33), donne

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\Gamma - C)(D\vartheta)^2 \\ &\quad = \frac{F(\vartheta)}{E\,F'(\vartheta)}\left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(D\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(D\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,D\mu\,D\nu\right]. \end{aligned} \right.$$

Si le système est en équilibre stable lorsque les actions extérieures A, B, ..., L sont maintenues constantes, la quantité

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(\delta\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(\delta\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,\delta\mu\,\delta\nu$$

est, comme nous l'avons vu au n° **4**, positive quels que soient $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$. L'égalité (34) nous donne donc l'inégalité

$$\Gamma - C > 0.$$

---

[1] Au sujet de ce système de variables, *voir* notre *Mémoire sur les équations générales de la Thermodynamique,* Chap. V (*Annales de l'École Normale,* 3ᵉ série, t. VII, 1891).

Par conséquent, *si un système est en équilibre stable lorsqu'on maintient constantes les actions extérieures qui le sollicitent, sa capacité calorifique est plus grande lorsqu'on maintient constantes les actions* A, B, ..., L, *que lorsqu'on maintient constantes les variables normales* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Imaginons que l'on veuille imposer aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les variations $D\alpha, D\beta, \ldots, D\lambda$, la température ϑ étant maintenue constante. Il faudra adjoindre aux actions extérieures A, B, ..., L des actions perturbatrices $\delta A, \delta B, \ldots, \delta L$. On aurait, d'après l'égalité (10),

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta A\, D\alpha + \ldots + \delta L\, D\lambda \\ &\quad = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(D\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}(D\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu} D\mu\, D\nu. \end{aligned}\right.$$

Imaginons que l'on veuille imposer aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les mêmes variations $D\alpha, \ldots, D\lambda$ par une modification isentropique; la température variera alors d'une quantité $d\vartheta$ définie par l'égalité

$$(36)\qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha} D\alpha + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} D\lambda + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0.$$

Pour accomplir cette transformation isentropique, on devra adjoindre aux actions extérieures des actions perturbatrices $dA, dB, \ldots, dL$, et l'on aura, d'après l'égalité (30),

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &dA\, D\alpha + \ldots + dL\, D\lambda \\ &\quad = \frac{E\, F'(\vartheta)}{F(\vartheta)} C (d\vartheta)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(D\alpha)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}(D\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu} D\mu\, D\nu. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (34), (35), (37) donnent

$$\frac{E\, F'(\vartheta)}{F(\vartheta)}(\Gamma - C)(D\vartheta)^2 = \delta A\, D\alpha + \ldots + \delta L\, D\lambda,$$

$$\frac{E\, F'(\vartheta)}{F(\vartheta)} C (d\vartheta)^2 = (dA - \delta A)\, D\alpha + \ldots + (dL - \delta L)\, D\lambda.$$

On déduit de là

$$(38) \qquad \frac{\Gamma - C}{C}\left(\frac{D\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{\delta A\, D\alpha + \ldots + \delta L\, D\lambda}{(dA - \delta A)\, D\alpha + \ldots + (dL - \delta L)\, D\lambda}.$$

Cette relation, où $D\vartheta$ vérifie les égalités (32) et $d\vartheta$ l'égalité (36), est la généralisation de celle par laquelle Laplace a expliqué l'expérience de Desormes et Clément.

CONCLUSION.

Les physiciens qui ont traité de la Thermodynamique ont placé cette science, vis-à-vis de la Dynamique, dans deux positions distinctes.

Les fondateurs de la Thermodynamique ont presque tous incliné à faire de cette science une application de la Dynamique; regardant la chaleur comme un mouvement très petit et très rapide des particules qui constituent les corps, la température comme la force vive moyenne de ce mouvement, les changements d'état physique comme des modifications dans les éléments caractéristiques de ce mouvement, ils ont tenté de déduire les théorèmes de la Thermodynamique des théorèmes de la Mécanique rationnelle; leurs tentatives ont été aisément couronnées de succès dans le domaine du principe de la conservation de l'énergie; elles ont été moins heureuses lorsqu'elles ont abordé le principe de Carnot; malgré les essais audacieux de Clausius, de M. Boltzmann et de M. H. von Helmholtz, le principe de Carnot n'a pu, jusqu'ici, être déduit d'une manière pleinement satisfaisante des propositions de la Dynamique.

Beaucoup de physiciens ont cherché à rendre la Thermodynamique indépendante de toute hypothèse sur la nature de la chaleur; ils ont essayé de l'établir non sur des théorèmes empruntés à la Mécanique rationnelle, mais sur des principes qui lui soient propres; Clausius avait déjà été guidé, dans la rédaction de ses plus beaux Mémoires, par le désir de faire de la Thermodynamique une science indépendante; G. Kirchhoff, comme en témoignent ses *Leçons* récemment publiées, avait montré, dans son enseignement, que ce désir pouvait être réalisé; élève de G. Kirchhoff, M. G. Lippmann a préconisé en

France cette tendance qui domine, aujourd'hui, dans l'enseignement de nos Facultés.

Nous avons essayé, dans le présent travail, d'indiquer une troisième position de la Dynamique par rapport à la Thermodynamique; nous avons fait de la Dynamique un cas particulier de la Thermodynamique, ou plutôt, nous avons constitué, sous le nom de *Thermodynamique,* une science qui embrasse dans des principes communs tous les changements d'état des corps, aussi bien les changements de lieu que les changements de qualités physiques.

Les principes de cette science sont les lois expérimentales que Sadi Carnot, Mayer, Joule, Clausius, W. Thomson, Helmholtz ont établies ou éclaircies. Sa mise en équations, ébauchée par Clausius, perfectionnée par Massieu, Gibbs et Helmholtz, nous ramène à une forme analytique semblable à celle que Lagrange a donnée à la Mécanique; ainsi se trouve maintenue, au travers des évolutions de la Science, cette continuité de tradition qui en assure le progrès.

Il nous semble qu'une conclusion générale se dégage de cette étude : si la science des mouvements cesse d'être, dans l'ordre logique, la première des Sciences physiques, pour devenir seulement un cas particuler d'une science plus générale embrassant dans ses formules toutes les modifications des corps, la tentation sera moindre, pensons-nous, de ramener l'étude de tous les phénomènes physiques à l'étude du mouvement; on comprendra mieux que le changement de lieu dans l'espace n'est pas une modification plus simple que le changement de température ou de quelque autre qualité physique; on fuira dès lors plus volontiers ce qui a été jusqu'ici le plus dangereux écueil de la Physique théorique, la recherche d'une explication mécanique de l'Univers.



Commentaire aux principes de la Thermodynamique [1];

PAR M. P. DUHEM.

DEUXIÈME PARTIE.

LE PRINCIPE DE SADI CARNOT ET DE R. CLAUSIUS.

CHAPITRE I.

LE CYCLE DE CARNOT ET LES MODIFICATIONS RÉVERSIBLES.

1. *Les modifications virtuelles.* — Revenons d'abord à la notion de modification virtuelle pour la préciser mieux que nous ne l'avons fait au cours de la première Partie.

Imaginons un système qui se trouve dans un état donné, ainsi que les corps étrangers à ce système. On connaîtra l'état de ce système, son mouvement et les actions extérieures qui agissent sur lui, si l'on connaît les valeurs des paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

et des quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt}.$$

[1] Voir t. VIII, p. 269.

Pour connaître les forces d'inertie qui agissent sur le système et les coefficients calorifiques du système, il faut, en outre, connaître la valeur de chacune des quantités

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2},\quad \frac{d^2\beta}{dt^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^3\lambda}{dt^2}.$$

Lorqu'on envisage non plus une modification réelle d'un système, mais une modification virtuelle, l'ordre dans lequel se succèdent les divers états du système n'existe que dans notre entendement et non point dans le temps; les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ne peuvent plus être considérées comme des fonctions du temps. On ne peut donc plus parler des quantités

$$\frac{d\alpha}{dt},\quad \frac{d\beta}{dt},\quad \ldots,\quad \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2},\quad \frac{d^2\beta}{dt^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}.$$

Il semble donc qu'il ne soit plus permis de parler de forces d'inertie ou de coefficients calorifiques pour un système qui subit une modification virtuelle.

En réalité, on peut conserver à ces mots une signification.

Dans les formules qui définissent les forces d'inertie et les coefficients calorifiques d'un système en voie de transformation réelle, remplaçons les quantités

$$\frac{d\alpha}{dt},\quad \frac{d\beta}{dt},\quad \ldots,\quad \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2},\quad \frac{d^2\beta}{dt^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}$$

par des grandeurs

$$u,\quad v,\quad \ldots,\quad w,$$

$$u',\quad v',\quad \ldots,\quad w'$$

quelconques, assujetties seulement aux restrictions que la définition

même du système peut imposer aux quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2};$$

nous aurons de nouvelles expressions qui représenteront, par définition, les forces d'inertie et les coefficients calorifiques du système au cours d'une modification virtuelle; nous pourrons alors parler du *travail effectué par les forces d'inertie* et de la *quantité de chaleur dégagée* par le système au cours d'une modification virtuelle.

Les quantités $u, v, \ldots, w$ doivent varier d'une manière continue au cours de la transformation virtuelle; au contraire, les quantités u', $v', \ldots, w'$ peuvent présenter des discontinuités.

2. *Des cycles.* — Rappelons la définition d'un cycle fermé, déjà indiquée dans la première Partie de ce travail (Chap. II, n° **1**).

Imaginons qu'un système parte d'un état initial défini par des valeurs

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \ldots, \quad \lambda_0, \quad a_0, \quad b_0, \quad \ldots, \quad l_0$$

des paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l;$$

son mouvement initial est défini par les valeurs

$$u_0, \quad v_0, \quad \ldots, \quad w_0$$

des vitesses

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w.$$

Ce système subit une série de modifications *réelles* ou *virtuelles* durant lesquelles les paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

et les vitesses

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w$$

varient d'une manière continue.

Il parvient à un état final dans lequel les quantités variables

$$\alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad \lambda,\quad a,\quad b,\quad \ldots,\quad l,\quad u,\quad v,\quad \ldots,\quad w$$

ont des valeurs

$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \ldots,\quad \lambda_1,\quad a_1,\quad b_1,\quad \ldots,\quad l_1,\quad u_1,\quad v_1,\quad \ldots,\quad w_1.$$

Si les quantités

$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \ldots,\quad \lambda_1,\quad a_1,\quad b_1,\quad \ldots,\quad l_1,\quad u_1,\quad v_1,\quad \ldots,\quad w_1$$

sont respectivement égales aux quantités

$$\alpha_0,\quad \beta_0,\quad \ldots,\quad \lambda_0,\quad a_0,\quad b_0,\quad \ldots,\quad l_0,\quad u_0,\quad v_0,\quad \ldots,\quad w_0,$$

on dit que le système a décrit un *cycle fermé* ou simplement un *cycle*.

Si toutes les modifications qui composent un cycle sont des modifications réelles, le cycle est lui-même *réel;* si toutes les modifications qui composent un cycle, ou seulement une partie d'entre elles, sont virtuelles, le cycle est lui-même *virtuel*.

3. *Un cycle réel peut se reproduire indéfiniment.* — C'est ici le lieu d'énoncer une hypothèse qui joue un rôle fondamental dans la constitution de la Thermodynamique :

Hypothèse. — *Soit* S *un système et soit* Σ *l'ensemble des corps étrangers à ce système. Imaginons deux intervalles de temps égaux, l'un compris entre les instants t_0 et t_1, l'autre compris entre les instants t'_0 et t'_1. Supposons les conditions suivantes réalisées :*

1° *En deux instants correspondants quelconques des intervalles (t_0, t_1) et (t'_0, t'_1), le système* Σ *est dans le même état.*

2° *Aux instants t_0 et t'_0, le système* S *est dans le même état et animé des mêmes vitesses.*

Nous admettrons que, dans ces conditions, en deux instants correspondants quelconques des intervalles (t_0, t_1) et (t'_0, t'_1), le système S *est dans le même état.*

Cette hypothèse peut s'énoncer sous une forme moins précise peut-être, mais plus brève, en disant que :

La modification subie par le système S *dans l'intervalle de temps* (t_0, t_1) *est déterminée si l'on connaît : 1° l'état des corps extérieurs* Σ *à tout instant de l'intervalle* (t_0, t_1); *2° l'état et les vitesses du système* S *à l'instant* t_0.

Nous ajouterons qu'à l'instant t_0 l'état des systèmes Σ et S peut être défini seulement aux variables près qui fixent la position absolue dans l'espace de l'ensemble de ces deux systèmes.

Considérons un cycle fermé réellement, décrit par le système S. Pendant le parcours de ce cycle fermé, les corps extérieurs Σ ont passé par une suite d'états. A la fin de ce cycle, le système S a repris le même état et les mêmes vitesses qu'au début. Lorsque ce cycle a achevé d'être décrit, faisons reprendre de nouveau aux corps Σ la suite d'états par laquelle ils ont passé durant le parcours de ce cycle. D'après l'hypothèse précédente, le système S décrira de nouveau le cycle.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Un cycle fermé réel peut être indéfiniment reproduit identique à lui-même POURVU QUE L'ON PUISSE DISPOSER ARBITRAIREMENT DES CORPS EXTÉRIEURS AU SYSTÈME.

4. *Modifications adiabatiques, exothermiques, endothermiques.* — Considérons un système qui subit une modification infiniment petite, réelle ou virtuelle, sous l'influence de certains autres systèmes. Par l'effet de cette transformation, le système dégage une quantité de chaleur dQ; les forces d'inertie (Ire Partie, Chap. III, n° **3**) effectuent un travail $d\tau$. Si la quantité

$$d\mathfrak{Q} = dQ - \frac{1}{E}\, d\tau \tag{1}$$

est égale à 0, *la modification infiniment petite considérée est dite adiabatique.*

Une modification finie est dite adiabatique si toutes les modifications infiniment petites qui la composent sont adiabatiques.

Posons

$$(2) \qquad \mathfrak{Q} = Q - \frac{\tau}{E},$$

Q étant la quantité de chaleur dégagée dans une modification et τ le travail des forces d'inertie durant cette modification.

Nous donnerons à la quantité $\mathfrak{Q}$ le nom d'*effet calorifique total de la modification*.

Nous voyons sans peine que l'effet calorifique total d'une modification adiabatique est toujours égal à o. La réciproque de cette proposition n'est pas exacte. L'effet calorifique total d'une modification finie peut être égal à o, sans que l'effet calorifique de chacune des modifications élémentaires qui composent cette modification finie soit égal à o, et, partant, sans que la modification finie soit adiabatique.

Selon que l'effet calorifique total d'une modification sera *positif, nul* ou *négatif*, la modification sera dite *exothermique, athermique* ou *endothermique*.

Ce que nous venons de dire s'applique aussi bien aux modifications virtuelles qu'aux modifications réelles; pour une modification réelle infiniment petite, nous avons

$$d\tau = - d\mathfrak{T},$$

$\mathfrak{T}$ étant la force vive du système. L'effet calorifique total d'une modification finie et *réelle* est donc défini par l'égalité

$$(2\,bis) \qquad \mathfrak{Q} = Q + \frac{1}{E}(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_0),$$

$\mathfrak{T}_0$ étant la valeur de la force vive du système au début de la modification et $\mathfrak{T}_1$ la valeur de la même force vive à la fin de la modification.

Considérons un cycle.

L'effet calorifique de chacune des modifications élémentaires qui constituent ce cycle est défini par l'égalité

$$d\mathfrak{Q} = dQ - \frac{1}{E}\,d\tau,$$

qui peut encore s'écrire [Ire Partie, Chap. III, *Égalité* (16)]

$$E\,d\mathfrak{Q} = d\mathfrak{T} - E\,dU.$$

En intégrant cette égalité pour le cycle tout entier, et en remarquant que l'énergie interne U du système reprend, à la fin du cycle, la même valeur qu'au commencement, nous trouvons

$$E\mathfrak{Q} = \mathfrak{T}. \tag{3}$$

L'effet calorifique total d'un cycle fermé, réel ou virtuel, est équivalent au travail total effectué, durant le parcours du cycle, par toutes les actions extérieures qui agissent sur le système.

Ce théorème nous sera utile au Chapitre suivant.

5. *Modifications isothermiques. Cycle de Carnot.* — On peut fort bien imaginer qu'un système, en chacun des états qu'il traverse au cours d'une modification, ait, en tous ses points, la même température ϑ, lue sur un thermomètre quelconque; cette température peut d'ailleurs varier de l'un des états traversés dans cette modification à l'état suivant.

Lorsque la température est la même non seulement en tous les points du système pris dans chacun des états dont la suite constitue une modification réelle ou virtuelle, mais encore dans tous les états de cette suite, la modification est dite *isothermique*.

Imaginons un cycle soumis aux conditions suivantes :

1° Ce cycle est composé exclusivement de modifications adiabatiques et de modifications isothermiques;

2° Les modifications isothermiques qui figurent dans ce cycle sont toutes relatives à deux températures différentes, ϑ et ϑ', ϑ' étant supérieur à ϑ.

Un tel cycle se nomme *cycle de Carnot décrit entre les températures ϑ et ϑ'*.

D'après cette définition, un cycle de Carnot peut être réel ou virtuel.

Si un même système décrit successivement plusieurs cycles de Carnot, identiques ou non, mais entre les mêmes températures ϑ et ϑ', il est évident, d'après la définition précédente, que l'ensemble de ces cycles peut être regardé comme un cycle de Carnot unique, décrit entre les températures ϑ et ϑ'.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ces cycles de Carnot successifs. Soit Γ le cycle de Carnot formé par leur ensemble.

Soient $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ dans chacun des cycles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; soit χ l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ dans le cycle Γ.

Soient, de même, $\mathfrak{Q}'_1, \mathfrak{Q}'_2, \ldots, \mathfrak{Q}'_n$ l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ' dans chacun des cycles $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$; soit χ' l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ' dans le cycle Γ.

Nous aurons évidemment

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \chi = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \ldots + \mathfrak{Q}_n, \\ \chi' = \mathfrak{Q}'_1 + \mathfrak{Q}'_2 + \ldots + \mathfrak{Q}'_n. \end{array} \right.$$

6. *Modifications simultanées indépendantes. Généralisation du cycle de Carnot.* — Soit un système complexe σ, formé par un certain système S et par des corps Σ étrangers à ce système. Ce système σ est isolé dans l'espace. Pendant le temps compris entre les instants t_0, t_1, le système S éprouve une certaine modification M.

Soit, de même, un système complexe σ', formé par un certain système S' et par des corps Σ' étrangers à ce système. Ce système σ' est isolé dans l'espace. Pendant le temps compris entre les instants t'_0, t'_1, le système S' éprouve une modification M'.

Supposons que l'on ait

$$t_1 - t_0 = t'_1 - t'_0.$$

Imaginons maintenant qu'à un instant quelconque τ_0, on place, dans l'espace, le système σ dans l'état et avec les vitesses qu'il présentait à l'instant t_0, le système σ' dans l'état et avec les vitesses qu'il pré-

sentait à l'instant t_0, ces deux systèmes σ, σ' étant infiniment éloignés l'un de l'autre.

Nous admettrons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE. — *Chacun des deux systèmes σ, σ' se modifiera comme s'il était isolé dans l'espace.*

Si l'on combine cette hypothèse avec l'hypothèse énoncée au n° 3, on voit sans peine que, *dans un intervalle de temps*

$$\tau_1 - \tau_0 = t_1 - t_0 = t'_1 - t'_0,$$

le système S *éprouvera précisément la modification* M *et le système* S' *la modification* M'.

Nous dirons alors que *les modifications* M *et* M' *sont effectuées d'une manière simultanée et indépendante.*

On voit sans peine, en vertu des principes posés dans la première Partie de ce travail, que la quantité de chaleur dégagée par le système complexe (S, S') pendant l'intervalle de temps (τ_0, τ_1) est la somme de la quantité de chaleur dégagée par le système S subissant, en l'absence du sytème σ', la modification M, et de la quantité de chaleur dégagée par le système S' subissant, en l'absence du système σ, la modification M'. Des propositions analogues peuvent s'énoncer du travail effectué par les actions que le système (S, S') subit de la part des corps étrangers (Σ, Σ'); du travail des forces d'inertie appliquées au système (S, S'); enfin de l'effet calorifique total de l'ensemble des deux modifications M, M'.

Si deux cycles fermés C, C_1 sont décrits simultanément et d'une manière indépendante par deux systèmes S et S_1, le système (S, S_1) décrit évidemment un cycle fermé.

Supposons que les deux cycles C et C_1 soient deux cycles de Carnot décrits entre les mêmes températures ϑ et ϑ'. Si l'isotherme décrite par le système S à la température ϑ et l'isotherme décrite par le système S_1 à la même température ϑ sont simultanées; si, de même, les isothermes que les systèmes S et S_1 décrivent à la température ϑ' sont simultanées, le système (S, S_1), lui aussi, décrira un cycle de Carnot

entre les températures ϑ et ϑ'. En dehors de ce cas, le cycle fermé décrit par le système (S, S_1) ne sera pas, en général, un cycle de Carnot.

Néanmoins, *par une extension du mot cycle de Carnot, nous conviendrons de dire qu'un système complexe* (S, S_1) *décrit un cycle de Carnot* Γ *entre les températures* ϑ *et* ϑ', *si les deux systèmes infiniment éloignés* S, S_1, *dont il se compose, décrivent, entre les mêmes températures* ϑ, ϑ', *deux cycles de Carnot simultanés et indépendants* C, C_1.

Soient $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_1$ les valeurs de l'effet calorifique total des modifications décrites à la température ϑ dans chacun des deux cycles C, C_1. Soient, de même, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}'_1$, les valeurs de l'effet calorifique total des modifications décrites à la température ϑ' dans chacun des deux cycles C, C_1.

Par définition, nous dirons que la quantité

$$\chi = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}_1 \tag{5}$$

est l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ dans le cycle Γ; et que la quantité

$$\chi' = \mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}'_1 \tag{5 bis}$$

est l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ' dans le cycle Γ.

Naturellement, le nom de cycle de Carnot décrit entre les températures ϑ, ϑ' s'étendrait également à l'ensemble de n cycles de Carnot simultanés, indépendants, décrits entre les températures ϑ et ϑ'.

7. *Des modifications qui sont une suite d'états d'équilibre.* — Lorsqu'un système est en équilibre dans un certain état, il persiste indéfiniment dans cet état, il ne se transforme pas, il semble donc qu'on ne peut, sans contradiction, parler de *modification réelle formée par une suite d'états d'équilibre;* en réalité, on peut donner à ces mots un sens logique.

Un état du système est défini, rappelons-le, par la connaissance des

quantités

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l,$$
$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt}.$$

Considérons un système qui subit une transformation réelle. A un instant t de cette transformation, ce système est dans un état bien déterminé; les paramètres analogues à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$, qui définissent les propriétés des corps étrangers qui agissent sur le système, ont également des valeurs bien déterminées. Imaginons qu'à partir de l'instant t, on maintienne invariables ces dernières valeurs, en sorte que *les propriétés des corps étrangers au système demeurent indéfiniment ce qu'elles sont à l'instant t*. Si, par suite de cette opération, le système persiste, lui aussi, dans l'état qu'il présentait à l'instant t, nous dirons qu'à cet instant t, il était en équilibre sous l'action des corps étrangers en présence desquels il se trouvait.

Or il serait évidemment impossible que les valeurs prises par les quantités

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l,$$
$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

à l'instant t conviennent encore à ces quantités pour tout instant postérieur à t, si l'on n'avait

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0.$$

Ainsi, pour qu'un certain état d'un système qui subit une transformation réelle puisse être dit état d'équilibre de ce système, il est nécessaire, mais non suffisant, que toutes les vitesses des divers points du système soient nulles dans cet état.

De cette proposition se conclut cette autre :

Considérons un système qui subit une modification réelle; peut-il se faire que l'état présenté par ce système à chaque instant puisse être regardé comme susceptible de devenir un état d'équilibre du système sous l'action des corps étrangers en présence desquels il se trouve, si

ces derniers conservaient indéfiniment les propriétés qu'ils possèdent au même instant? Pour cela, il est nécessaire, mais non suffisant, que l'on ait, pendant toute la durée de cette modification,

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

ou, en d'autres termes,

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad \lambda = \text{const.}$$

Cette proposition peut s'énoncer abréviativement de la manière suivante :

Pour qu'une modification réelle soit une succession d'états d'équilibre, il est nécessaire, mais non suffisant, que tous les points du système gardent une position invariable dans l'espace pendant toute la durée de cette modification.

Or est-il absurde d'admettre l'existence d'une modification durant laquelle tous les points du système gardent une position invariable? Évidemment non; on est parfois amené, en Physique, à imaginer de semblables modifications. Prenons, par exemple, un récipient renfermant un mélange d'hydrogène et de chlore; la combinaison se produit; une modification, un changement d'état a lieu; cependant, on peut fort bien admettre que la matière qui remplissait chacun des éléments de volume du récipient au début de la combinaison est demeurée dans le même élément de volume pendant toute la durée de la modification.

Les réserves que nous venons de faire ne portent que sur les modifications *réelles;* au cours d'une modification *virtuelle,* les valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ne peuvent être regardées comme des fonctions du temps, en sorte que le raisonnement précédent ne s'applique plus. Il est bien vrai que si une modification virtuelle est une suite d'états d'équilibre, on doit avoir, pendant toute la modification,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad \ldots, \qquad w = 0;$$

mais, comme on n'a pas

$$u = \frac{d\alpha}{dt}, \qquad v = \frac{d\beta}{dt}, \qquad \ldots, \qquad w = \frac{d\lambda}{dt},$$

ces égalités n'empêchent nullement les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, de changer de valeur au cours d'une telle modification.

D'ailleurs, il est évident qu'une succession quelconque, mais continue, d'états d'équilibre d'un système peut toujours être envisagée comme formant une modification virtuelle de ce système.

8. *Des modifications réversibles.* — Nous arrivons maintenant à l'une des notions les plus importantes et en même temps les plus délicates à définir de toute la Thermodynamique : la notion de *transformation réversible*.

Considérons, pour un même système, deux transformations réelles ou virtuelles S et S'_1, douées des propriétés suivantes :

1° Chacun des états E de la transformation S correspond à un et un seul état E_1 de la transformation S_1 ;

2° Durant les transformations S et S_1, le système parcourt dans le même ordre les états qui se correspondent; en particulier, l'état initial de la transformation S correspond à l'état initial de la transformation S_1 ; l'état final de la transformation S correspond à l'état final de la transformation S_1 ;

3° A deux états E, E', infiniment voisins en la modification S, correspondent deux états E_1, E'_1, infiniment voisins en la modification S_1 ;

4° Deux états correspondants E et E_1 présentent les propriétés suivantes :

a. Les paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$, qui déterminent les propriétés du système dans l'état E, sont infiniment voisins des paramètres $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, a_1, b_1, \ldots, l_1$, qui déterminent les propriétés du système dans l'état E_1.

b. Les quantités $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$ (ou $u, v, \ldots, w$), qui déterminent les vitesses réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E, diffèrent infiniment peu des quantités $\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\beta_1}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda_1}{dt}$ (ou $u_1, v_1, \ldots, w_1$), qui

déterminent les vitesses réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E_1.

c. Les quantités $\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \frac{d^2\beta}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2\lambda}{dt^2}$ (ou $u', v', \ldots, w'$), qui déterminent les accélérations (réelles ou virtuelles) du système dans l'état E, diffèrent infiniment peu des quantités $\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\beta_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2\lambda_1}{dt^2}$ (ou u_1, $v_1, \ldots, w_1$), qui déterminent les accélérations réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E_1.

d. Les paramètres analogues à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$, qui déterminent les propriétés des corps extérieurs agissant sur le système, pendant qu'il se trouve dans l'état E, diffèrent infiniment peu des paramètres analogues à $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, a_1, b_1, \ldots, l_1$, qui déterminent les propriétés des corps extérieurs agissant sur le système pendant qu'il se trouve dans l'état E_1.

De ces conditions relatives aux deux états E et E_1, il résulte que la force vive, les actions extérieures, les forces d'inertie, les coefficients calorifiques ont des valeurs infiniment peu différentes pour le système pris dans l'état E ou dans l'état E_1.

Les deux transformations S et S_1, dont nous venons de fixer les propriétés, constituent deux *transformations infiniment voisines*. Nous donnerons le nom de *transformation variable d'une manière continue* à une suite de transformations dont chacune est infiniment voisine de celle qui la précède et de celle qui la suit.

Soit Σ une transformation réelle ou virtuelle d'un système, cette transformation jouissant des propriétés suivantes :

1° Dans chacun des états qui la constituent, le système est en équilibre sous l'action des corps extérieurs en présence desquels il se trouve;

2° Si la modification est virtuelle, les quantités $u, v, \ldots, w$ et u', $v', \ldots, w'$, sont supposées nulles dans tout son parcours;

3° Soient (A) l'état initial et (B) l'état final de la transformation Σ; de (A) à (B), on peut passer par une transformation variable d'une manière continue, *réalisable* sous chacune de ses formes, et ayant pour forme limite la transformation *réelle ou virtuelle* Σ;

4° De (B) en (A), on peut passer par une transformation S' variable d'une manière continue, *réalisable* sous chacune de ses formes,

et ayant pour forme limite la transformation *réelle ou virtuelle* que l'on obtient en parcourant la suite d'états d'équilibre Σ, en ordre inverse, de (B) en (A).

Une semblable transformation Σ se nomme une *transformation réversible*.

Une transformation réversible est-elle réalisable? Une transformation réversible étant une succession d'états d'équilibre, nous savons qu'il sera impossible de la réaliser, sauf peut-être dans un cas particulier que nous avons précisé au numéro précédent. Ainsi, en général, *une transformation réversible est une transformation purement virtuelle*.

On pourrait même se demander s'il est possible de constituer des modifications virtuelles qui soient réversibles; à cette question, nous répondrons en admettant l'hypothèse suivante :

Hypothèse fondamentale. — *Il existe des systèmes pour lesquels toute modification, réelle ou virtuelle, qui est une suite continue d'états d'équilibre, est une modification réversible.*

Nous n'étudierons que les systèmes qui jouissent de cette propriété.

Il faut bien se garder de croire que ces systèmes-là existent seuls dans la nature; il est aisé de prouver le contraire; les cycles d'*hysteresis magnétique*, par exemple, sont des modifications non réversibles, bien que ce soient des suites continues d'états d'équilibre.

Établissons quelques propriétés des modifications réversibles qui nous seront utiles par la suite.

Si une modification réversible est réelle, comme elle est une succession d'états d'équilibre, on a, pendant toute la durée de cette modification,

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0;$$

on a donc aussi

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = 0.$$

Si une modification réversible est virtuelle, par définition, on a, à chaque instant,

$$u = 0, \qquad \mathfrak{v} = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{w} = 0,$$
$$u' = 0, \qquad \mathfrak{v}' = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{w}' = 0.$$

Ainsi, *dans une modification réversible, réelle ou virtuelle, la force vive et les forces d'inertie sont constamment nulles.*

Soient A, B, ..., L, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{L}$ les actions extérieures auxquelles le système est soumis pendant qu'il se trouve dans un des états qui constituent la modification réversible Σ. Si le système parcourt cette modification de l'état (A) à l'état (B), les actions extérieures effectueront un travail

$$\Theta = \int_{(A)}^{(B)} (A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l).$$

Si le système parcourt la même modification de (B) en (A), les actions extérieures effectueront un travail

$$\Theta' = \int_{(B)}^{(A)} (A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l).$$

Les deux intégrales sont prises le long du même trajet Σ, en sorte que l'on a évidemment

$$\Theta + \Theta' = 0.$$

Or, d'après la définition d'une transformation variable d'une manière continue, le travail $\mathfrak{T}$, effectué par les actions extérieures pendant que le système parcourt la modification réelle S, conduite de l'état (A) à l'état (B), a Θ pour limite lorsque la modification S tend vers la modification réversible Σ; le travail $\mathfrak{T}'$, effectué par les actions extérieures pendant que le système parcourt la modification réelle S', conduite de l'état (B) à l'état (A), a Θ' pour limite lorsque la modification S' tend vers la modification réversible Σ renversée.

Nous obtenons donc la proposition suivante :

S *et* S' *étant deux modifications réelles variables d'une manière*

continue, inverses l'une de l'autre, qui ont pour limite commune une certaine modification réversible Σ, *les travaux* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$, *effectués par les actions extérieures pendant que le système subit ces modifications, tendent vers des limites égales et de signe contraire lorsque les modifications* S *et* S′ *tendent vers la modification* Σ.

Il suffit, dans le raisonnement précédent, de remplacer les actions extérieures

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L, \quad \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \ldots, \quad \mathcal{L}$$

par les coefficients calorifiques

$$R_\alpha, \quad R_\beta, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad \mathfrak{R}_a, \quad \mathfrak{R}_b, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_l;$$

les mots : *travail des actions extérieures*, par les mots : *quantité de chaleur dégagée par le système*, pour obtenir la proposition suivante :

Les quantités de chaleur Q *et* Q′, *dégagées par le système pendant qu'il subit les modifications* S *et* S′, *tendent vers des limites égales et de signe contraire lorsque les modifications* S *et* S′ *tendent vers la modification réversible* Σ.

Nous terminerons ces généralités sur les modifications réversibles par l'énoncé de deux hypothèses qui nous seront, par la suite, d'un grand usage.

Première hypothèse. — *Si une transformation réversible* Σ *est isothermique, elle peut être regardée comme la limite commune de deux transformations* S *et* S′, *inverses l'une de l'autre, variables d'une manière continue, constamment réelles et constamment isothermiques.*

Seconde hypothèse. — *Si une modification réversible* Σ *est adiabatique, elle peut être regardée comme la limite commune de deux transformations* S *et* S′, *inverses l'une de l'autre, variables d'une manière continue, constamment réelles et constamment adiabatiques.*

CHAPITRE II.

LE THÉORÈME DE CARNOT ET LA TEMPÉRATURE ABSOLUE.

1. *Les hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson.* — Soient A, B, ..., L, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{L}$ les forces et les influences extérieures qui agissent sur un système pris dans l'un des états dont la suite constitue un cycle de Carnot. Pendant une des modifications élémentaires

$$d\alpha,\quad d\beta,\quad \ldots,\quad d\lambda,\quad da,\quad db,\quad \ldots,\quad dl$$

en lesquelles le cycle peut se décomposer, ces actions effectuent un travail

$$d\mathfrak{T} = \mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta + \ldots + \mathrm{L}\,d\lambda + \mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \ldots + \mathcal{L}\,dl;$$

pendant le parcours du cycle entier, elles effectuent un travail

$$\mathfrak{T} = \int (\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta + \ldots + \mathrm{L}\,d\lambda + \mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \ldots + \mathcal{L}\,dl),$$

l'intégrale s'étendant au cycle entier.

Ce travail $\mathfrak{T}$ peut être positif, nul ou négatif.

Les cycles de Carnot pour lesquels $\mathfrak{T}$ est nul et les cycles de Carnot pour lesquels $\mathfrak{T}$ est négatif sont l'objet de deux hypothèses dont l'une est due à Clausius et l'autre à Sir W. Thomson.

Hypothèse de Clausius. — *Si un système décrit un cycle de Carnot* réel *entre les températures ϑ et ϑ' (ϑ' étant supérieur à ϑ); si les actions extérieures auxquelles ce système est soumis effectuent, dans le parcours du cycle, un travail total égal à* 0, *il n'est pas possible que la modification isothermique produite à la température ϑ soit endothermique, ni que la modification isothermique produite à la température ϑ' soit exothermique.*

Hypothèse de Sir W. Thomson. — *Si un système décrit un cycle*

de Carnot RÉEL *entre les températures* ϑ *et* ϑ' *(*ϑ' *étant supérieur à* ϑ*); si les actions extérieures auxquelles le système est soumis effectuent, dans le parcours du cycle, un travail total négatif, il est impossible que la modification isothermique produite à la température* ϑ *soit endothermique.*

Ce n'est pas ici le lieu d'indiquer de quelle manière Clausius et Sir W. Thomson ont été amenés à énoncer ces hypothèses, ni de rappeler les discussions soutenues par Clausius contre les physiciens qui en niaient l'exactitude. Dans les Traités classiques de Thermodynamique, on donne ordinairement ces deux hypothèses comme équivalentes et comme également capables de servir de base à la démonstration de Carnot; pour nous, nous les regarderons comme distinctes et les emploierons toutes deux dans notre exposé.

2. *Addition aux hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson.* — A ces deux hypothèses, nous allons faire une addition essentielle, que nous énoncerons de la manière suivante :

HYPOTHÈSE ADDITIONNELLE. — *Si un cycle de Carnot, décrit entre les températures* ϑ *et* ϑ' *(*ϑ' *étant supérieur à* ϑ*),* EST RÉEL ET N'EST PAS RÉVERSIBLE; *si, dans le parcours de ce cycle, les actions extérieures effectuent un travail nul ou négatif, la modification isothermique produite à la température* ϑ *ne peut pas être athermique.*

Combinée avec les hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson, cette hypothèse additionnelle fournit la proposition suivante :

Parmi tous les cycles de Carnot, décrits entre les températures ϑ *et* ϑ' *(*ϑ' *étant supérieur à* ϑ*), qui sont* RÉELS ET NON RÉVERSIBLES, *considérons ceux durant le parcours desquels les actions extérieures effectuent un travail nul ou négatif; pour tous ces cycles, la modification isothermique produite à la température* ϑ *est exothermique.*

Les hypothèses que nous venons d'énoncer ne sont pas susceptibles d'une vérification expérimentale *directe*. Combinées avec d'autres

hypothèses, plus ou moins nombreuses, elles forment le point de départ des théories dont les conséquences éloignées peuvent seules être soumises au contrôle de l'expérience. Une remarque analogue s'appliquerait d'ailleurs à presque toutes les hypothèses que l'on rencontre en Physique.

3. *Diverses espèces de cycles de Carnot.* — Prenons tous les cycles de Carnot virtuels que l'on peut concevoir; parmi ces cycles, cherchons à distinguer tous ceux dont les propriétés sont compatibles d'une part avec le principe de la conservation de l'Énergie, d'autre part avec les trois hypothèses que nous venons d'indiquer.

Parmi tous les cycles de Carnot ainsi distingués se trouveront assurément tous ceux qui sont réalisables et non réversibles. Les propriétés qui appartiennent à tous les cycles ainsi distingués appartiendront en particulier à tous les cycles réalisables et non réversibles.

Jusqu'à nouvel ordre, nous excluons de nos recherches les cycles de Carnot réels, non réversibles, décrits entre les températures ϑ *et* ϑ', *correspondant à un travail positif des actions extérieures, et pour lesquels l'effet thermique produit à la température* ϑ *est égal à* 0.

Soient toujours ϑ et ϑ' les deux températures entre lesquelles est décrit un cycle de Carnot, ϑ' étant supérieur à ϑ. Soient $\mathfrak{Q}$ l'effet calorifique total de la modification isothermique produite à la température ϑ et $\mathfrak{Q}'$ l'effet calorifique total de la modification isothermique produite à la température ϑ'. Les modifications, autres que ces deux-là, dont se compose le cycle sont adiabatiques, en sorte que l'effet calorifique total du cycle se réduit à $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}')$.

Les actions extérieures auxquelles le système est soumis effectuent, pendant le parcours du cycle, un travail total $\mathfrak{T}$.

Le principe de la conservation de l'Énergie nous donne [Chap. I, égalité (3)]

$$\mathfrak{T} = E(\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'). \tag{1}$$

De là, les propriétés suivantes :

1° *Si le travail $\mathfrak{T}$ est nul, les deux quantités $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ sont de signe contraire et de même valeur absolue ;*

2° *Si le travail $\mathfrak{T}$ est positif, il y a au moins l'une des deux quantités $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ qui est positive, et, s'il n'y en a qu'une, elle est la plus grande en valeur absolue ;*

3° *Si le travail $\mathfrak{T}$ est négatif, il y a au moins l'une des deux quantités $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ qui est négative, et, s'il n'y en a qu'une, elle est la plus grande en valeur absolue.*

Ces propositions résultent de l'application aux cycles de Carnot considérés du principe de la conservation de l'Énergie.

Appliquons-leur maintenant les deux hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson, énoncées au n° **1**, et l'hypothèse additionnelle, énoncée au n° **2**. Nous serons conduit à la conclusion suivante :

Si le travail externe est nul ou négatif, la quantité $\mathfrak{Q}$ est assurément positive ; si le travail externe est positif, la quantité $\mathfrak{Q}$ est positive ou négative, mais n'est assurément pas nulle.

De ces propositions il est aisé de conclure que tout cycle de Carnot réalisable qui n'est pas uniquement une succession d'états d'équilibre rentre dans l'une des catégories de la classification suivante :

1° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est nul ; $\mathfrak{Q}$ est positif ; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et égal à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue ;

2° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est négatif ; $\mathfrak{Q}$ est positif ; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et supérieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue ;

3° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est positif, trois cas peuvent alors se distinguer :

a. $\mathfrak{Q}$ est positif ; $\mathfrak{Q}'$ est positif ou nul ;

b. $\mathfrak{Q}$ est positif ; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et inférieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue ;

c. $\mathfrak{Q}$ est négatif ; $\mathfrak{Q}'$ est positif et supérieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue.

Cette classification est résumée dans le Tableau suivant :

Cycles de premier genre : $\mathfrak{T} = 0$		$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
Cycles de deuxième genre : $\mathfrak{T} < 0$		$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
Cycles de troisième genre : $\mathfrak{T} > 0$	Espèce *a*	$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' \geqq 0$
	Espèce *b*	$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
	Espèce *c*	$\mathfrak{Q} < 0$	$\mathfrak{Q}' > 0$

Proposons-nous maintenant de comparer les valeurs que prend, pour ces différents cycles, le rapport

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}.$$

$(\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}')$ étant nul pour les cycles de premier genre, négatif pour les cycles de deuxième genre, positif pour les cycles de troisième genre, ainsi que le montre l'équation (2), on voit que le rapport ρ a, pour les diverses catégories de cycles, le signe suivant :

Cycles de premier genre	....	$\rho = 0$
Cycles de deuxième genre	....	$\rho < 0$
Cycles de troisième genre	Espèce *a*.........	$\rho > 0$
	Espèce *b*.........	$\rho > 0$
	Espèce *c*.........	$\rho < 0$

4. *Théorème de Carnot.* — L'inspection du Tableau précédent nous montre d'abord que le rapport ρ est plus petit pour un cycle quelconque de troisième genre et d'espèce *c* que pour un cycle quelconque de premier genre, et aussi que pour un cycle quelconque de troisième genre et d'espèce *a* ou d'espèce *b*.

Nous allons démontrer maintenant que, *si l'on considère deux cycles de Carnot, décrits entre les mêmes températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, l'un de troisième genre et d'espèce c, l'autre de deuxième genre, le rapport ρ n'est assurément pas plus grand pour le premier que pour le second,* ces cycles étant supposés, bien entendu, soumis au principe de la conservation de l'Énergie et aux trois hypothèses précédemment énoncées.

Une démonstration rigoureuse de ce théorème exige que nous distinguions différents cas.

Soient C_1 le premier cycle et C_2 le second cycle. Soient T_1, T_2 les durées de ces deux cycles; nous commencerons par distinguer deux cas selon que les périodes T_1, T_2 sont ou ne sont pas commensurables.

1° *Le rapport* $\frac{T_2}{T_1}$ *est commensurable.*

Nous poserons

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{2}$$

μ_1, μ_2 étant deux nombres entiers que nous pouvons supposer premiers entre eux.

Soient $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}'_1$, ρ_1 les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, ρ, qui correspondent au cycle C_1; soient $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}'_2$, ρ_2 les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, ρ, qui correspondent au cycle C_2. Nous savons que l'on a

$$\mathfrak{T}_1 > 0, \quad \mathfrak{Q}_1 < 0, \quad \mathfrak{Q}'_1 > 0,$$
$$\mathfrak{T}_2 < 0, \quad \mathfrak{Q}_2 > 0, \quad \mathfrak{Q}'_2 < 0.$$

Nous distinguerons deux cas secondaires, selon que les quantités $\mathfrak{T}_1$ et $|\mathfrak{T}_2|$ sont ou ne sont pas commensurables.

A. *Le rapport* $\dfrac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1}$ *est commensurable.*

Nous poserons

$$\frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{3}$$

m_1, m_2 étant deux nombres entiers que nous pouvons supposer premiers entre eux.

Posons

$$\begin{cases} N_1 = m_2 \mu_1, \\ N_2 = m_2 \mu_2. \end{cases} \tag{4}$$

Considérons N_1 cycles identiques au cycle C_1, décrits simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un cycle de Carnot unique γ_1, dont la durée sera T_1, qui sera décrit entre les températures ϑ et ϑ', et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront les valeurs [Chap. I, égalités (5) et (5 *bis*)]

$$N_1 \mathfrak{T}_1, \quad N_1 \mathfrak{Q}_1, \quad N_1 \mathfrak{Q}'_1.$$

Le cycle γ_1 peut être reproduit μ_2 fois de suite (Chap. I, n° **3**).

Ces μ_2 cycles γ_1 successifs pourront être considérés comme un cycle de Carnot unique Γ_1, décrit entre les températures ϑ, ϑ', de durée

$$\Theta_1 = \mu_2 T_1, \tag{5}$$

et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\mu_2 N_1 \mathfrak{T}_1, \quad \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}_1, \quad \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}'_1.$$

Considérons, d'autre part, N_2 cycles identiques au cycle C_2, décrits simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un cycle de Carnot unique γ_2, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, de durée T_2, et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront les valeurs

$$N_2 \mathfrak{T}_2, \quad N_2 \mathfrak{Q}_2, \quad N_2 \mathfrak{Q}'_2.$$

Le cycle γ_2 peut être reproduit μ_1 fois de suite. Ces μ_1 cycles γ_2 successifs pourront être considérés comme un cycle de Carnot unique Γ_2, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, de durée

$$\Theta_2 = \mu_1 T_2, \tag{5 bis}$$

et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\mu_1 N_2 \mathfrak{T}_2, \quad \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}_2, \quad \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}'_2.$$

Les égalités (2), (5) et (5 *bis*) nous apprennent que la durée Θ_1 du cycle Γ_1 est égale à la durée Θ_2 du cycle Γ_2 ; on peut donc supposer que l'on décrive ces deux cycles simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un nouveau cycle de Carnot *réel* Γ, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= \mu_2 N_1 \mathfrak{T}_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{T}_2,\\
\mathfrak{Q} &= \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}_2,\\
\mathfrak{Q}' &= \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}'_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}'_2.
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (4), ces égalités peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{T}_1 + m_1 \mathfrak{T}_2),\\
\mathfrak{Q} &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{Q}_1 + m_1 \mathfrak{Q}_2),\\
\mathfrak{Q}' &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{Q}'_1 + m_1 \mathfrak{Q}'_2).
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

En vertu de l'égalité (3), la première des égalités (6) devient

$$\mathfrak{T} = 0.$$

Le cycle Γ est donc un cycle *réel, non réversible*, de premier genre. D'après l'hypothèse de Clausius, indiquée au n° **1**, et l'hypothèse complémentaire, énoncée au n° **2**, la quantité $\mathfrak{Q}$ doit être positive; en vertu de la deuxième égalité (6), cette dernière condition devient

$$m_2 \mathfrak{Q}_1 + m_1 \mathfrak{Q}_2 > 0$$

ou bien

$$\frac{m_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{m_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

Mais on a, d'après l'égalité (3),

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mathfrak{T}_2}{|\mathfrak{T}_2|}.$$

On a donc

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou bien

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{Q}_1} < \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

D'autre part, l'égalité (1) donne

$$\mathfrak{T}_1 = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1),$$
$$\mathfrak{T}_2 = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2).$$

L'inégalité précédente devient donc

$$\frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{Q}_1} < \frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2},$$

ou

$$\rho_1 < \rho_2. \tag{7}$$

B. *Le rapport* $\frac{|\mathfrak{E}_2|}{\mathfrak{E}_1}$ *est incommensurable.*

Soient m_1, m_2 deux nombres entiers, premiers entre eux, tels que l'on ait

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\mathfrak{E}_2|}{\mathfrak{E}_1} - \varepsilon, \tag{8}$$

ε étant une quantité positive que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut.

Construisons le cycle Γ comme dans le cas précédent.

Nous aurons encore, pour ce cycle,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{E}_1 + m_1\mathfrak{E}_2), \\ \mathfrak{Q} &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}_1 + m_1\mathfrak{Q}_2), \\ \mathfrak{Q}' &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}'_1 + m_1\mathfrak{Q}'_2). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

La première égalité (6), jointe à l'égalité (8), donne

$$\mathfrak{E} = -\varepsilon m_1\mu_1\mu_2\mathfrak{E}_1.$$

$\mathfrak{E}$ étant négatif, le cycle Γ est un cycle de Carnot *réel, non réversible*, de deuxième genre. L'hypothèse de Sir W. Thomson, énoncée au n° **1**, et l'hypothèse additionnelle, énoncée au n° **2**, nous apprennent que la quantité $\mathfrak{Q}$ est forcément positive, condition qui s'écrit, en vertu de la deuxième égalité (6),

$$m_2\mathfrak{Q}_1 + m_1\mathfrak{Q}_2 > 0$$

ou bien

$$\frac{m_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{m_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

Mais l'égalité (8) donne

$$m_2\mathfrak{E}_1 = m_1|\mathfrak{E}_2| - \varepsilon m_1\mathfrak{E}_1;$$

on a donc

$$\frac{\mathfrak{E}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{|\mathfrak{E}_2|}{\mathfrak{Q}_2} - \varepsilon\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{Q}_2}.$$

ε est une quantité positive qui peut être prise aussi petite que l'on

veut. L'inégalité précédente exige donc que l'on ait

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} \geqq \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou bien

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{Q}_1} \leqq \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

L'égalité (1) donnant d'ailleurs

$$\mathfrak{T}_1 = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1),$$
$$\mathfrak{T}_2 = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2),$$

on voit que l'on a

$$\frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{Q}_1} \leqq \frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou

(9) $$\rho_1 \leqq \rho_2.$$

2° *Le rapport* $\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}$ *est incommensurable.*

Imaginons que le cycle C_2 soit l'une des formes d'un cycle de Carnot $\mathfrak{C}_2$, variable d'une manière continue, toujours réel et constamment décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$; évidemment, on a toujours le droit de faire cette supposition.

Lorsque le cycle $\mathfrak{C}_2$ varie d'une manière continue, sa durée T_2 demeure constante ou varie d'une manière continue; évidemment, on a toujours le droit de choisir les variations du cycle $\mathfrak{C}_2$ de telle manière que sa durée T_2 ne demeure pas constante.

Lorsque le cycle $\mathfrak{C}_2$ varie d'une manière continue, les quantités $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}'_2$ varient d'une manière continue; comme pour le cycle particulier C_2 aucune de ces trois quantités n'est égale à zéro, nous pouvons toujours limiter les variations du cycle $\mathfrak{C}_2$, de part et d'autre de la forme C_2, de telle sorte que nous ayons constamment

$$\mathfrak{T}_2 < 0, \qquad \mathfrak{Q}_2 < 0, \qquad \mathfrak{Q}'_2 < 0.$$

Le cycle $\mathfrak{C}_2$ sera alors constamment un cycle de second genre.

De plus, tant que le cycle $\mathfrak{C}_2$ variera d'une manière continue, le rapport ρ_2 variera d'une manière continue.

Or nous savons que, si l'on considère un des cycles $\mathfrak{C}_2$ dont la durée T_2 est commensurable avec la durée T_1 du cycle C_1, on aura

$$\rho_2 \geqq \rho_1.$$

Ce que nous venons de dire démontre que l'on aura, pour toutes les formes du cycle $\mathfrak{C}_2$, et en particulier pour la forme C_2,

$$\rho_2 \geqq \rho_1. \tag{10}$$

Si donc on considère deux cycles de Carnot, réels et non réversibles, tous deux décrits entre les mêmes températures, l'un de premier genre et d'espèce c, l'autre n'appartenant pas au premier genre et à l'espèce c, le rapport ρ *relatif au premier est au plus égal au rapport* ρ *relatif au second.*

Ce théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Considérons tous les cycles de Carnot, réels et non réversibles, décrits entre les mêmes températures $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}'$.

Le rapport ρ *relatif à ceux qui sont de troisième genre et d'espèce c admet une limite supérieure* A, *essentiellement négative.*

Le rapport ρ *relatif à ceux qui ne sont pas de troisième genre et d'espèce c admet une limite inférieure* A', *essentiellement négative.*

On a

$$A \leqq A'.$$

C'est la première forme du théorème de Carnot. L'emploi des modifications réversibles va nous permettre de donner à ce théorème une forme plus précise.

5. *Théorème de Carnot (suite). Emploi des modifications réversibles.* — Nous allons démontrer en premier lieu que

$$A = A'.$$

Deux températures ϑ et ϑ', cette dernière plus élevée que la première, étant données, imaginons que l'on puisse toujours trouver un système admettant quatre modifications réversibles qui jouissent des propriétés suivantes :

La première est une modification réversible isothermique Σ_{12}, correspondant à la température ϑ' et conduisant le système de l'état 1 à l'état 2.

La deuxième est une modification réversible adiabatique Σ_{23}, conduisant le système de l'état 2, où il a la température ϑ', à l'état 3, où il a la température ϑ.

La troisième est une modification réversible isothermique Σ_{34}, correspondant à la température ϑ et conduisant le système de l'état 3 à l'état 4.

La quatrième est une modification réversible adiabatique Σ_{41}, ramenant le système de l'état 4 à l'état 1.

Nous aurons ainsi constitué un cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures ϑ et ϑ'.

Relativement à ce cycle, nous ferons encore l'hypothèse suivante : *Il est possible de le choisir de manière que la modification* Σ_{34} *ne soit pas athermique.*

D'après l'une des deux hypothèses indiquées à la fin du Chap. I, n° **8**, il existe une modification isothermique réelle S_{12}, prenant le système dans l'état 1 avec des vitesses égales à zéro, l'amenant à l'état 2 avec des vitesses égales à zéro, variable d'une manière continue et ayant pour limite la modification Σ_{12}. Il existe de même une modification isothermique réelle S_{21}, prenant le système dans l'état 2 avec des vitesses égales à zéro, l'amenant à l'état 1 avec des vitesses égales à zéro, variable d'une manière continue et ayant pour limite la modification Σ_{21}.

La modification isothermique Σ_{34}, les modifications adiabatiques Σ_{23}, Σ_{41} donnent lieu à des observations analogues.

L'ensemble des modifications

$$S_{12},\quad S_{23},\quad S_{34},\quad S_{41}$$

forme un cycle de Carnot réel, décrit entre les températures ϑ et ϑ',

variable d'une manière continue, et ayant pour limite le cycle

$$\Sigma_{12}, \quad \Sigma_{23}, \quad \Sigma_{34}, \quad \Sigma_{41}.$$

De même, l'ensemble des modifications

$$S_{43}, \quad S_{32}, \quad S_{21}, \quad S_{14}$$

forme un cycle de Carnot réel, décrit entre les températures ϑ et ϑ', variable d'une manière continue, et ayant pour limite le cycle

$$\Sigma_{43}, \quad \Sigma_{32}, \quad \Sigma_{21}, \quad \Sigma_{14}.$$

Soient χ_{12}, χ_{34} les quantités de chaleur dégagées par les modifications réversibles Σ_{12}, Σ_{34}; les modifications Σ_{21}, Σ_{43} dégageront respectivement des quantités de chaleur $\chi_{21} = -\chi_{12}$, $\chi_{43} = -\chi_{34}$, en sorte que, pour chacun des deux cycles

$$(\Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{34}, \Sigma_{41}) \quad \text{et} \quad (\Sigma_{43}, \Sigma_{32}, \Sigma_{21}, \Sigma_{14}),$$

la quantité analogue à ρ a la même valeur

$$r = \frac{\chi_{12} + \chi_{34}}{\chi_{34}}.$$

Soient $\mathfrak{Q}_{12}$, $\mathfrak{Q}_{34}$ les effets thermiques des modifications S_{12}, S_{34}. Pour le cycle $(S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41})$ la quantité analogue à ρ a pour valeur

$$\rho_1 = \frac{\mathfrak{Q}_{12} + \mathfrak{Q}_{34}}{\mathfrak{Q}_{34}}.$$

Soient $\mathfrak{Q}_{21}$, $\mathfrak{Q}_{43}$ les effets thermiques des modifications S_{21}, S_{43}. Pour le cycle $(S_{43}, S_{32}, S_{21}, S_{14})$, la quantité analogue à ρ a pour valeur

$$\rho_2 = \frac{\mathfrak{Q}_{21} + \mathfrak{Q}_{43}}{\mathfrak{Q}_{43}}.$$

Par hypothèse, la modification Σ_{34} n'est pas athermique. Supposons, pour fixer les idées, χ_{34} négatif. Les modifications S_{34} et S_{43}

pourront être prises assez voisines des modifications Σ_{34} et Σ_{43} pour que $\mathfrak{Q}_{34}$ ait le même signe que χ_{34} et que $\mathfrak{Q}_{43}$ ait le même signe que χ_{43}. Nous aurons alors

$$\mathfrak{Q}_{34} < 0, \qquad \mathfrak{Q}_{43} > 0,$$

en sorte que ρ_1 se rapportera certainement à un cycle de troisième genre et d'espèce c et ρ_2 à un cycle qui n'est pas de troisième genre et d'espèce c.

Le théorème démontré au numéro précédent nous donnera

$$\rho_1 \leqq A, \qquad \rho_2 \geqq A'.$$

Mais, d'autre part, lorsque les deux cycles

$$(S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}) \quad \text{et} \quad (S_{43}, S_{32}, S_{21}, S_{14})$$

tendent respectivement vers les cycles

$$(\Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{34}, \Sigma_{41}) \quad \text{et} \quad (\Sigma_{43}, \Sigma_{32}, \Sigma_{21}, \Sigma_{14}),$$

les deux rapports ρ_1, ρ_2 tendent vers la limite commune r. Comme les quantités A et A′ ne varient pas lorsque les températures ϑ et ϑ' sont maintenues invariables, cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$A = A', \tag{10}$$

comme nous l'avions annoncé.

Nous voyons en outre que, *si un cycle de Carnot réversible est décrit entre les températures ϑ et ϑ' (ϑ' étant supérieur à ϑ); si, de plus, l'isothermique décrite à la température ϑ n'est pas athermique, le rapport*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

a, pour ce cycle, la valeur A.

Que devient le rapport ρ pour un cycle de Carnot réversible décrit entre les températures ϑ et ϑ', si l'isothermique relative à la température ϑ est athermique?

Désignons par C_1 ce cycle ; nous avons, par hypothèse,

$$\mathfrak{Q}_1 = 0.$$

Soit C_2 un autre cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures ϑ et ϑ', et pour lequel l'isothermique relative à la température ϑ n'est pas athermique. Pour ce cycle, nous aurons, d'après la proposition précédente,

$$\frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2} = A.$$

Les deux cycles C_1 et C_2 peuvent être considérés comme virtuels. On peut donc toujours supposer qu'ils soient décrits simultanément d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un nouveau cycle de Carnot réversible décrit entre les températures ϑ et ϑ'. L'isothermique décrite à la température ϑ correspondra à un effet thermique $\mathfrak{Q}_2$, en sorte qu'elle ne sera pas athermique. L'isothermique décrite à la température ϑ' correspondra à un effet thermique $(\mathfrak{Q}'_1 + \mathfrak{Q}'_2)$. D'après le théorème précédent, on aura, pour ce cycle,

$$\frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_1 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2} = A.$$

Cette égalité ne sera compatible avec la précédente que si l'on a

$$\mathfrak{Q}'_1 = 0.$$

D'où cette proposition :

Si un cycle de Carnot réversible est décrit entre les températures ϑ et ϑ' (ϑ' étant supérieur à ϑ), et si la modification isothermique décrite à la température ϑ est athermique, la modification isothermique produite à la température ϑ est aussi athermique.

Dans ce cas, le rapport

$$\frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

perd tout sens.

Nous allons démontrer maintenant que, *pour aucun cycle réali-*

sable et non réversible décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, le rapport

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

ne peut atteindre la valeur A.

La valeur A étant essentiellement négative, le rapport ρ ne peut atteindre la valeur A, à moins que le cycle n'appartienne soit au deuxième genre, soit au troisième genre et à l'espèce *c*. Supposons que, pour un cycle C_1 (nous admettrons, pour fixer les idées, qu'il soit de deuxième genre), on ait

$$\rho_1 = \frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{Q}_1} = A$$

ou bien, puisque l'égalité (1) permet de remplacer $(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_1')$ par $E\mathfrak{T}_1$,

$$E\mathfrak{T}_1 = A\mathfrak{Q}_1. \tag{11}$$

Nous avons vu que l'existence de cycles réversibles et réels n'était nullement absurde. Admettons donc que l'on ait constitué un cycle de Carnot C_2, réversible, réel, décrit entre les mêmes températures $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ que le cycle C_1, et pour lequel la quantité $\mathfrak{T}_2$ ne soit pas égale à zéro.

La quantité $\mathfrak{T}_2$ sera, dès lors, positive ou négative; nous pouvons toujours la supposer positive, car, si elle était négative, il suffirait de réaliser le cercle réversible C_2 en sens contraire pour qu'elle devînt positive.

En faisant varier d'une manière continue le cycle de Carnot C_2, sans changer ni sa réversibilité, ni les températures entre lesquelles il est décrit, nous pourrons toujours l'amener à satisfaire aux conditions suivantes :

1° La durée T_1 du cycle C_1 et la durée T_2 du cycle C_2 sont commensurables;

2° Les quantités $|\mathfrak{T}_1|$ et $\mathfrak{T}_2$ sont commensurables.

Posons

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \qquad \frac{\mathfrak{T}_2}{|\mathfrak{T}_1|} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{12}$$

μ_1, μ_2, m_1, m_2 étant quatre nombres entiers.

Au moyen des cycles C_1, C_2, constituons un cycle de Carnot Γ, de la même manière qu'au n° **4**. Pour ce cycle Γ, nous aurons

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T} = \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{T}_1 + m_1\mathfrak{T}_2), \\ \mathfrak{Q} = \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}_1 + m_1\mathfrak{Q}_2), \\ \mathfrak{Q}' = \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}'_1 + m_1\mathfrak{Q}'_2). \end{cases}$$

La seconde égalité (12), jointe à la première égalité (13), montre que l'on a

$$\mathfrak{T} = 0.$$

Le cycle Γ est donc un cycle de premier genre.

La quantité $\mathfrak{Q}_2$ ne peut être égale à zéro. En effet, le cycle C_2 est réversible ; d'après une proposition démontrée tout à l'heure, la quantité $\mathfrak{Q}_2$ ne pourrait être égale à zéro sans que la quantité $\mathfrak{Q}'_2$ le soit également ; l'égalité

$$\mathfrak{T}_2 = E(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2)$$

donnerait alors

$$\mathfrak{T}_2 = 0,$$

contrairement à l'hypothèse faite.

Puisque, dans le cycle réversible C_2, la quantité $\mathfrak{Q}_2$ n'est pas égale à zéro, nous savons que l'on a

$$\frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2} = A$$

ou bien

$$(14)\qquad E\mathfrak{T}_2 = A\mathfrak{Q}_2.$$

Les égalités (11) et (14), jointes à la seconde égalité (13), montrent que, dans le cycle Γ, on a

$$\mathfrak{Q} = \mu_1\mu_2\frac{E}{A}(m_2\mathfrak{T}_1 + m_1\mathfrak{T}_2) = 0.$$

Le cycle Γ serait donc un cycle de Carnot du premier genre, décrit entre les températures ϑ et ϑ', dans lequel l'isothermique décrite à la

température ϑ serait athermique. Mais, d'autre part, le cycle Γ serait un cycle de Carnot réalisable et il ne serait pas exclusivement composé d'états d'équilibre, puisque le cycle C_2 n'est pas exclusivement composé d'états d'équilibre. L'existence du cycle Γ est, dès lors, en contradiction avec l'hypothèse énoncée au n° **2**. Admettant l'exactitude de cette dernière hypothèse, nous pouvons formuler la proposition suivante :

Pour aucun cycle réalisable et non réversible, le rapport

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

ne peut atteindre la valeur A.

Réunissons maintenant en un seul théorème les diverses propositions démontrées au numéro précédent et au présent numéro :

Soient ϑ et ϑ' deux températures, ϑ' étant supérieur à ϑ. Il existe une grandeur négative A, *qui dépend uniquement de ces deux températures ϑ, ϑ', et qui jouit des propriétés suivantes :*

1° *Pour tout cycle de Carnot réversible réalisable ou non, décrit entre les températures ϑ et ϑ', on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} = \mathrm{A}; \tag{15}$$

2° *Pour tout cycle de Carnot, décrit entre les températures ϑ et ϑ', qui est réalisable, non réversible, de troisième genre et d'espèce c, on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} < \mathrm{A}; \tag{16}$$

3° *Pour tout cycle de Carnot, décrit entre les températures ϑ et ϑ', qui est réalisable et non réversible, qui n'est pas de troisième genre et d'espèce c, on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} > \mathrm{A}. \tag{17}$$

De cet énoncé sont exclus :

1° Les cycles réalisables et non réversibles pour lesquels on a

$$\mathfrak{T} > 0, \quad \mathfrak{Q} = 0;$$

2° Les cycles réversibles pour lesquels on a

$$\mathfrak{Q} = 0;$$

pour ces derniers, on a également

$$\mathfrak{Q}' = 0.$$

6. *La température absolue.* — La quantité A est une fonction des températures ϑ, ϑ'; étudions plus profondément la nature de cette fonction, ou plutôt, de la fonction

$$\psi(\vartheta, \vartheta') = \mathrm{A} - 1. \tag{18}$$

Cette fonction, qui n'est définie que pour les valeurs de ϑ' supérieures à ϑ, est négative et supérieure à 1 en valeur absolue.

Moyennant l'égalité (18), l'égalité et les inégalités (15), (16) et (17) peuvent être remplacées par l'égalité et les inégalités

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} = \psi(\vartheta, \vartheta'), \tag{15 bis}$$

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} < \psi(\vartheta, \vartheta'), \tag{16 bis}$$

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} > \psi(\vartheta, \vartheta'). \tag{17 bis}$$

Soient ϑ, ϑ', ϑ'' trois températures, rangées par ordre de grandeur croissante; nous allons nous proposer de trouver une relation entre les trois quantités

$$\psi(\vartheta, \vartheta'), \quad \psi(\vartheta', \vartheta''), \quad \psi(\vartheta, \vartheta'').$$

Considérons un cycle de Carnot *réversible* décrit entre les températures ϑ et ϑ''. Ce cycle prend le corps à la température ϑ'', dans

l'état A''; par une transformation isothermique, il l'amène à l'état B''; puis, par une transformation adiabatique, à l'état B, dont la température est ϑ; une nouvelle transformation isothermique, accomplie à la température ϑ, l'amène à l'état A; une nouvelle transformation adiabatique le ramène à l'état A''.

Supposons que l'effet calorifique de la transformation BA, effet que nous désignerons par $\mathfrak{Q}(BA)$, soit différent de zéro.

Nous aurons alors

$$\frac{\mathfrak{Q}(A''B'')}{\mathfrak{Q}(BA)} = \psi(\vartheta, \vartheta''). \tag{a}$$

En subissant la transformation $B''B$ le corps passe, au moins une fois, par la température ϑ'; soit B' un état où il présente cette température. De même, en subissant la transformation AA'', le corps passe, au moins une fois, par la température ϑ'; soit A' un état où il présente cette température. Relions les deux états A', B', par une suite d'états d'équilibre du système, ces états correspondant tous à la température ϑ', nous obtiendrons une modification isothermique réversible, $A'B'$.

Le cycle $A'B'BAA'$ sera un cycle de Carnot réversible décrit entre les températures ϑ et ϑ'; comme $\mathfrak{Q}(BA)$ n'est pas nul, on aura

$$\frac{\mathfrak{Q}(A'B')}{\mathfrak{Q}(BA)} = \psi(\vartheta, \vartheta'); \tag{b}$$

$\mathfrak{Q}(A'B')$ n'est certainement pas nul, puisque $\psi(\vartheta, \vartheta')$ n'est pas nul. Mais on a évidemment

$$\mathfrak{Q}(A'B') + \mathfrak{Q}(B'A') = 0. \tag{c}$$

$\mathfrak{Q}(B'A')$ n'est donc pas nul. Dès lors, dans le cycle de Carnot réversible $A''B''B'A'A''$, décrit entre les températures ϑ' et ϑ'', on aura

$$\frac{\mathfrak{Q}(A''B'')}{\mathfrak{Q}(B'A')} = \psi(\vartheta', \vartheta''). \tag{d}$$

Les égalités (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) donnent

$$\psi(\vartheta, \vartheta'') = -\psi(\vartheta, \vartheta')\,\psi(\vartheta', \vartheta''). \tag{19}$$

C'est la relation que nous voulions obtenir.

La fonction $\psi(\vartheta, \vartheta')$ n'a de sens, jusqu'ici, qu'autant que ϑ' est supérieur à ϑ.

Lorsque ϑ' tend vers ϑ, par valeurs supérieures à ϑ, $\mathfrak{Q}'$ tend évidemment, dans un cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures ϑ et ϑ', vers la limite $(-\mathfrak{Q})$; $\psi(\vartheta, \vartheta')$ tend donc vers -1. Nous conviendrons de poser

$$\psi(\vartheta, \vartheta) = -1.$$

Lorsque ϑ' sera inférieur à ϑ, nous définirons $\psi(\vartheta, \vartheta')$ par l'égalité

$$\psi(\vartheta, \vartheta') = -\frac{1}{\psi(\vartheta', \vartheta)}.$$

D'après ces définitions, l'équation fonctionnelle (19), établie en supposant

$$\vartheta < \vartheta' < \vartheta'',$$

demeurera vraie, quels que soient ϑ, ϑ', ϑ''. De plus, on sera assuré que la fonction $\psi(\vartheta, \vartheta')$ est continue pour toute valeur de ϑ et de ϑ'.

Prenons une température fixe, arbitraire d'ailleurs, ϑ_0. L'équation fonctionnelle (19) nous donnera

$$\psi(\vartheta, \vartheta') = -\frac{\psi(\vartheta_0, \vartheta')}{\psi(\vartheta_0, \vartheta)}.$$

La température ϑ_0 étant fixe, $\psi(\vartheta_0, \vartheta)$ devient une fonction de la seule variable ϑ; posons

$$F(\vartheta) = -\lambda\,\psi(\vartheta_0, \vartheta), \tag{20}$$

λ étant une constante.

L'équation précédente deviendra

$$\psi(\vartheta, \vartheta') = -\frac{F(\vartheta')}{F(\vartheta)}. \tag{21}$$

La fonction $\psi(\vartheta, \vartheta')$ est une fonction continue de ϑ, ϑ'; lorsque ϑ' est supérieur à ϑ, elle est négative et supérieure à 1 en valeur absolue. La fonction $F(\vartheta)$ possède donc les propriétés suivantes :

Elle est essentiellement positive;
Elle varie d'une manière continue avec la température ϑ;
Elle croît toujours en même temps que la température ϑ.

D'après ce que nous avons dit plus haut (Ire Partie, Chap. I, n° **6**), au lieu de prendre la quantité ϑ pour déterminer la température des corps, on peut prendre la quantité $T = F(\vartheta)$, dont la valeur pour chaque température ne dépend plus du choix du thermomètre; T porte le nom de *température absolue*.

Si l'on a adopté, pour représenter les températures, la température absolue T, cas auquel on devra poser, dans toutes les formules précédentes,

$$\vartheta = T,$$

on devra aussi, dans toutes les formules, poser

$$F(\vartheta) = F(T) = T.$$

Si l'on se souvient que

$$\psi(\vartheta_0, \vartheta_0) = -1,$$

on voit que l'égalité (20) donne

$$F(\vartheta_0) = \lambda.$$

La température absolue n'est donc pas entièrement déterminée; à une température arbitraire ϑ_0, elle prend une valeur arbitraire λ. Il est d'usage de prendre pour température ϑ_0 la température qui sert de 0 à l'échelle centigrade et, pour λ, l'inverse d'une certaine constante que l'on rencontre dans l'étude des gaz : *le coefficient de dilatation des gaz parfaits*.

On sait que cette définition de la température absolue a été indiquée par Sir W. Thomson et exposée à plusieurs reprises par M. G. Lippmann.

7. *Énoncé définitif du théorème de Carnot*. — La détermination de la fonction $\psi(\vartheta, \vartheta')$, fournie par l'égalité (21), va nous permettre de donner au théorème de Carnot une forme nouvelle et définitive.

Excluons d'abord :

1° Les cycles de Carnot réversibles, décrits entre les températures ϑ et ϑ', dans lesquels la modification produite à la température ϑ est athermique;

2° Les cycles de Carnot réalisables, non réversibles, de troisième genre, décrits entre les températures ϑ et ϑ', pour lesquels la modification produite à la température ϑ est athermique.

Pour les cycles réversibles, réalisables ou non, les égalités (15 *bis*) et (21) donnent

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} = -\frac{F(\vartheta')}{F(\vartheta)}$$

et, puisque $\mathfrak{Q}$ est différent de zéro,

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\vartheta)} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\vartheta')} = 0.$$

Pour les cycles réalisables, non réversibles, de troisième genre et d'espèce c, l'inégalité (16 *bis*) et l'égalité (21) donnent

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} < -\frac{F(\vartheta')}{F(\vartheta)}.$$

Mais, dans ce cas, la quantité $\mathfrak{Q}$ est négative; on a donc

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\vartheta)} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\vartheta')} > 0.$$

Pour les autres cycles non réversibles, l'inégalité (17 *bis*), jointe à l'égalité (21), donne

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} > -\frac{F(\vartheta')}{F(\vartheta)}.$$

Dans tous ces cycles, la quantité $\mathfrak{Q}$ est positive; on a donc encore

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\vartheta)} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\vartheta')} > 0.$$

Revenons maintenant aux deux classes que nous avons exclues.

Pour tout cycle de la première classe, nous savons que l'on a non

seulement $\mathfrak{Q} = 0$, mais encore $\mathfrak{Q}' = 0$; nous pouvons donc encore écrire

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{S})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{S}')} = 0.$$

Pour tout cycle de la seconde classe, nous avons

$$\mathfrak{Q} = 0, \qquad \mathfrak{E} > 0.$$

L'égalité (1), qui se réduit ici à

$$\mathfrak{E} = E\mathfrak{Q}',$$

nous donne alors

$$\mathfrak{Q}' > 0.$$

Nous pouvons donc écrire, pour tout cycle de cette classe,

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{S})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{S}')} > 0.$$

En réunissant tous les résultats que nous venons d'obtenir, nous pouvons énoncer, sous la forme générale que voici, le THÉORÈME DE CARNOT :

1° *Pour tout cycle de Carnot réversible, réalisable ou non, décrit entre les températures* $\mathfrak{S}$ *et* $\mathfrak{S}'$, *on a*

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{S})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{S}')} = 0. \tag{22}$$

2° *Pour tout cycle de Carnot réel et non réversible, décrit entre les températures* $\mathfrak{S}$ *et* $\mathfrak{S}'$, *on a*

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{S})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{S}')} > 0. \tag{23}$$

On peut mettre ces énoncés sous une forme un peu plus explicite en revenant à la définition de l'effet calorifique total d'une modification ou d'un ensemble de modifications.

Soit Q la somme des quantités de chaleur dégagées par le système durant cet ensemble de modifications; si ces modifications sont réversibles, nous avons

$$\mathfrak{Q} = Q,$$

ce qui permet de remplacer l'égalité (22) par l'égalité

$$(22\,bis)\qquad \frac{Q}{F(\mathfrak{I})} + \frac{Q'}{F(\mathfrak{I}')} = 0.$$

Si les modifications considérées sont réelles et non réversibles, désignons par $[\mathfrak{T}]$ la somme des accroissements que la force vive du système a subis durant ces modifications; nous aurons

$$E\mathfrak{Q} = EQ + [\mathfrak{T}],$$

ce qui nous permettra de remplacer l'inégalité (23) par l'inégalité

$$(23\,bis)\qquad \frac{EQ + [\mathfrak{T}]}{F(\mathfrak{I})} + \frac{EQ' + [\mathfrak{T}]'}{F(\mathfrak{I}')} > 0.$$

Ces divers énoncés ne souffrent plus d'exception.

CHAPITRE III.

L'ENTROPIE ET LE THÉORÈME DE CLAUSIUS.

1. *Conditions et hypothèses.* — Le théorème de Carnot a été, on le sait, généralisé par R. Clausius. Toutefois, cette généralisation n'est légitime que moyennant un certain nombre de conditions et d'hypothèses, dont les unes portent sur le système étudié, les autres sur les modifications que subit ce système.

Il ne nous sera pas utile, dans ce Chapitre, de distinguer, parmi les paramètres qui définissent l'état du système, ceux que nous avons désignés par les lettres $a, b, \ldots, l$ de ceux que nous avons désignés par les lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Par contre, il nous sera nécessaire de

mettre particulièrement en évidence, parmi les paramètres qui définissent l'état du système, la température ϑ. Nous supposerons d'ailleurs que *cette dernière a la même valeur en tous les points du système*. Ainsi l'état du système sera défini par les n paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad \vartheta.$$

Le système que nous allons étudier ne sera pas soumis seulement à cette restriction d'avoir, en chacun de ses états, la même température en tous ses points, cette température pouvant d'ailleurs varier d'un état à l'autre. Nous le supposerons encore soumis à deux autres restrictions fondamentales :

Première restriction. — *Soit un état quelconque du système, défini par des valeurs*

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad \vartheta,$$

des paramètres variables; nous admettrons que l'on puisse toujours trouver, au moins d'une manière, un système de corps étrangers, tous portés à la température ϑ, *et tels que le système considéré, demeure indéfiniment en équilibre dans l'état* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$ *si on le soumet à l'action de ces corps étrangers, maintenus invariables et si on le prend avec un ensemble de vitesses initiales égales à zéro,*

L'énoncé de cette restriction ne constitue pas une vaine précaution. On rencontre souvent, en Physique, des systèmes qui n'y sont pas soumis et auxquels, par conséquent, les considérations qui vont suivre ne sont pas applicables. Citons-en quelques exemples :

1° Un corps conducteur est traversé par des courants électriques. Parmi les paramètres variables qui déterminent l'état de ce conducteur figurent :

Les composantes u, v, w du flux électrique en chaque point (x, y, z) du conducteur;

La densité solide ρ de l'électricité en chaque point de la masse du conducteur;

La densité superficielle σ de l'électricité en chaque point des surfaces de discontinuité qui partagent le conducteur ou qui le limitent.

Peut-on, en faisant agir des corps extérieurs convenablement choisis, maintenir le conducteur dont il s'agit en équilibre, de telle sorte que les variables que nous venons d'énumérer aient toutes des valeurs indépendantes du temps? Cela ne sera pas possible, si l'on n'a pas, en tout point de la masse du conducteur, la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

et, en tout point d'une surface de discontinuité dont la normale présente les deux orientations N_1, N_2,

$$\left\{ \begin{aligned} & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = 0. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

En effet, si ces deux relations ne sont pas vérifiées, les paramètres ρ et σ varieront forcément avec le temps t, en vertu des égalités générales

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Les relations (1) et (2) caractérisant les courants que l'on nomme *uniformes*, on voit que l'on peut énoncer la proposition suivante, qui a de graves conséquences en Électrodynamique [1] :

Un système de courants non uniformes ne satisfait pas à la restriction précédente.

2° Une chaîne fermée, parcourue par un courant uniforme, renferme un conducteur électrolytique. Parmi les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$ qui définissent l'état de ce système, figurent l'intensité du courant et

[1] P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 221.

les variables qui déterminent l'état chimique du système; or, en vertu de la définition des électrolytes, connue sous le nom de *loi de Faraday*, un électrolyte traversé par un courant éprouve, pendant chaque intervalle de temps, un changement chimique proportionnel en grandeur à cet intervalle de temps et à l'intensité du courant. Il serait donc contradictoire d'imaginer des corps extérieurs dont l'action maintiendrait le système en équilibre, et, partant, rendrait invariables à la fois l'intensité du courant et l'état chimique de la chaîne. Ainsi, une chaîne parcourue par des courants même uniformes ne satisfait pas à la restriction précédente si elle renferme des électrolytes; cette conclusion est importante en Électrodynamique [1].

L'hypothèse restrictive précédente entraîne un corollaire remarquable :

Corollaire. — *D'un état quelconque* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ *du système à un autre état quelconque* $(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \vartheta')$ *on peut toujours passer par une infinité de modifications réversibles.*

En effet, entre les deux états $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ et $(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \vartheta')$, on peut toujours, d'une infinité de manières, ranger une suite continue d'états du système; au moyen de corps extérieurs convenablement choisis, ces états peuvent être transformés en états d'équilibre; chacune des suites, constituées comme nous venons de l'indiquer, forme alors une suite continue d'états d'équilibre, ou bien, en vertu d'une hypothèse indiquée au Chap. I, n° **8**, une modification réversible.

Seconde restriction. — Imaginons qu'à partir d'un certain état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ du système, on lui impose une modification virtuelle

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \ldots, \quad \delta\lambda, \quad \delta\vartheta.$$

Les actions des corps extérieurs qui le maintiendraient en équilibre en l'état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ effectuent un travail virtuel

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\vartheta.$$

---

[1] P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 220.

Nous admettrons que *les quantités* A, B, ..., L, Θ *sont des fonctions finies, uniformes et continues des paramètres* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Non plus que la précédente, cette restriction n'est inutile à énoncer, car il n'est nullement évident que tous les systèmes étudiés en Physique y soient soumis. En particulier, M. Marcel Brillouin [1] a donné des déformations permanentes une théorie qui suppose les quantités A, B, ..., L, Θ, fonctions continues, mais non uniformes, des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Nous ajouterons l'hypothèse suivante à celle que nous venons d'énoncer :

Le travail virtuel des actions qu'il faut appliquer à un système donné pour le maintenir en équilibre ne dépend pas de la position absolue que le système occupe dans l'espace ni de la variation de cette position.

Il résulte en premier lieu de cette hypothèse que les quantités A, B, ..., L, Θ ne dépendent pas de celles des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui fixent dans l'espace la position absolue du système.

Il en résulte, en second lieu, que celles des variations virtuelles $\delta\alpha$, $\delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\vartheta$ qui correspondent aux variables fixant la position absolue du système dans l'espace ne figurent pas dans la somme

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\vartheta.$$

Le coefficient de chacune d'elles est identiquement nul.

2. *Coefficients calorifiques du système en équilibre.* — Pour expliquer commodément ce qui va suivre, nous emploierons le langage de la Géométrie à n dimensions, n étant le nombre des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui définissent l'état du système. Les énoncés auxquels nous parviendrons pourront toujours être représentés par des figures planes s'il n'y a qu'un seul paramètre tel que $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et par des figures dans l'espace s'il y en a deux.

---

[1] Marcel Brillouin, *Déformations permanentes et Thermodynamique* (*Comptes rendus*, 6, 13, 20 et 27 février 1888).

Un état du système, correspondant à un système de valeurs des coordonnées $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, sera représenté par un *point* dans l'espace à n dimensions. Une modification, correspondant à une série linéaire de valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, sera représentée par une *ligne*.

Le système étant pris dans un état déterminé $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ les actions A, B, ..., L, Θ qui le peuvent maintenir en équilibre dans cet état sont, par hypothèse, des fonctions uniformes et continues des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

$$(1)\qquad \begin{cases} A = f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ B = f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L = f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta). \end{cases}$$

Ces équations (1) sont les *équations d'équilibre du système;* ces équations seront dites *connues* lorsqu'on connaîtra la forme des n fonctions $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Soit U la fonction uniforme et continue de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui représente l'énergie interne du système. Posons

$$(2)\qquad \begin{cases} R_\alpha = \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{f_\alpha}{E}, \\ R_\beta = \dfrac{\partial U}{\partial \beta} - \dfrac{f_\beta}{E}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda = \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{f_\lambda}{E}, \\ C = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} - \dfrac{f_\vartheta}{E}. \end{cases}$$

Les n quantités $R_\alpha, R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C définies par ces équations seront des fonctions uniformes de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$. Ce seront [Ire Partie, Chap. III, égalités (12) et (12 *bis*)] les *coefficients calorifiques du système en équilibre*. Parmi ces paramètres, il en est un qui se distinguera des autres par des propriétés particulières; c'est le coeffi-

cient C; nous le nommerons la *capacité calorifique du système, relative aux variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Comme la quantité U d'une part (Ire Partie, Chap. II, n° **2**, dixième convention) et les quantités A, B, ..., L, Θ d'autre part (ce Chapitre, n° **1**), les quantités $R_\alpha, R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C, ne dépendent pas de celles des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui fixent la position absolue du système dans l'espace. De plus, ceux des coefficients calorifiques qui multiplieraient, dans l'expression de dQ, les variations de ces dernières variables sont identiquement nuls.

L'équation

$$dQ = -(R_\alpha\,\delta\alpha + R_\beta\,\delta\beta + \ldots + R_\lambda\,\delta\lambda + C\,\delta\vartheta) \tag{3}$$

détermine [Ire Partie, Chap. III, égalité (13)] la quantité de chaleur dégagée par le système tandis qu'il subit la modification réelle ou virtuelle $(\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\vartheta)$.

L'équation différentielle

$$R_\alpha\,d\alpha + R_\beta\,d\beta + \ldots + R_\lambda\,d\lambda + C\,d\vartheta = 0 \tag{4}$$

représente, dans l'espace à n dimensions considéré, une famille d'espaces à $(n-1)$ dimensions (de lignes, dans l'espace à deux dimensions, de surfaces dans l'espace à trois dimensions). Nous admettrons que, *par tout point* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ *de l'espace à n dimensions, il passe un et un seul de ces espaces à* $(n-1)$ *dimensions; que, de plus, l'espace ainsi déterminé, qui passe par le point* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$, *se déplace et se déforme d'une manière continue lorsque le point* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ *se déplace d'une manière continue.*

Nous admettrons en outre qu'un espace à adiabatiques réversibles ne se ferme jamais sur lui-même comme une ligne fermée ou une surface fermée, mais qu'il forme toujours un espace simplement connexe, s'étendant jusqu'aux limites du champ des valeurs des $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Considérons une ligne quelconque tracée tout entière en l'un de ces espaces à $(n-1)$ dimensions. Cette ligne représentera une suite continue d'états du système. En chacun de ces états $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$, supposons le système entouré de corps qui ont la même température

que lui et qui exercent sur lui des actions données par les égalités (1). Cette suite d'états sera une suite d'états d'équilibre. D'après l'hypothèse indiquée au Chap. I, n° **8**, cette suite d'états d'équilibre constituera une modification réversible. Les égalités (3) et (4) montrent que, pour tout élément de cette modification réversible, on aura

$$dQ = 0,$$

en sorte que cette modification réversible sera adiabatique. Ainsi *toute ligne tracée en entier en l'un des espaces à* $(n-1)$ *dimensions définis par l'équation* (4) *représente une modification adiabatique réversible du système*. Nous nommerons chacun des espaces à $(n-1)$ dimensions définis par l'équation (4) un *espace à adiabatiques réversibles*.

Prenons deux points, m et n, dans l'espace à n dimensions considéré; entre ces deux points, m et n, menons deux lignes, l et l', telles que chacune d'elles n'ait pas plus d'un point commun avec un même espace à adiabatiques réversibles. Les propositions suivantes, évidentes géométriquement lorsque les espaces à adiabatiques réversibles sont des lignes $(n=2)$ ou des surfaces $(n=3)$, peuvent être énoncées d'une manière entièrement générale :

L'espace à adiabatiques réversibles mené par un point a de la ligne l rencontre la ligne l' en un et un seul point a'; les deux points a et a' sont dits *points correspondants*.

Si les trois points a', b', c' de la ligne l' correspondent respectivement aux trois points a, b, c de la ligne l; si le point b est situé, sur la ligne l, entre les points a et c, le point b' est situé sur la ligne l', entre les points a' et c'.

Si deux points a, b sont infiniment voisins sur la ligne l, leurs correspondants a', b' sont infiniment voisins sur la ligne l'.

Au point m sur la ligne l correspond le même point m sur la ligne l'; au point n sur la ligne l correspond le même point n sur la ligne l'.

Ce mode de correspondance entre les points de deux lignes va nous être utile dans la démonstration du théorème de Clausius, démonstration que nous allons maintenant aborder.

3. *Démonstration du théorème de Clausius.* — Une ligne quelconque, tracée dans l'espace à n dimensions considéré, représente une suite d'états du système; si, dans chacun de ces états, nous supposons le système entouré de corps à la même température que lui et exerçant sur lui des actions données par les égalités (1), chacun de ces états deviendra un état d'équilibre, et la suite de ces états sera une modification réversible. Ainsi, *une ligne quelconque, tracée dans l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, *représente toujours, d'une et d'une seule manière, une modification réversible du système.*

Nous allons étudier les propriétés de semblables transformations; mais nous supposerons provisoirement chacune des modifications réversibles étudiées soumise à certaines restrictions que nous lèverons ensuite une à une :

1° La ligne qui représente une des modifications réversibles étudiées ne présente aucune partie d'étendue finie tracée en entier dans un espace à adiabatiques réversibles;

2° La ligne qui représente une des modifications réversibles étudiées ne rencontre jamais plus d'une fois un même espace à adiabatiques réversibles. Cette dernière restriction suppose évidemment cette autre : la ligne considérée ne passe pas plus d'une fois par un même point.

Considérons deux modifications réversibles l, l', soumises aux restrictions précédentes; toutes deux prennent le système dans le même état initial, représenté par le point m, et l'amènent au même état final, représenté par le point n.

Soient a, b deux états infiniment voisins de la modification l, l'état b venant après l'état a lorsqu'on suit la modification l en allant de m vers n. Soient a', b' les deux états de la modification l' qui correspondent respectivement aux deux états a, b. D'après ce que nous avons vu, les deux états a', b' sont infiniment voisins sur la modification l' et, lorsqu'on parcourt cette modification de m en n, on rencontre l'état a' avant l'état b'.

Soient ϑ la température du système pris dans l'état a et ϑ' la température du système pris dans l'état a'. Soient $d\text{Q}$ la quantité de chaleur dégagée par le système pendant qu'il subit la modification réversible infiniment petite ab et $d\text{Q}'$ la quantité de chaleur dégagée par le

système pendant qu'il subit la modification réversible infiniment petite $a'b'$. Nous allons nous proposer de démontrer que l'on a

$$\frac{dQ}{F(\vartheta)} = \frac{dQ'}{F(\vartheta')}. \tag{5}$$

Par le point a, menons une ligne isothermique jusqu'au point c où elle rencontre l'espace à adiabatiques réversibles mené par le point b; en général, le point c sera infiniment voisin des deux points a et b. De même, par le point a', menons une ligne isothermique, jusqu'au point c' où elle rencontre l'espace à adiabatiques réversibles mené par le point b'; en général, le point c' sera infiniment voisin des points a' et b'. Nous supposerons réalisées, pour le moment, les hypothèses que nous venons d'indiquer, quitte à revenir plus tard au cas où elles ne le seraient pas.

Joignons les deux points c, b par une ligne infiniment petite tracée en l'espace à adiabatiques réversibles auquel appartiennent ces deux points; joignons de même les deux points c', b' par une ligne infiniment petite tracée en l'espace à adiabatiques réversibles auquel appartiennent ces deux points.

Les lignes ac, cb, $a'c'$, $c'b'$ représentent chacune une modification réversible infiniment petite du système.

Les deux modifications réversibles cb, $c'b'$ sont adiabatiques; lorsque le système subit l'une quelconque d'entre elles, il dégage une quantité de chaleur égale à zéro.

Soient dQ_1 la quantité de chaleur que le système dégage lorsqu'il décrit l'isothermique réversible ac et dQ'_1 la quantité de chaleur que le système dégage lorsqu'il décrit l'isothermique réversible $c'a'$.

Considérons le cycle fermé et réversible $abca$; lorsque le système décrit ce cycle, il dégage une quantité de chaleur $(dQ - dQ_1)$; en appliquant l'égalité (16) (Ire Partie, Chap. III) à chacun des éléments de ce cycle, nous trouverons sans peine l'égalité

$$E(dQ - dQ_1) = \int (A\,d\alpha + B\,d\beta + \ldots + L\,d\lambda + \Theta\,d\vartheta),$$

l'intégrale s'étendant au cycle $abca$ tout entier.

Soit $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1)$ un des points de ce cycle; soient A_1, B_1, ..., L_1, Θ_1 les valeurs que prennent, en ce point, les fonctions A, B, ..., L, Θ; nous pourrons écrire l'égalité précédente

$$E(dQ - dQ_1) = A_1 \int d\alpha + B_1 \int d\beta + \ldots + L_1 \int d\lambda + \Theta_1 \int d\vartheta$$
$$+ \int [(A - A_1)\, d\alpha + (B - B_1)\, d\beta + \ldots$$
$$+ (L - L_1)\, d\lambda + (\Theta - \Theta_1)\, d\vartheta].$$

Mais, comme le cycle est fermé, on a

$$\int d\alpha = 0, \qquad \int d\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad \int d\lambda = 0, \qquad \int d\vartheta = 0.$$

D'autre part, comme les quantités A, B, ..., L, Θ varient par hypothèse d'une manière continue avec la position du point $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$, les quantités

$$(A - A_1), \quad (B - B_1), \quad \ldots, \quad (L - L_1), \quad (\Theta - \Theta_1)$$

sont des quantités infiniment petites, au moins du même ordre que les dimensions du cycle. La quantité

$$\int [(A - A_1)\, d\alpha + (B - B_1)\, d\beta + \ldots + (L - L_1)\, d\lambda + (\Theta - \Theta_1)\, d\vartheta]$$

est donc un infiniment petit d'ordre supérieur aux dimensions du cycle, en sorte que l'égalité précédente permet d'écrire

$$dQ - dQ_1 = 0. \tag{6}$$

Une démonstration analogue, appliquée au cycle $a'b'c'a'$, donne l'égalité

$$dQ' + dQ'_1 = 0. \tag{7}$$

Faisons maintenant décrire au système :

1° L'isothermique réversible ac, relative à la température ϑ;

2° L'adiabatique réversible cb;
3° L'adiabatique réversible bb';
4° L'adiabatique réversible $b'c'$;
5° L'isothermique réversible $c'a'$, relative à la température ϑ';
6° L'adiabatique réversible $a'a$.

Le système aura décrit un cycle de Carnot réversible entre les températures ϑ et ϑ'; à la température ϑ, il aura dégagé une quantité de chaleur dQ_1; à la température ϑ', une quantité de chaleur dQ'_1; on aura donc [Chap. II, égalité (22 *bis*)]

$$\frac{dQ_1}{F(\vartheta)} + \frac{dQ'_1}{F(\vartheta')} = 0.$$

En vertu des égalités (6) et (7), cette égalité fournit l'égalité (5), que nous voulions démontrer.

Considérons successivement tous les éléments de la transformation l, en allant de m vers n; les éléments qui leur correspondent sur la transformation l' décriront une et une seule fois la transformation l' en allant de m' vers n'. Pour chaque groupe d'éléments correspondants, écrivons l'égalité analogue à l'égalité (5) et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouverons l'égalité

$$(8) \qquad \int_l \frac{dQ}{F(\vartheta)} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\vartheta')},$$

qui nous conduit à énoncer la proposition suivante :

Considérons toutes les modifications réversibles (soumises aux restrictions indiquées) qui conduisent le système de l'état m à l'état n, ces deux états étant quelconques; pour toutes ces modifications, l'intégrale

$$\int \frac{dQ}{F(\vartheta)}$$

a la même valeur.

Il s'agit maintenant de lever successivement les diverses restrictions que nous avons admises pour effectuer la démonstration précédente.

Nous avons admis qu'en tout point a de la ligne l on pouvait mener une isothermique rencontrant l'espace à adiabatiques réversibles mené

par le point b, infiniment voisin du point a en un point c, qui soit lui-même infiniment voisin du point a. Cela revient à admettre, on le voit aisément, que la ligne isothermique issue du point a n'est pas tangente au point a à l'espace à adiabatiques réversibles qui passe par ce point. Une hypothèse semblable a été faite pour tout point a' de la ligne l'.

En premier lieu, on voit aisément que, s'il existe soit sur la ligne l, soit sur la ligne l', soit sur toutes deux, un nombre limité de points isolés les uns des autres, pour lequel l'hypothèse précédente cesse d'être exacte, le théorème précédent ne sera certainement pas en défaut. Il ne pourrait donc être en défaut que s'il existait sur l'une au moins de ces lignes, la ligne l par exemple, une portion d'étendue finie, la portion fgh, en tout point de laquelle l'isothermique réversible serait tangente à l'espace à adiabatiques réversibles.

Si de semblables conditions sont remplies pour la ligne fgh, deux cas sont à distinguer.

Il est possible que, du point f au point h, on puisse mener des lignes $fg'h$ infiniment voisines de la ligne fgh et qui échappent aux conditions précédentes.

Il est possible au contraire que tous les points de la ligne fgh appartiennent à un domaine D, tracé dans l'espace $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, et qu'en tout point de ce domaine l'isothermique réversible soit tangente à l'espace à adiabatiques réversibles.

Dans le premier cas, l'intégrale $\int \frac{dQ}{F(\vartheta)}$ étendue à la ligne $mfg'hn$ aura, d'après la démonstration précédente, la même valeur que l'intégrale de même forme étendue à la ligne l'. Sa valeur ne variera donc pas lorsque la ligne $mfg'hn$ variera d'une manière continue de manière à tendre vers la ligne $mfghn$ ou l; or, dans ces conditions, cette intégrale tend certainement vers

$$\int_l \frac{dQ}{F(\vartheta)}.$$

On a donc encore dans ce cas

$$\int_l \frac{dQ}{F(\vartheta)} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\vartheta')}.$$

Seul, le second des deux cas que nous venons de distinguer demeure exclu de nos recherches.

Essayons de caractériser ce cas d'une manière plus précise.

Une isothermique réversible satisfait à l'équation différentielle

$$d\vartheta = 0.$$

Un espace à adiabatiques réversibles est défini par l'équation différentielle

$$(4) \qquad R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda + C\, d\vartheta = 0.$$

Pour qu'en tout point ($\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$) du domaine D une isothermique réversible quelconque soit tangente à l'espace à adiabatiques réversibles, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point du domaine D,

$$(9) \qquad R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0.$$

Nous excluons donc provisoirement de nos recherches les systèmes qui vérifieraient les égalités (9) *en tous les points d'un domaine d'étendue finie appartenant à l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Nous avons admis jusqu'ici que chacune des deux modifications l et l' ne rencontrait pas en plus d'un point un même espace à adiabatiques réversibles. Nous allons maintenant nous affranchir de cette restriction et admettre que chacune des deux modifications l et l' peut rencontrer un même espace à adiabatiques réversibles en un nombre fini de points, isolés les uns des autres.

Menons l'espace à adiabatiques réversibles $E(m)$ qui passe par le point m et l'espace à adiabatiques réversibles $E(n)$ qui passe par le point n. Ces deux espaces à $(n-1)$ dimensions partagent l'espace à n dimensions en trois régions; une de ces régions est comprise entre les espaces $E(m)$ et $E(n)$; les deux autres sont extérieures. Si l'on mène la droite de manière à rencontrer le point m au point n, et si l'on suit cette droite de manière à rencontrer le point m plus tôt que le point n, avant d'arriver au point m, on se trouve dans une région que je nommerai *la première;* au moment où l'on passe par le point m,

on pénètre dans une région que je nommerai *la deuxième;* au moment où l'on passe par le point n, on quitte cette seconde région pour pénétrer dans une région que je nommerai *la troisième* ([1]).

Il peut arriver que la ligne l ait avec un espace à adiabatiques réversibles E, autre que l'espace $E(m)$ ou l'espace $E(n)$, un point de rencontre p, sans traverser cet espace en ce point de rencontre. Si l'on mène deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins de l'espace E, et situés de part et d'autre de cet espace, l'un d'eux n'aura avec la ligne l aucune rencontre infiniment voisine du point p, tandis que l'autre aura avec la ligne l deux rencontres infiniment voisines du point p.

Prenons sur la ligne l tous les points, analogues à p, où la ligne l vient rencontrer un espace à adiabatiques réversibles sans le traverser; prenons de même, sur la ligne l', tous les points où la ligne l' vient rencontrer un espace à adiabatiques réversibles sans le traverser. Par tous ces points, menons des espaces à adiabatiques réversibles. Joints aux espaces $E(m)$ et $E(n)$, ils divisent l'espace en un certain nombre de *sous-régions*.

Tous les espaces à adiabatiques réversibles situés dans une même sous-région rencontrent la ligne l en un même nombre N de points et la ligne l' en un même nombre N' de points. Si la sous-région considérée fait partie de la deuxième région, les deux nombres N et N' sont impairs; si la sous-région considérée est située dans la première ou dans la troisième région, N et N' sont pairs ou nuls.

Considérons une sous-région comprise dans la deuxième région; dans cette sous-région, menons un espace à adiabatiques réversibles E; il rencontre la ligne l en $(2k+1)$ points; numérotons ces points dans l'ordre où les rencontre la ligne l allant du point m au point n; soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}$ ces points. Ce même espace à adiabatiques réversibles rencontre la ligne l' en $(2k'+1)$ points; numérotons ces points dans l'ordre où les rencontre la ligne l' allant du point m au point n; $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2k'}, a'_{2k'+1}$ ces points.

Sur la ligne l, menée de m vers n, prenons un point b_1 qui soit ren-

---

([1]) Au cas où les deux points m et n seraient sur un même espace à adiabatiques réversibles, la première et la troisième région coïncideraient.

contré infiniment peu après le point a_1, et qui se trouve ainsi dans la même sous-région que le point a_1. Par ce point b_1, menons un espace à adiabatiques réversibles F; d'après ce que nous avons supposé au sujet des espaces à adiabatiques réversibles, l'espace F sera partout infiniment voisin de l'espace E, sans jamais le rencontrer. L'espace F rencontrera la ligne en l en $(2k+1)$ points $b_1, b_2, \ldots, b_{2k}, b_{2k+1}$, respectivement voisins des points $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}$; il rencontrera la ligne l' en $(2k'+1)$ points $b'_1, b'_2, \ldots, b'_{2k'}, b'_{2k'+1}$, respectivement voisins des points $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2k'}, a'_{2k'+1}$.

Sur la ligne l, menée de m vers n, les points a_i, b_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a_1, \quad b_1, \quad b_2, \quad a_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad \ldots, \quad b_{2k}, \quad a_{2k}, \quad a_{2k+1}, \quad b_{2k+1},$$

ce qui nous donne $(2k+1)$ modifications réversibles infiniment petites ayant leur ligne représentative entre les espaces E et F. Ces modifications sont

$$a_1 b_1, \quad b_2 a_2, \quad a_3 b_3, \quad \ldots, \quad b_{2k} a_{2k}, \quad a_{2k+1} b_{2k+1}.$$

Adoptons, pour ces modifications, les notations suivantes :

Modification subie par le système.	Température initiale du système.	Chaleur dégagée par le système.
$a_1 b_1$	ϑ_1	dQ_1
$b_2 a_2$	ϑ_2	dQ_2
$a_3 b_3$	ϑ_3	dQ_3
....	..	...
$b_{2k} a_{2k}$	ϑ_{2k}	dQ_{2k}
$a_{2k+1} b_{2k+1}$	ϑ_{2k+1}	dQ_{2k+1}

Sur la ligne l', menée de m vers n, les points a'_i, b'_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a'_1, \quad b'_1, \quad b'_2, \quad a'_2, \quad a'_3, \quad b'_3, \quad \ldots, \quad b'_{2k'}, \quad a'_{2k'}, \quad a'_{2k'+1}, \quad b'_{2k'+1},$$

ce qui nous donne $(2k'+1)$ modifications réversibles infiniment pe-

tites ayant leur ligne représentative entre les espaces E et F. Ces modifications sont

$$a'_1 b'_1, \quad b'_2 a'_2, \quad a'_3 b'_3, \quad \ldots, \quad b'_{2k'} a'_{2k'}, \quad a'_{2k'+1} b'_{2k'+1}.$$

Adoptons, pour ces modifications, les notations suivantes :

Modification subie par le système.	Température initiale du système.	Chaleur dégagée par le système.
$a'_1 b'_1$	ϑ'_1	dQ'_1
$b'_2 a'_2$	ϑ'_2	dQ'_2
$a'_3 b'_3$	ϑ'_3	dQ'_3
....	..	...
$b'_{2k'} a'_{2k'}$	$\vartheta'_{2k'}$	$dQ'_{2k'}$
$a'_{2k'+1} b'_{2k'+1}$	$\vartheta'_{2k'+1}$	$dQ'_{2k'+1}$

Considérons les deux transformations $a_1 b_1$ et $b_2 a_2$. Un raisonnement analogue à celui qui nous a fourni l'égalité (5) nous donnera sans peine

$$\frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} = 0.$$

De même, la considération des deux modifications $a_3 b_3$ et $b_4 a_4$ nous donnera

$$\frac{dQ_3}{F(\vartheta_3)} + \frac{dQ_4}{F(\vartheta_4)} = 0.$$

On continuera de même jusqu'à considérer les deux modificat ions $a_{2k-1} b_{2k-1}$ et $b_{2k} a_{2k}$, qui donneront

$$\frac{dQ_{2k-1}}{F(\vartheta_{2k-1})} + \frac{dQ_{2k}}{F(\vartheta_{2k})} = 0.$$

Semblablement, on prouvera que l'on a

$$\frac{dQ'_1}{F(\vartheta'_1)} + \frac{dQ'_2}{F(\vartheta'_2)} = 0,$$

$$\frac{dQ'_3}{F(\vartheta'_3)} + \frac{dQ'_4}{F(\vartheta'_4)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dQ'_{2k'-1}}{F(\vartheta_{2k'-1})} + \frac{dQ'_{2k'}}{F(\vartheta_{2k'})} = 0.$$

Enfin, la comparaison des modifications $a_{2k+1}b_{2k+1}$ et $a'_{2k'+1}b'_{2k'+1}$ donne l'égalité

$$\frac{dQ_{2k+1}}{F(\mathfrak{S}_{2k+1})} = \frac{dQ'_{2k'+1}}{F(\mathfrak{S}_{2k'+1})}.$$

Ces diverses égalités permettent d'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{S}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{S}_2)} + \ldots + \frac{dQ_{2k}}{F(\mathfrak{S}_{2k})} + \frac{dQ_{2k+1}}{F(\mathfrak{S}_{2k+1})}\\ &= \frac{dQ'_1}{F(\mathfrak{S}'_1)} + \frac{dQ'_2}{F(\mathfrak{S}'_2)} + \ldots + \frac{dQ'_{2k'}}{F(\mathfrak{S}'_{2k'})} + \frac{dQ'_{2k'+1}}{F(\mathfrak{S}'_{2k'+1})}.\end{aligned}$$

On peut écrire une égalité analogue pour tout système formé par deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins tracés dans la sous-région considérée; on aura donc pour cette sous-région tout entière

$$\sum \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} = \sum \frac{dQ'}{F(\mathfrak{S}')}; \tag{10}$$

dans cette égalité, le premier signe $\sum$ s'étend à tous les éléments de la modification l qui sont situés dans la sous-région considérée et le second à tous les éléments de la modification l' situés dans la même sous-région.

A chaque sous-région comprise dans la deuxième région on peut appliquer un raisonnement semblable qui fournira une égalité analogue, en sorte qu'on peut supposer l'égalité (10) étendue à la deuxième région tout entière.

Considérons maintenant une sous-région comprise soit dans la première, soit dans la troisième région; dans cette sous-région, menons un espace à adiabatiques réversibles E; il rencontre la ligne l en $2k$ points; numérotons ces points dans l'ordre où on les rencontre sur la ligne l en allant du point m au point n; soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$ ces points.

Sur la ligne l, menée de m vers n, prenons un point b_1 qui soit rencontré infiniment peu après le point a_1, et qui se trouve ainsi dans la même sous-région que le point a_1; par ce point b_1, menons un espace à adiabatiques réversibles F; d'après ce que nous avons sup-

posé au sujet des espaces à adiabatiques réversibles, l'espace F sera partout infiniment voisin de l'espace E sans jamais le rencontrer. L'espace F rencontrera la ligne l en $2k$ points $b_1, b_2, \ldots, b_{2k-1}, b_{2k}$, respectivement voisins des points $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$.

Sur la ligne l, les points a_i, b_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a_1, \quad b_1, \quad b_2, \quad a_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad \ldots, \quad a_{2k-1}, \quad b_{2k-1}, \quad b_{2k}, \quad a_{2k},$$

ce qui donne $2k$ modifications réversibles infiniment petites ayant leur ligne représentative comprise entre les espaces E et F; ces modifications sont

$$a_1 b_1, \quad b_2 a_2, \quad a_3 b_3, \quad \ldots, \quad a_{2k-1} b_{2k-1}, \quad b_{2k} a_{2k}.$$

La considération de ces modifications donne aisément les égalités

$$\frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} = 0,$$
$$\frac{dQ_3}{F(\vartheta_3)} + \frac{dQ_4}{F(\vartheta_4)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dQ_{2k-1}}{F(\vartheta_{2k-1})} + \frac{dQ_{2k}}{F(\vartheta_{2k})} = 0,$$

qui donnent elles-mêmes l'égalité

$$\frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_3)} + \ldots + \frac{dQ_{2k}}{F(\vartheta_{2k})} = 0.$$

On peut écrire une égalité analogue pour tout système formé par deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins tracés dans la sous-région considérée; on aura donc, pour cette sous-région tout entière

$$\sum \frac{dQ}{F(\vartheta)} = 0, \tag{11}$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les éléments de la modification l qui sont situés dans la sous-région considérée.

A chaque sous-région comprise dans la première ou dans la troisième région on peut appliquer un raisonnement semblable qui fournira une égalité analogue, en sorte que l'égalité (11) peut être étendue à l'ensemble de la première et de la troisième région.

On démontrerait de même l'égalité

$$\sum \frac{dQ'}{F(\mathfrak{I}')} = 0, \tag{11 bis}$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les éléments de la modification l' qui sont situés dans la première ou dans la troisième région.

Des égalités (10), (11) et (11 *bis*), on déduit facilement l'égalité

$$\int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{I})} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{I}')}. \tag{8}$$

Il nous reste à lever une dernière restriction.

Nous avons admis que ni la modification l, ni la modification l', ne contenait une portion d'étendue finie tracée en entier en un espace à adiabatiques réversibles.

Supposons maintenant que la modification l présente certaines portions d'étendue finie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, tracées en entier sur les espaces à adiabatiques réversibles $E_1, E_2, \ldots$; que, de même, la modification l' présente certaines portions d'étendue finie $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$, tracées en entier sur les espaces à adiabatiques réversibles $E'_1, E'_2, \ldots$.

Pour toute modification adiabatique réversible, on a constamment

$$dQ = 0.$$

On aura donc

$$\int_{\lambda_1} \frac{dQ}{F(\mathfrak{I})} = 0, \qquad \int_{\lambda_2} \frac{dQ}{F(\mathfrak{I})} = 0, \qquad \ldots, \tag{12}$$

et pareillement

$$\int_{\lambda'_1} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{I}')} = 0, \qquad \int_{\lambda'_2} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{I}')} = 0, \qquad \ldots. \tag{12 bis}$$

On pourra donc, sans modifier la valeur de $\int_l \frac{dQ}{F(\vartheta)}$ et de $\int_{l'} \frac{dQ'}{F(\vartheta')}$, retrancher de la modification l, les portions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et de la modification l', les portions $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$. Il suffira alors de faire figurer les espaces $E_1, E_2, \ldots$ et les espaces $E'_1, E'_2, \ldots$, au nombre de ceux qui limitent les sous-régions, puis de reproduire les raisonnements précédents, pour prouver que l'on a

$$(13) \qquad \sum \frac{dQ}{F(\vartheta)} = \sum \frac{dQ'}{F(\vartheta')},$$

le premier signe $\sum$ s'étendant à tous ceux des éléments de la modification l qui ne sont pas compris dans les portions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et le second signe $\sum$ s'étendant à tous ceux des éléments de la modification l' qui ne sont pas compris dans les portions $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$.

L'ensemble des égalités (12), (12 *bis*) et (13) fournit aisément l'égalité

$$(8) \qquad \int_l \frac{dQ}{F(\vartheta)} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\vartheta')}.$$

Cette égalité n'est donc plus soumise qu'aux restrictions indiquées au n° **1** et aussi *à cette condition que l'on n'ait pas identiquement, en tous les points d'un domaine d'étendue finie faisant partie de l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$,

$$(9) \qquad R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0.$$

4. *Propriété des cycles réversibles.* — Imaginons que la modification réversible l ramène le système à son état initial; l'état n est alors identique à l'état m; parmi les autres modifications réversibles l' susceptibles de conduire le système du même état initial au même état final, on peut ranger l'absence de toute modification; dans ce cas, on a évidemment

$$\int_{l'} \frac{dQ'}{F(\vartheta')} = 0.$$

L'égalité (8) nous fournit alors ce théorème célèbre de Clausius :

Pour le cycle réversible, on a

$$\int \frac{dQ}{F(\vartheta)} = 0. \tag{14}$$

Supposons en particulier le cycle isothermique; la température ϑ demeurant constante le long du parcours du cycle, il en est de même de la fonction $F(\vartheta)$ et l'égalité (14) peut s'écrire

$$\int dQ = 0$$

ou

$$\int (R_\alpha \, d\alpha + R_\beta \, d\beta + \ldots + R_\lambda \, d\lambda) = 0.$$

En vertu des égalités (2), cette égalité devient

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda} d\lambda \right)$$
$$- \frac{1}{E} \int (A \, d\alpha + B \, d\beta + \ldots + L \, d\lambda) = 0.$$

Mais, pour un cycle isothermique, on a

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda} d\lambda \right) = 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\int (A \, d\alpha + B \, d\beta + \ldots + L \, d\lambda) = 0. \tag{15}$$

Lorsqu'un système parcourt un cycle isothermique réversible, les actions extérieures appliquées à ce système effectuent un travail total égal à zéro.

Ce théorème est dû à M. J. Moutier; Clausius et M. J. Moutier en ont fait un fréquent usage. On peut remarquer qu'il est exact même pour les systèmes pour lesquels les égalités (9) seraient vérifiées.

5. *L'entropie.* — L'égalité (8) peut s'énoncer de la manière suivante, en désignant par R_α, R_β, ..., R_λ, C les coefficients calorifiques du système en équilibre :

L'intégrale curviligne

$$\int_l \frac{1}{F(\vartheta)}(R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda + C\, d\vartheta)$$

a une valeur qui dépend uniquement du point initial

$$(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0, \vartheta_0)$$

et du point final

$$(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1).$$

On sait que ce théorème équivaut à celui-ci :

Il existe une infinité de fonctions uniformes des variables α, β, ..., λ, ϑ, *différant les uns des autres par une constante, qui sont telles que l'on ait*

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{R_\alpha}{F(\vartheta)} &= -\frac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ \frac{R_\beta}{F(\vartheta)} &= -\frac{\partial S}{\partial \beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{R_\lambda}{F(\vartheta)} &= -\frac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ \frac{C}{F(\vartheta)} &= -\frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \end{aligned}\right.$$

$S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ *désignant une quelconque de ces fonctions.*

Cette fonction a reçu de Clausius le nom d'*entropie du système.*

Ce théorème peut encore s'énoncer en abrégé de la manière suivante :

Pour toute modification réversible infiniment petite, on a

$$(17)\quad \frac{dQ}{F(\vartheta)} = dS.$$

Si nous nous souvenons, 1° que les quantités

$$R_\alpha, \quad R_\beta, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad C$$

ne dépendent pas de celles des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui déterminent la position absolue du système dans l'espace;

2° Que, dans l'expression

$$R_\alpha\,\delta\alpha + R_\beta\,\delta\beta + \ldots + R_\lambda\,\delta\lambda + C\,\delta\vartheta,$$

celles des variations $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\vartheta$ qui déterminent seulement le changement de position absolue du système dans l'espace ne figurent pas; nous voyons sans peine que l'entropie ne dépend pas de la position absolue du système dans l'espace.

6. *Sur le cas réservé dans ce qui précède.* — Revenons au cas où, en tous les points d'un domaine D faisant partie de l'espace des α, $\beta, \ldots, \vartheta$, on aurait identiquement

$$R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0 \tag{9}$$

et cherchons si les théorèmes précédents peuvent être encore appliqués dans ce cas.

En premier lieu, il est évident qu'ils peuvent l'être si l'on n'envisage que des modifications isothermiques du système; car alors on aura, pour toute modification réversible,

$$dQ = 0,$$

et, partant,

$$\frac{dQ}{F(\vartheta)} = dS,$$

en désignant par S une fonction quelconque de la température.

Ce cas particulier est important, car c'est en réalité celui que l'on envisage dans la Mécanique rationnelle classique; en effet, dans l'exposé classique de la Mécanique rationnelle, on omet la notion de température (ce qui n'est admissible que si la température est supposée invariable) et l'on omet aussi la notion de quantité de chaleur

dégagée par le système; ce qui n'est admissible que si les égalités (9) sont vérifiées.

Dans ce cas, les égalités (2) et (9) donnent

$$(18) \qquad A = E\frac{\partial U}{\partial \alpha}, \qquad B = A\frac{\partial U}{\partial \beta}, \qquad \ldots, \qquad L = E\frac{\partial U}{\partial \lambda}.$$

C'est la forme qu'il convient d'attribuer dans ce cas aux conditions d'équilibre (1). Le produit EU représente ce que les mécaniciens appellent le *potentiel des forces intérieures.*

Mais ne supposons plus la température invariable. Nous allons prouver que, *s'il existe un domaine* D *où les égalités* (9) *soient vérifiées, pour qu'il existe une fonction* S, *uniforme et continue, des variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, *telle que, dans tout le champ de ces variables, on puisse écrire*

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{R_\alpha}{F(\vartheta)} &= -\frac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ \frac{R_\beta}{F(\vartheta)} &= -\frac{\partial S}{\partial \beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{R_\lambda}{F(\vartheta)} &= -\frac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ \frac{C}{F(\vartheta)} &= -\frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \end{aligned} \right.$$

il faut et il suffit que, dans tout le domaine D, *la capacité calorifique* C *soit fonction de la seule température* ϑ.

Si le domaine D n'occupe pas le champ entier des variables α, $\beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, c'est le seul cas où le théorème ne soit pas évident) on pourra toujours découper la partie de ce champ extérieure au domaine D en espaces simplement connexes; à l'intérieur de chacun de ces espaces, les démonstrations précédentes s'appliqueront; elles permettent d'écrire des égalités analogues aux égalités (16), lesquelles entraînent à leur tour des égalités du type

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{R_\alpha}{F(\vartheta)}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{R_\beta}{F(\vartheta)}\right]$$

et des égalités du type

$$(18\,bis) \qquad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\frac{R_\alpha}{F(\vartheta)}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{C}{F(\vartheta)}\right].$$

D'autre part, pour que dans le domaine D, où les égalités (9) sont vérifiées, on puisse écrire les égalités (18) et (18 *bis*), il faut et il suffit que la quantité

$$\frac{dQ}{F(\vartheta)} = \frac{C}{F(\vartheta)}\,d\vartheta$$

soit une différentielle totale et, partant, que la quantité C soit une fonction de la seule température ϑ.

D'ailleurs, le champ des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, étant supposé simplement connexe, pour qu'il existe une fonction S, *uniforme* et continue, des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, vérifiant les égalités (16), il faut et il suffit que les égalités (18) et (18 *bis*) soient vérifiées dans tout ce champ.

Ainsi, *si nous admettons que, dans tout domaine* D *où les égalités* (9) *sont vérifiées, la capacité calorifique du système est fonction de la température seule,* les théorèmes démontrés dans le présent Chapitre seront soumis seulement aux restrictions énoncées au n° **1**.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

L'intégrale des forces vives en Thermodynamique;

PAR M. P. DUHEM.

I. — Des systèmes qui admettent une intégrale des forces vives.

Dans ce Travail, qui fait suite à notre *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (¹) et à notre Mémoire intitulé : *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (²), nous nous proposons d'étudier un système dont les diverses parties sont à des températures différentes. Pour simplifier les écritures nous supposerons qu'il existe seulement deux telles parties que nous désignerons par les indices 1 et 2, mais les démon-

---

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4ᵉ série, t. VIII, p. 269; 1892; — t. IX, p. 293; 1893; — t. X, p. 203; 1894.

(²) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 5ᵉ série, t. II; 1896. Paris (A. Hermann), 1896.

strations que nous ferons seront tout à fait indépendantes du nombre de ces parties.

La partie 1 aura une température absolue T_1; elle sera, en outre, définie par les variables *normales* $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$; nous admettrons, comme nous l'avons toujours fait en des questions de ce genre, que si T_1 varie seul, $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ gardant des valeurs invariables, les divers éléments matériels qui composent la partie 1 demeurent immobiles.

La partie 2 sera définie, également, par la température T_2 et les variables normales $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

Entre ces deux parties, nous supposerons l'existence de k liaisons bilatérales

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1^1\delta\alpha_1 + \ldots + P_1^1\delta\lambda_1 + M_2^1\delta\alpha_2 + \ldots + P_2^1\delta\lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_1^k\delta\alpha_1 + \ldots + P_1^k\delta\lambda_1 + M_2^k\delta\alpha_2 + \ldots + P_2^k\delta\lambda_2 = 0, \end{array}\right.$$

les coefficients $M_1^j, \ldots, P_1^j, M_2^j, \ldots, P_2^j$ étant des fonctions des variables $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2$, mais point de T_1, T_2.

Le potentiel thermodynamique interne du système est de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F} = \mathcal{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, T_1) + \mathcal{F}_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, T_2) \\ \qquad + E\Psi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2), \end{array}\right.$$

$\mathcal{F}_1$ étant le potentiel thermodynamique interne de la partie 1, considérée isolément;
$\mathcal{F}_2$ étant le potentiel thermodynamique interne de la partie 2, considérée isolément;
$E\Psi$ étant le potentiel des actions mutuelles des corps 1 et 2.

Entre les vitesses $\alpha_1', \beta_1', \ldots, \lambda_1', \alpha_2', \beta_2', \ldots, \lambda_2'$, les conditions (1) donnent les k relations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1^1\alpha_1' + \ldots + P_1^1\lambda_1' + M_2^1\alpha_2' + \ldots + P_2^1\lambda_2' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ M_1^k\alpha_1' + \ldots + P_1^k\lambda_1' + M_2^k\alpha_2' + \ldots + P_2^k\lambda_2 = 0. \end{array}\right.$$

Supposons le système dénué de toute viscosité et de tout frottement; nous aurons alors, pour équations du mouvement du système [1],

$$(4)\quad \begin{cases} A_1 - \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1}(\mathfrak{F}_1 + E\Psi - \mathfrak{T}) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} + \Pi^1 M_1^1 + \ldots + \Pi^k M_1^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 - \dfrac{\partial}{\partial \lambda_1}(\mathfrak{F}_1 + E\Psi - \mathfrak{T}) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_1} + \Pi^1 P_1^1 + \ldots + \Pi^k P_1^k = 0, \end{cases}$$

$$(4\,bis)\quad \begin{cases} A_2 - \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2}(\mathfrak{F}_2 + E\Psi - \mathfrak{T}) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_2} + \Pi^1 M_2^1 + \ldots + \Pi^k M_2^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_2 - \dfrac{\partial}{\partial \lambda_2}(\mathfrak{F}_2 + E\Psi - \mathfrak{T}) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_2} + \Pi^1 P_2^1 + \ldots + \Pi^k P_2^k = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations :

$\mathfrak{T}$ est la force vive du système;

$A_1, \ldots, L_1$ sont les actions que les corps étrangers exercent sur le corps 1;

$A_2, \ldots, L_2$ sont les actions que les corps étrangers exercent sur le corps 2;

enfin $\Pi^1, \Pi^2, \ldots, \Pi^k$ sont des quantités qui dépendent de

$$\alpha_1, \ldots, \lambda_1, T_1, \quad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, T_2,$$
$$\alpha'_1, \ldots, \lambda'_1, \quad \alpha'_2, \ldots, \lambda'_2,$$

mais point [2] des quantités

$$\alpha''_1, \ldots, \lambda''_1, \quad \alpha''_2, \ldots, \lambda''_2.$$

Le nombre des équations du mouvement (3), (4), (4 *bis*) est

---

[1] *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, IIe Partie, Chapitre III, n° 7 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, p. 255; 1894).

[2] Pour la démonstration de ce point, voir *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, Ire Partie, Chapitre I, § 4.

$(n_1 + n_2 + k)$, en désignant par n_1 le nombre des variables normales $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et par n_2 le nombre des variables normales $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

D'autre part, nous avons à déterminer, en fonctions du temps t,

les $(n_1 + 1)$ variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, T_1$;
les $(n_2 + 1)$ variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, T_2$;
les k variables auxiliaires $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$.

Soit, en tout, $(n_1 + n_2 + k + 2)$ variables.

D'où la proposition suivante :

Le nombre des équations que la Thermodynamique fournit pour déterminer le mouvement d'un système est inférieur au nombre de variables à déterminer d'autant d'unités qu'il y a, dans le système, de parties susceptibles d'être portées à des températures différentes.

Pour compléter la mise en équations du problème dynamique, il faudra emprunter à des hypothèses étrangères à la Thermodynamique un nombre de relations supplémentaires égal au nombre de ces parties.

Soient

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0 \tag{5}$$

ces relations supplémentaires.

Multiplions respectivement les deux membres des équations (4) par $\alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \lambda'_1$ et les deux membres des équations (4 *bis*) par $\alpha'_2, \beta'_2, \ldots, \lambda'_2$. Ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (3). Nous trouvons

$$\begin{aligned} &A_1 \alpha'_1 + \ldots + L_1 \lambda'_1 + A_2 \alpha'_2 + \ldots + L_2 \lambda'_2 \\ &- \left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_1} \alpha'_1 + \ldots + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \lambda_1} \lambda'_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_2} \alpha'_2 + \ldots + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \lambda_2} \lambda'_2 \right) - E \frac{d\Psi}{dt} - \frac{d\mathfrak{T}}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Supposons que les actions exercées sur le système par les corps

étrangers à ce système dépendent d'un potentiel

$$\Omega(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \quad \alpha_2, \ldots, \lambda_2).$$

L'égalité précédente deviendra

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}(\Omega + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathrm{E}\Psi + \mathfrak{T}) - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \mathrm{T}_1}\frac{d\mathrm{T}_1}{dt} - \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathrm{T}_2}\frac{d\mathrm{T}_2}{dt} = 0.$$

Pour que cette relation (6) *fournisse immédiatement une intégrale première* (INTÉGRALE DES FORCES VIVES) *des équations du second ordre* (4) *et* (4 *bis*), *il faut et il suffit que l'expression*

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \mathrm{T}_1} d\mathrm{T}_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathrm{T}_2} d\mathrm{T}_2$$

représente, soit d'elle-même, soit en vertu des équations supplémentaires (5), *la différentielle totale d'une fonction de* $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$.

II. — Des systèmes classiques.

La fonction $\mathfrak{F}_1$ ne dépend que des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathrm{T}_1$; la fonction $\mathfrak{F}_2$ ne dépend que des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathrm{T}_2$; pour que l'expression

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \mathrm{T}_1} d\mathrm{T}_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathrm{T}_2} d\mathrm{T}_2$$

soit, par elle-même, une différentielle totale, il faut et il suffit que $\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \mathrm{T}_1}$ soit une fonction de la seule variable T_1 et que $\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathrm{T}_2}$ soit une fonction de la seule variable T_2. Donc :

Pour qu'un système, soumis à des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel, admette une intégrale des forces vives, quelle que soit la forme des relations supplémentaires, il faut et il suffit

que l'on ait

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{F}_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, T_1) = \mathcal{G}_1(T_1) + E\psi_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1), \\ \mathcal{F}_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, T_2) = \mathcal{G}_2(T_2) + E\psi_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2). \end{cases}$$

Nous donnerons le nom de *systèmes classiques* aux systèmes pour lesquels les égalités (7) sont vérifiées, et qui sont dénués de toute viscosité et de tout frottement.

Donnons un exemple de semblables systèmes; cet exemple justifiera la dénomination de *systèmes classiques* que nous leur avons attribuée.

Imaginons un nombre quelconque de corps c_1, c'_1, c''_1, ..., tous à la même température, variable d'un instant à l'autre, T_1. Supposons que chacun de ces corps soit un solide invariable, d'état invariable, sauf la température; le potentiel thermodynamique interne de chacun d'eux est une fonction de la température seule; désignons par $g_1(T_1)$, $g'_1(T_1)$, $g''_1(T_1)$, ... les potentiels thermodynamiques internes des corps c_1, c'_1, c''_1.

Pour former le système partiel 1, prenons les corps c_1, c'_1, c''_1, ... et laissons-les indépendants les uns des autres, ou bien unissons-les par des liaisons bilatérales sans viscosité ni frottement. Le système partiel 1 sera alors un système sans viscosité ni frottement. Si nous désignons par α_1, β_1, ..., λ_1 les variables indépendantes qui fixent la position relative des corps c_1, c'_1, c''_1, ..., le potentiel thermodynamique interne du système partiel 1 sera

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, T_1) \\ &\quad = g_1(T_1) + g'_1(T_1) + g''_1(T_1) + \ldots + E\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1), \end{aligned}$$

$E\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1)$ étant le potentiel des actions mutuelles des corps c_1, c'_1, c''_1, ...

Ce potentiel thermodynamique interne a la forme présentée en la première égalité (7).

Formons d'une manière analogue les systèmes partiels 2, ... et laissons-les indépendants les uns des autres, ou bien associons-les par des liaisons bilatérales sans viscosité ni frottement; nous obtiendrons un système classique.

Et l'on voit, en effet, qu'un tel système, où l'on peut attribuer aux corps c_1, c'_1, c''_1, ... des dimensions très petites telles que celles que certaines Écoles attribuent aux *molécules*, constitue bien le type général des systèmes que l'on considérait en Mécanique avant l'époque récente où la Thermodynamique est venue élargir le champ de cette Science.

Examinons les propriétés que la Thermodynamique attribue à ces systèmes classiques; cet examen sera d'importance, car il nous renseignera sur les liens qui unissent l'ancienne Mécanique à la nouvelle Thermodynamique.

Nous avons vu, tout d'abord, que, *pour qu'un système classique admette une intégrale des forces vives, il faut et il suffit qu'il soit soumis à des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel* Ω.

Désignons, en effet, par $G_1(T_1)$, $G_2(T_2)$, ... des fonctions définies par les égalités

$$(8) \qquad \frac{d\,G_1(T_1)}{dT_1} = \mathcal{G}_1(T_1), \qquad \frac{d\,G_2(T_2)}{dT_2} = \mathcal{G}_2(T_2), \qquad \ldots .$$

L'égalité (6) deviendra, en vertu des égalités (7) et (8),

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}(\Omega + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 - \mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2 + E\Psi + \mathfrak{T}) = 0,$$

ou bien encore

$$(10) \qquad \frac{d}{dt}[\Omega + E(\psi_1 + \psi_2 + \Psi) + \mathfrak{T}] = 0.$$

Appliquons cette dernière forme à l'exemple du système classique que nous avons défini tout à l'heure.

$E(\psi_1 + \psi_2 + \Psi)$ sera, dans ce cas, le potentiel de toutes les actions que les corps c_1, c'_1, c''_1, ..., c_2, c'_2, ... exercent les uns sur les autres. L'égalité (10) conduit donc, pour un tel système, à la proposition suivante :

La somme de la force vive, du potentiel des actions extérieures et du potentiel des actions intérieures demeure invariable pendant tout mouvement du système.

On retrouve bien l'énoncé du théorème de la force vive, tel que le fournit la Mécanique classique.

L'énergie interne U d'un système est donnée, en général, par la formule

$$EU = \mathfrak{F} - T_1 \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1} - T_2 \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2}.$$

En vertu des égalités (2) et (7), cette égalité devient, pour un système classique,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} EU = E(\psi_1 + \psi_2 + \Psi) + \mathcal{G}_1(T_1) - T_1 \frac{d\,\mathcal{G}_1(T_1)}{dT_1} \\ + \mathcal{G}_2(T_2) - T_2 \frac{d\,\mathcal{G}_2(T_2)}{dT_2}. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(12)\quad E\Lambda(T_1, T_2) = \mathcal{G}_1(T_1) - T_1 \frac{d\,\mathcal{G}_1(T_1)}{dT_1} + \mathcal{G}_2(T_2) - T_2 \frac{d\,\mathcal{G}_2(T_2)}{dT_2}$$

et l'égalité précédente deviendra

$$(13)\quad U = \psi_1 + \psi_2 + \Psi + \Lambda(T_1, T_2).$$

En vertu des égalités (7) et (11), les équations (4) et (4 *bis*) prennent la forme suivante, qui constitue ainsi une forme acceptable des équations du mouvement d'un système classique :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 - \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(EU - \mathfrak{T}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} + \Pi^1 M_1^1 + \ldots + \Pi^k M_1^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 - \frac{\partial}{\partial \lambda_1}(EU - \mathfrak{T}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_1} + \Pi^1 P_1^1 + \ldots + \Pi^k P_1^k = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(14\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} A_2 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(EU - \mathfrak{T}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_2} + \Pi^1 M_2^1 + \ldots + \Pi^k M_2^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_2 - \frac{\partial}{\partial \lambda_2}(EU - \mathfrak{T}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_2} + \Pi^1 P_2^1 + \ldots + \Pi^k P_2^k = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans les équations du mouvement d'un système classique, on peut, au potentiel thermodynamique interne du système, substituer

le produit de l'énergie interne par l'équivalent mécanique de la chaleur.

Nous avions déjà indiqué ([1]) que les équations du mouvement des systèmes que l'on étudie en Mécanique pouvaient être mises sous les formes (14) et (14 *bis*).

Les coefficients calorifiques d'un système à liaisons bilatérales sont donnés par les égalités ([2])

$$(15)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha_1} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} - A_1 - \Pi^1 M_1^1 - \ldots - \Pi^k M_1^k = ER_{\alpha_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda_1} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_1} - L_1 - \Pi^1 P_1^1 - \ldots - \Pi^k P_1^k = ER_{\lambda_1}, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial T_1} = Ec_1, \end{cases}$$

$$(15\ bis)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_2} - A_2 - \Pi^1 M_2^1 - \ldots - \Pi^k M_2^k = ER_{\alpha_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_2} - L_2 - \Pi^1 P_2^1 - \ldots - \Pi^k P_2^k = ER_{\lambda_2}, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial T_2} = Ec_2. \end{cases}$$

En vertu des égalités (11), (14), (14 *bis*), ces égalités deviennent

$$(16)\quad R_{\alpha_1} = 0, \quad \ldots, \quad R_{\lambda_1} = 0, \qquad R_{\alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad R_{\lambda_2} = 0,$$

$$(17)\quad \begin{cases} Ec_1 = -T_1\dfrac{d^2\mathcal{G}_1(T_1)}{dT_1^2}, \\ Ec_2 = -T_2\dfrac{d^2\mathcal{G}_2(T_2)}{dT_2^2}. \end{cases}$$

([1]) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, Ire Partie, Chapitre III, n° 4 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VIII, p. 324; 1892).

([2]) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, IIIe Partie, Chapitre III, n° 8 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, p. 256; 1894).

Pour un système classique, tous les coefficients calorifiques sont nuls, sauf la capacité calorifique de chacune des parties de température uniforme; cette capacité calorifique est une fonction de la température seule.

Nous avons déjà signalé [1], dans la définition de l'entropie, le rôle exceptionnel joué par les systèmes que caractérisent les égalités (16) et (17).

La quantité de chaleur δQ que le système dégage dans une modification réelle ou virtuelle quelconque aura pour valeur

$$\delta Q = -(c_1 \delta T_1 + c_2 \delta T_2), \tag{18}$$

ou bien encore, en vertu des égalités (12) et (17),

$$\delta Q = -\delta \Lambda(T_1, T_2). \tag{19}$$

La quantité de chaleur dégagée par le système durant une modification réelle ou virtuelle quelconque est la différentielle totale d'une fonction uniforme de l'état du système.

La fonction $\Lambda(T_1, T_2)$ joue exactement ici le rôle de ce que les anciens physiciens nommaient *quantité de calorique libre* contenue dans le système; de plus, pour ces physiciens, la *quantité de calorique latent* contenue dans notre système eût été invariable.

En vertu des égalités (7), qui caractérisent un système classique, les équations du mouvement (4) et (4 *bis*) deviennent

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 - \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} E(\psi_1 + \Psi) + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} + \Pi^1 M_1^1 + \ldots + \Pi^k M_1^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 - \dfrac{\partial}{\partial \lambda_1} E(\psi_1 + \Psi) + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} + \Pi^1 P_1^1 + \ldots + \Pi^k P_1^k = 0, \end{array} \right.$$

---

[1] *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, IIe Partie, Chapitre III, no 6 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. IX, p. 357; 1893).

$$(20\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} A_2 - \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} E(\psi_2 + \Psi) + \dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \alpha_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \alpha'_2} + \Pi^1 M_2^1 + \ldots + \Pi^k M_2^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_2 - \dfrac{\partial}{\partial \lambda_2} E(\psi_2 + \Psi) + \dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \lambda_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \lambda'_2} + \Pi^1 P_2^1 + \ldots + \Pi^k P_2^k = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations nous montrent, en premier lieu, que pour traiter le mouvement du système que nous avons choisi comme exemple de système classique on peut, dans les équations du mouvement fournies par la Thermodynamique, substituer au potentiel thermodynamique interne de chacun des systèmes partiels 1 et 2 le potentiel des actions intérieures à chacun de ces systèmes; on retrouve ainsi les équations bien connues de la Dynamique. Mais les équations (20) et (20 *bis*) conduisent à une conséquence plus générale, car elle s'applique à tous les systèmes classiques :

Les $(n_1 + n_2)$ équations (20) et (20 *bis*), jointes aux k équations (3), peuvent être regardées comme $(n_1 + n_2 + k)$ équations linéaires entre les $(n_1 + n_2 + k)$ inconnues

$$\alpha''_1, \ldots, \lambda''_2, \quad \alpha''_2, \ldots, \lambda''_2,$$
$$\Pi^1, \quad \Pi^2, \quad \ldots, \quad \Pi^k.$$

Ces $(n_1 + n_2 + k)$ inconnues sont déterminées en fonctions des coefficients des $(n_1 + n_2 + k)$ équations linéaires; or les températures T_1, T_2 des diverses parties du système ne figurent dans aucun de ces coefficients; nous pouvons donc, en particulier, énoncer la proposition suivante :

Les quantités Π^1, Π^2, ..., Π^k sont indépendantes des températures T_1, T_2 des diverses parties du système.

Cette proposition entraîne, à son tour, la suivante :

Lorsque le système étudié est un système classique, entre les $(n_1 + n_2)$ *fonctions inconnues* $\alpha_1(t), \ldots, \lambda_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \lambda_2(t)$ *et les k fonctions inconnues auxiliaires* $\Pi^1, \Pi^2, \ldots, \Pi^k$, *on peut écrire les* $(n_1 + n_2 + k)$ *équations différentielles* (3), (20) *et* (20 *bis*), *où ne figurent pas les températures des diverses parties du système. Ces équations suffisent, hors de toute relation supplémentaire,*

pour déterminer les lois suivant lesquelles le système se déplace et se modifie, à l'exception de la loi suivant laquelle varie la température de chaque partie du système.

Une fois le mouvement du système connu, les relations supplémentaires déterminent la loi suivant laquelle varie la température de chaque partie du système.

On comprend ainsi comment Lagrange a pu développer les lois de la Mécanique des systèmes formés de solides sans s'occuper des variations de la température de ces corps et Fourier traiter des variations de la température de ces mêmes corps solides sans s'occuper de leur mouvement; comment on peut étudier le mouvement de la Terre, assimilée à un solide rigide, sans se préoccuper de la température de cet astre et étudier le refroidissement du globe terrestre sans se préoccuper de son mouvement.

Une telle indépendance entre les problèmes qui ressortissent à la Mécanique et les problèmes qui ressortissent à la Théorie de la chaleur n'existe plus lorsque les systèmes auxquels on a affaire ne sont plus des *systèmes classiques;* si, par exemple, au lieu de regarder la Terre comme un solide rigide, d'état invariable, on tient compte des changements de volume, de forme, d'état physique et chimique qui accompagnent son refroidissement, on ne peut plus séparer le problème du mouvement de la Terre et le problème du refroidissement terrestre.

III. — Des systèmes qui admettent une intégrale des forces vives en vertu des relations supplémentaires.

Lorsqu'on n'a pas affaire à un système classique, l'expression

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, T_1)}{\partial T_1} dT_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, T_2)}{\partial T_2} dT_2$$

n'est plus une différentielle totale. Mais il peut arriver que les équations supplémentaires (5) entraînent une égalité de la forme

$$(21) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1} \frac{dT_1(t)}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2} \frac{dT_2(t)}{dt} = \frac{dF(t)}{dt}.$$

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, le système admettra une intégrale des forces vives, qui, en vertu des égalités (6) et (21), sera de la forme

$$(22) \qquad \Omega + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathrm{E}\Psi + \mathfrak{T} - \mathrm{F}(t) = \text{const.}$$

On peut imaginer une infinité de formes des relations supplémentaires (5), telles qu'une égalité de la forme (21) soit vérifiée; citons-en quelques exemples remarquables.

Imaginons que les relations supplémentaires (5) entraînent cette conséquence :

Toute modification du système étudié est adiabatique.

Le système étant dénué de viscosité, la quantité de chaleur dégagée dans une modification réelle ou virtuelle a pour valeur

$$\delta \mathrm{Q} = -(\mathrm{R}_{\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{R}_{\lambda_1}\delta\lambda_1 + c_1\,\delta\mathrm{T}_1 + \mathrm{R}_{\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{R}_{\lambda_2}\delta\lambda_2 + c_2\,\delta\mathrm{T}_2),$$

avec

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R}_{\alpha_1} &= -\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1\,\partial\mathrm{T}_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{R}_{\lambda_1} &= -\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1\,\partial\mathrm{T}_1}, \\ c_1 &= -\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial\mathrm{T}_1^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(23\,bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R}_{\alpha_2} &= -\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2\,\partial\mathrm{T}_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{R}_{\lambda_2} &= -\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2\,\partial\mathrm{T}_2}, \\ c_2 &= -\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial\mathrm{T}_2^2}. \end{aligned} \right.$$

Dire que, par suite des équations (5), toute modification réelle du système est adiabatique, c'est dire que les équations (5) entraînent

l'égalité

$$\frac{T_1}{E}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}_1}{\partial\alpha_1\,\partial T_1}\alpha'_1+\ldots+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}_1}{\partial\lambda_1\,\partial T_1}\lambda'_1+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T_1^2}T'_1\right)$$
$$+\frac{T_2}{E}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}_2}{\partial\alpha_2\,\partial T_2}\alpha'_2+\ldots+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}_2}{\partial\lambda_2\,\partial T_2}\lambda'_2+\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T_2^2}T'_2\right)=0,$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1}\frac{dT_1}{dt}+\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2}\frac{dT_2}{dt}=\frac{d}{dt}\left(T_1\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1}+T_2\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2}\right).$$

Cette égalité prend la forme (21) si l'on pose

$$F=T_1\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1}+T_2\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2}.$$

Il existe donc une intégrale des forces vives qui est, en vertu de l'égalité (22),

$$\Omega+\mathfrak{F}_1-T_1\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1}+\mathfrak{F}_2-T_2\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2}+E\Psi+\mathfrak{T}=\text{const.}$$

ou bien

$$\Omega+EU+\mathfrak{T}=\text{const.},$$

relation qui, pour une modification adiabatique accomplie sous des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel, découle immédiatement du principe de la conservation de l'énergie.

Une des formes d'équations complémentaires qui entraînent les conséquences que nous venons de détailler s'obtient en exprimant que, *durant une modification réelle du système, chacune des parties qui le composent ne reçoit ni ne cède de chaleur;* c'est-à-dire en écrivant que l'on a

$$R_{\alpha_1}\alpha'_1+\ldots+R_{\lambda_1}\lambda'_1+c_1T'_1=0,$$
$$R_{\alpha_2}\alpha'_2+\ldots+R_{\lambda_2}\lambda'_2+c_2T'_2=0$$

ou bien, en vertu des égalités (23) et (23 *bis*),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1}=0,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2}=0.$$

Ce sont précisément les relations supplémentaires introduites par Laplace dans la théorie de la propagation du son au sein d'une masse d'air.

On obtient encore une relation de la forme (21) si l'on prend pour relations supplémentaires les relations

$$\frac{dT_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dT_2}{dt} = 0,$$

ou, en d'autres termes, si *l'on suppose que chaque partie du système garde une température invariable pendant que le système se modifie;* on a alors

$$F(t) = 0$$

et l'intégrale des forces vives (22) prend la forme

$$\Omega + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi + \mathfrak{C} = \text{const.},$$

qui est ainsi la forme de l'intégrale des forces vives pour les *modifications isothermiques.*

On sait que cette forme de relations supplémentaires [1] avait été introduite par Newton et les géomètres du XVIIIe siècle dans la théorie du son.

Ces considérations montrent que les questions qui ressortissent à la Thermodynamique ont dû solliciter l'attention des physiciens dès qu'on a voulu aborder l'étude de systèmes autres que des systèmes classiques; et, en fait, c'est la théorie de la propagation du son dans l'air qui a provoqué Laplace à créer la Thermodynamique.

---

[1] Au sujet de ces deux formes de relations supplémentaires, voir L. NATANSON, *Zeitschrift für physikalische Chemie,* Bd. XXIV, p. 302; 1897.

DE L'INFLUENCE

QUE

LES ACTIONS CAPILLAIRES

EXERCENT

SUR UN CORPS FLOTTANT,

PAR P. DUHEM.

§ I. — Préliminaires.

Imaginons qu'à la surface de séparation de deux fluides incompressibles 1 et 2, flotte un corps solide 3. Soit S_{12} l'aire de la surface de contact des deux fluides 1 et 2; soient S_{13} et S_{23} les aires des surfaces de contact du solide 3 avec les fluides 1 et 2. La partie variable du potentiel thermodynamique interne du système se réduira, selon l'analyse bien connue de Gauss, à

$$\mathcal{F} = A_{12}S_{12} + A_{13}S_{13} + A_{23}S_{23}, \tag{1}$$

A_{pq} étant une quantité qui dépend uniquement de la nature des deux corps p et q. Cette formule suppose invariable la surface qui limite extérieurement les fluides 1 et 2.

Lorsque nous voudrons appliquer au système le principe des travaux virtuels, nous serons amené à étudier la variation infiniment petite

$$\delta\mathcal{F} = A_{12}\delta S_{12} + A_{13}\delta S_{13} + A_{23}\delta S_{23}, \tag{2}$$

qu'éprouve la quantité $\mathcal{F}$ au cours d'une modification virtuelle imposée au système. Cette étude se ramènera à mettre sous une forme commode les quantités δS.

Soit S' l'aire de la surface en laquelle la surface S s'est transformée par la modification; à chaque point M de S faisons correspondre

un point M′ de S′, cette correspondance étant assujettie seulement aux conditions suivantes :

1° A toute figure tracée sur S correspond, sur S′, une figure infiniment peu différente.

2° A tout point du bord de l'aire S correspond un point du bord de l'aire S′.

Si les coordonnées du point M sont désignées par x, y, z, celles du point M′ seront désignées par $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$.

Faisons choix, sur la surface S, d'un côté dit positif; soient, en un point M de cette surface, N la demi-normale menée du côté positif, et R et R′ les rayons de courbure principaux, chacun d'eux étant compté positivement lorsque, pour aller de la surface au centre de courbure correspondant, on marche dans le sens de la normale N.

Soient dl un élément du contour de l'aire S; n une demi-droite, normale à dl, tangente à la surface S, et dirigée vers l'intérieur de l'aire S.

On sait que l'on a

$$(3)\quad \begin{aligned} \delta S = &-\mathbf{S}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)[\cos(N,x)\,\delta x + \cos(N,y)\,\delta y + \cos(N,z)\,\delta z]\,dS \\ &-\int [\cos(n,x)\,\delta x + \cos(n,y)\,\delta y + \cos(n,z)\,\delta z]\,dl. \end{aligned}$$

Nous désignerons par ρ_1 et ρ_2 les densités invariables des fluides 1 et 2; nous admettrons que les forces extérieures auxquelles sont soumis les divers éléments de ces fluides admettent une fonction potentielle Ψ.

Nous désignerons par X, Y, Z les composantes de la résultante générale, et par L, M, N les composantes de l'axe du couple résultant, auxquelles peuvent se réduire les forces extérieures appliquées au corps solide.

Le travail effectué par les forces extérieures appliquées au système pourra s'écrire

$$(4)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_e = &-\int \rho_1\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta z\right)dv_1 \\ &-\int \rho_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta z\right)dv_2 \\ &+ X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta + L\delta\lambda + M\delta\mu + M\delta\nu. \end{aligned}$$

Dans cette égalité :

δx, δy, δz sont les composantes du déplacement du point matériel, appartenant à l'un des fluides, dont x, y, z sont les coordonnées initiales;

$\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sont les composantes de la translation élémentaire suivant les axes Ox, Oy, Oz, et $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ les composantes de la rotation élémentaire autour des axes Ox, Oy, Oz, translation et rotation imposées au solide.

Ces points de départ admis, on peut démontrer, par des méthodes qui sont exposées dans tous les Traités et que nous nous contentons de rappeler, les propositions suivantes :

1° Il existe une fonction $\Pi_1(x, y, z)$, variable d'une manière continue à l'intérieur du fluide 1, telle que l'on ait, en tout point de ce fluide,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} + \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il existe une fonction $\Pi_2(x, y, z)$, variable d'une manière continue à l'intérieur du fluide 2, telle que l'on ait, en tout point de ce fluide,

$$(5\,bis) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} + \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} + \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right.$$

2° Si l'on prend pour côté positif de la surface S_{12} le côté qui confine au fluide 1, convention que rappellera l'indice 1 affecté aux rayons de courbure, on a, en tout point de la surface S_{12},

$$(6) \quad \Pi_1 - \Pi_2 = k + A_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right),$$

k étant une constante; cette égalité peut encore s'écrire d'une autre manière.

D'après les égalités (5), on a, à l'intérieur du fluide 1,

$$\Pi_1 + \rho_1 \Psi = C_1,$$

C_1 étant une constante; d'après les égalités (5 *bis*), on a, à l'intérieur du fluide 2,

$$\Pi_2 + \rho_2 \Psi = C_2,$$

C_2 étant une constante. Si l'on pose

$$K = C_1 - C_2 - k,$$

l'égalité (6) peut s'écrire

$$(6\ bis) \qquad (\rho_1 - \rho_2)\Psi + A_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right) = K.$$

Soit i l'angle de raccordement du fluide 1 avec le solide 3, compté suivant les conventions habituellement acceptées dans l'étude de la capillarité; on aura

$$(7) \qquad \cos i = \frac{A_{23} - A_{13}}{A_{12}}.$$

Ces résultats préliminaires rappelés, nous allons aborder le problème dont la solution fait l'objet de ce travail.

§ II. — Équilibre d'un corps flottant à la surface de séparation de deux fluides.

Imaginons que l'on donne au corps solide un déplacement infiniment petit, composé d'une rotation $(\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu)$ et d'une translation $(\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$. Un point (x, y, z) de la surface du solide éprouve un déplacement $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ dont les composantes sont

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta x = \Delta\xi + z\,\delta\mu - y\,\delta\nu, \\ \Delta y = \Delta\eta + x\,\delta\nu - z\,\delta\lambda, \\ \Delta z = \Delta\zeta + y\,\delta\lambda - x\,\delta\mu, \end{cases}$$

Les fluides, en même temps, se déforment d'une manière quelconque; nous supposerons seulement que la ligne suivant laquelle les fluides 1 et 2 se raccordent avec le solide soit entraînée dans le mouvement du solide; les composantes du déplacement en un point de

cette ligne seront alors données par les égalités (8); en outre, les aires S_{13}, S_{23} demeureront invariables.

Nous aurons donc

$$\delta\mathcal{F} = -A_{12} \mathbf{S} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right) [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12}$$
$$- A_{12} \int [\cos(n, x)\,\delta x + \cos(n, y)\,\delta y + \cos(n, z)\,\delta z]\, dl,$$

dl étant un élément de la ligne de raccordement et n la demi-droite normale à cet élément, tangente à la surface S_{12} et dirigée vers l'intérieur de l'aire S_{12}.

En chacun des points de la ligne l, nous pouvons prendre

$$\delta x = \Delta x, \qquad \delta y = \Delta y, \qquad \delta z = \Delta z$$

et écrire, par conséquent, au lieu de l'égalité précédente,

$$(9) \quad \delta\mathcal{F} = -A_{12} \mathbf{S} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right) [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12}$$
$$- A_{12} \int \Big\{ \cos(n, x)\,\delta\xi + \cos(n, y)\,\delta\eta + \cos(n, z)\,\delta\zeta$$
$$+ [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)]\,\delta\lambda$$
$$+ [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)]\,\delta\mu$$
$$+ [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)]\,\delta\nu \Big\}\, dl.$$

Les forces extérieures effectuent un travail donné par l'égalité (4); cette égalité peut se transformer. On a, en effet,

$$-\int \rho_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\delta z\right) dv_1$$
$$= \mathbf{S} \rho_1 \Psi [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12}$$
$$+ \mathbf{S} \rho_1 \Psi [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{13}$$
$$+ \int \rho_1 \Psi \left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right) dv_1.$$

Mais, comme le fluide 1 est incompressible, on a, en tout point du fluide 1,

$$\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} = 0.$$

En outre, en tout point de la surface S_{12}, on a

$$\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z + \cos(N_3, x)\,\Delta x + \cos(N_2, y)\,\Delta y + \cos(N_3, z)\,\Delta z = 0.$$

L'égalité considérée peut donc s'écrire

$$(10)\quad -\int \rho_1\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta z\right) dv_1$$
$$= \mathrm{S}\rho_1\Psi[\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\,dS_{12}$$
$$-\delta\xi\,\mathrm{S}\rho_1\Psi\cos(N_3, x)\,dS_{13} - \delta\eta\,\mathrm{S}\rho_1\Psi\cos(N_3, y)\,dS_{13}$$
$$-\delta\zeta\,\mathrm{S}\rho_1\Psi\cos(N_3, z)\,dS_{13}$$
$$-\delta\lambda\,\mathrm{S}\rho_1\Psi[y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{13}$$
$$-\delta\mu\,\mathrm{S}\rho_1\Psi[z\cos(N_3, x) - x\cos(N_3, z)]\,dS_{13}$$
$$-\delta\nu\,\mathrm{S}\rho_1\Psi[x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{13}.$$

On a de même

$$(10\ bis)\quad \int \rho_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\partial x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\partial y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\partial z\right) dv_2$$
$$= \mathrm{S}\rho_2\Psi[\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\,dS_{12}$$
$$+\delta\xi\,\mathrm{S}\rho_2\Psi\cos(N_3, x)\,dS_{23} + \delta\eta\,\mathrm{S}\rho_2\Psi\cos(N_3, y)\,dS_{23}$$
$$+\delta\zeta\,\mathrm{S}\rho_2\Psi\cos(N_3, z)\,dS_{23}$$
$$+\delta\lambda\,\mathrm{S}\rho_2\Psi[y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{23}$$
$$+\delta\mu\,\mathrm{S}\rho_2\Psi[z\cos(N_3, x) - x\cos(N_3, z)]\,dS_{23}$$
$$+\delta\nu\,\mathrm{S}\rho_2\Psi[x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{23}.$$

Écrivons maintenant la condition d'équilibre

$$-\delta\mathcal{F} + d\mathfrak{T}_e = 0,$$

en tenant compte des égalités (4), (6 *bis*), (9), (10) et (10 *bis*). Nous aurons

$$
\begin{aligned}
(11)\quad & K \mathbf{S} [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12} \\
& + \delta\xi \left[X + A_{12} \int \cos(n, x)\, dl - \mathbf{S} \rho_1 \Psi \cos(N_3, x)\, dS_{13} - \mathbf{S} \rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\, dS_{23} \right] \\
& + \delta\eta \left[Y + A_{12} \int \cos(n, y)\, dl - \mathbf{S} \rho_1 \Psi \cos(N_3, y)\, dS_{13} - \mathbf{S} \rho_2 \Psi \cos(N_3, y)\, dS_{23} \right] \\
& + \delta\zeta \left[Z + A_{12} \int \cos(n, z)\, dl - \mathbf{S} \rho_1 \Psi \cos(N_3, z)\, dS_{13} - \mathbf{S} \rho_2 \Psi \cos(N_3, z)\, dS_{23} \right] \\
& + \delta\lambda \Big\{ L + A_{12} \int [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)]\, dl \\
& \qquad - \mathbf{S} \rho_1 \Psi [y \cos(N_3, z) - z \cos(N_3, y)]\, dS_{13} \\
& \qquad - \mathbf{S} \rho_2 \Psi [y \cos(N_3, z) - z \cos(N_3, y)]\, dS_{23} \Big\} \\
& + \delta\mu \Big\{ M + A_{12} \int [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)]\, dl \\
& \qquad - \mathbf{S} \rho_1 \Psi [z \cos(N_3, x) - x \cos(N_3, z)]\, dS_{13} \\
& \qquad - \mathbf{S} \rho_2 \Psi [z \cos(N_3, x) - x \cos(N_3, z)]\, dS_{23} \Big\} \\
& + \delta\nu \Big\{ N + A_{12} \int [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)]\, dl \\
& \qquad - \mathbf{S} \rho_1 \Psi [x \cos(N_3, y) - y \cos(N_3, x)]\, dS_{13} \\
& \qquad - \mathbf{S} \rho_2 \Psi [x \cos(N_3, y) - y \cos(N_3, x)]\, dS_{23} \Big\} = 0.
\end{aligned}
$$

Cette égalité ne doit pas avoir lieu *identiquement;* le volume de chacun des fluides 1 et 2 doit demeurer invariable, condition qui s'ex-

prime, on le voit aisément, par l'égalité

$$
\begin{aligned}
(12)\quad & \mathbf{S}[\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\,dS_{12} \\
& - \delta\xi\,\mathbf{S}\cos(N_3, x)\,dS_{13} - \delta\eta\,\mathbf{S}\cos(N_3, y)\,dS_{13} - \delta\zeta\,\mathbf{S}\cos(N_3, z)\,dS_{13} \\
& - \delta\lambda\,\mathbf{S}[y\cos(N_3\ z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{13} \\
& - \delta\mu\,\mathbf{S}[z\cos(N_3, x) - x\cos(N_3, z)]\,dS_{13} \\
& - \delta\nu\,\mathbf{S}[x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{13} = 0.
\end{aligned}
$$

En vertu de cette égalité (12), le premier membre de l'égalité (11) devient une expression linéaire et homogène en $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$; cette expression doit être égale à o, quelles que soient les six variables dont elle dépend, ce qui donne les égalités suivantes :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
0 = X + A_{12}\int\cos(n, x)\,dl - \mathbf{S}(\rho_1\Psi - K)\cos(N_3, x)\,dS_{13} \\
- \mathbf{S}\rho_2\Psi\cos(N_3, x)\,dS_{23}, \\
0 = Y + A_{12}\int\cos(n, y)\,dl - \mathbf{S}(\rho_1\Psi - K)\cos(N_3, y)\,dS_{13} \\
- \mathbf{S}\rho_2\Psi\cos(N_3, y)\,dS_{23}, \\
0 = Z + A_{12}\int\cos(n, z)\,dl - \mathbf{S}(\rho_1\Psi - K)\cos(N_3, z)\,dS_{13} \\
- \mathbf{S}\rho_2\Psi\cos(N_3, z)\,dS_{23}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
0 = L + A_{12}\int[y\cos(n, z) - z\cos(n, y)]\,dl - \mathbf{S}(\rho_1\Psi - K)[y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{13} \\
- \mathbf{S}\rho_2\Psi[y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{23}, \\
0 = M + A_{12}\int[z\cos(n, x) - x\cos(n, z)]\,dl - \mathbf{S}(\rho_1\Psi - K)[z\cos(N_3, x) - x\cos(N_8, z)]\,dS_{13} \\
- \mathbf{S}\rho_2\Psi[z\cos(N_3, x) - x\cos(N_3, z)]\,dS_{23}, \\
0 = N + A_{12}\int[x\cos(n, y) - y\cos(n, x)]\,dl - \mathbf{S}(\rho_1\Psi - K)[x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{13} \\
- \mathbf{S}\rho_2\Psi[x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{23}.
\end{aligned}
\right.
$$

Telles sont les conditions d'équilibre d'un solide qui flotte à la surface de séparation de deux fluides incompressibles.

Les formules (13) ont été données par divers auteurs; on les trouve, en particulier, dans la *Mechanik* de G. Kirchhoff et dans le *Traité de Capillarité* de E. Mathieu; les formules (14) sont nouvelles.

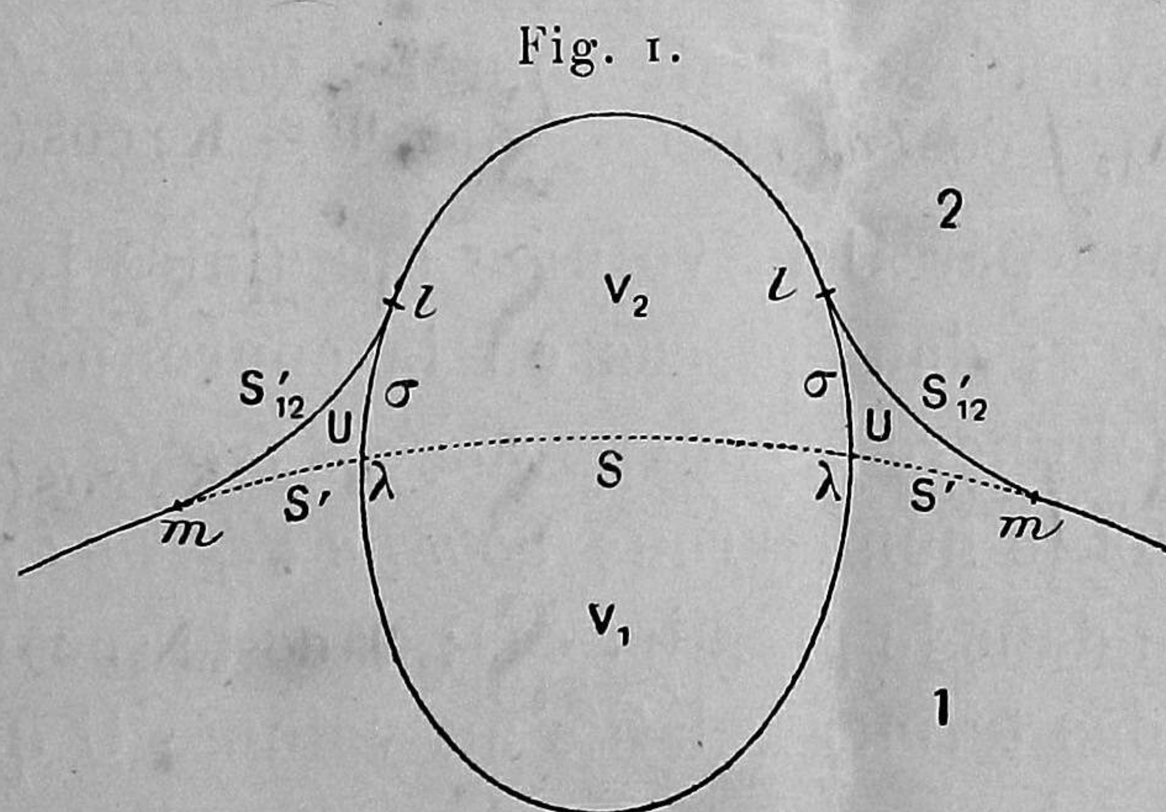
§ III. — Interprétation des conditions précédentes.

Les conditions précédentes sont susceptibles d'une interprétation très simple dans le cas particulier qui est défini par les deux hypothèses suivantes :

1° Dans la région où se trouve le flotteur, les surfaces de niveau $\Psi = \text{const.}$ ont une courbure très petite par rapport à la courbure que présente, au voisinage de la ligne d'affleurement du flotteur, la surface de contact des deux fluides.

2° On peut tracer autour du flotteur, sur la surface S_{12} une ligne m (*fig.* 1) au delà de laquelle la surface S_{12} a une très petite courbure;

Fig. 1.



en vertu de l'égalité (6 *bis*), la surface S_{12}, en dehors de la ligne m, coïncidera sensiblement avec la surface de niveau

$$(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K = 0. \tag{15}$$

On pourra, si l'on veut, regarder la surface S_{12} comme se raccordant tangentiellement, le long de la ligne m, avec cette surface de niveau.

Prolongeons la surface de niveau définie par l'égalité (15); elle coupe la surface du solide suivant une ligne λ.

Soient

S l'aire dessinée par la ligne λ sur la surface définie par l'égalité (15);

S′ l'aire de la couronne comprise entre les lignes m et λ, sur la même surface;

S'_{12} l'aire de la couronne comprise, sur la surface de contact des deux fluides, entre les lignes l et m;

σ l'aire de la couronne comprise, sur la surface du solide, entre les lignes l et λ.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que l'aire σ fasse partie de l'aire S_{13}; nous désignerons par Σ_{13} ce qui reste de S_{13} lorsqu'on en retranche la couronne σ et par Σ_{23} l'aire S_{23} augmentée de la couronne σ, en sorte que nous aurons

$$\Sigma_{13} = S_{13} - \sigma, \qquad \Sigma_{23} = S_{23} + \sigma.$$

Nous désignerons par V_1 le volume compris entre les surfaces S et Σ_{13}, et nous conviendrons de le nommer *volume déplacé par le solide au sein du liquide* 1.

Nous désignerons par V_2 le volume compris entre les surfaces S et Σ_{23} et nous conviendrons de le nommer *volume déplacé par le solide au sein du liquide* 2.

Nous désignerons par U le volume annulaire limité par les trois couronnes S'_{13}, S′, σ; dans le cas où la couronne σ est contiguë au fluide 1, nous le nommerons *volume soulevé par le corps solide;* dans le cas contraire, nous le nommerons *volume déprimé par le corps solide.* Nous raisonnerons dans le premier cas; dans le second cas, il faudrait changer le signe des termes relatifs au volume U que nous introduirons dans nos formules.

Nous aurons évidemment

$$(16) \quad \begin{aligned} &\mathbf{S}_{S_{13}} (\rho_1 \Psi - K) \cos(N_3, x)\, dS_{13} + \mathbf{S}_{S_{23}} \rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\, dS_{23} \\ &= \mathbf{S}_{\Sigma_{13}} (\rho_1 \Psi - K) \cos(N_3, x)\, d\Sigma_{13} + \mathbf{S}_{\Sigma_{23}} \rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\, d\Sigma_{23} \\ &\quad - \mathbf{S}_{\sigma} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K] \cos(N_3, x)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Désignons par ν_1, ν_2 les demi-normales à la surface S dirigées res-

pectivement vers l'intérieur des volumes V_1, V_2. Nous aurons

$$\mathbf{S}_{\Sigma_{13}}(\rho_1\Psi - K)\cos(N_3, x)\,d\Sigma_{13} + \mathbf{S}_{S}(\rho_1\Psi - K)\cos(\nu_1, x)\,dS = -\int_{V_1}\rho_1\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,dV_1,$$

$$\mathbf{S}_{\Sigma_{23}}\rho_2\Psi\cos(N_3, x)\,d\Sigma_{23} \qquad + \mathbf{S}_{S}\rho_2\Psi\cos(\nu_2, x)\,dS \qquad = -\int_{V_2}\rho_2\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,dV_2.$$

On a, d'ailleurs, en tout point de la surface S,

$$\cos(\nu_1, x) + \cos(\nu_2, x) = 0, \qquad (\rho_1 - \rho_2)\Psi - K = 0,$$

en sorte que l'égalité (16) peut s'écrire

$$(17) \quad \mathbf{S}_{S_{13}}(\rho_1\Psi - K)\cos(N_3, x)\,dS_{13} \qquad + \mathbf{S}_{S_{23}}\rho_2\Psi\cos(N_3, x)\,dS_{23}$$
$$= -\int_{V_1}\rho_1\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,dV_1 - \int_{V_2}\rho_2\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,dV_2 + \mathbf{S}_{\sigma}[(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K]\cos(N_3, x)\,d\sigma.$$

D'autre part, nous aurons

$$\int_U(\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,dU = \mathbf{S}_{\sigma}[(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K]\cos(N_3, x)\,d\sigma$$
$$+ \mathbf{S}_{S'}[(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K]\cos(\nu_1, x)\,dS'$$
$$+ \mathbf{S}_{S'_{12}}[(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K]\cos(N_2, x)\,dS'_{12}.$$

Mais l'égalité (6 *bis*) est vérifiée en tout point de la surface S'_{12} et l'égalité (15) en tout point de la surface S'; l'égalité précédente peut donc s'écrire

$$(18) \quad \int_U(\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,dU = \mathbf{S}_{\sigma}[(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K]\cos(N_3, x)\,d\sigma$$
$$+ A_{12}\,\mathbf{S}_{S'_{12}}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right)\cos(N_1, x)\,dS'_{12}.$$

Imaginons maintenant que tous les points de la couronne S'_{12} éprouvent une même translation parallèle à l'axe des x; l'aire de cette couronne demeurera invariable; exprimons cette condition en faisant usage de l'égalité (3) et nous trouverons l'égalité

$$(19) \quad \mathbf{S}_{S'_{12}}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right)\cos(N_1, x)\,dS'_{12} + \int_l \cos(n, x)\,dl + \int_m \cos(n, x)\,dm = 0.$$

La demi-droite n est, en tout point du contour m, normale à l'élément dm, tangente à la surface S_{12} et dirigée vers l'intérieur de l'aire S'_{12}.

Imaginons de même que tous les points de la couronne S′ éprouvent une même translation parallèle à l'axe des x; l'aire de cette couronne demeurera invariable; exprimons cette condition en faisant usage de l'égalité (3) et en observant :

1° Que, par hypothèse, la courbure de la surface S′ est négligeable;

2° Que les deux surfaces S'_{12}, S′ se touchent le long de la ligne m, en sorte qu'en tout point de la ligne m *la même* demi-droite n est normale à la ligne m, tangente aux deux surfaces S_{12}, S′, et dirigée à la fois vers l'intérieur de l'aire S'_{12} et vers l'intérieur de l'aire S′.

Nous trouverons l'égalité

$$\int_m \cos(n, x)\, dm + \int_\lambda \cos(n, x)\, d\lambda = 0. \tag{20}$$

En tout point de la ligne λ, la demi-droite n est normale à l'élément $d\lambda$, tangente à la surface S et dirigée vers l'*intérieur* de l'aire S′, c'est-à-dire vers l'intérieur de l'aire S.

Les égalités (18), (19), (20) nous donnent l'égalité

$$\begin{aligned}\int_U (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dU = A_{12}\int_\lambda \cos(n, x)\, d\lambda - A_{12}\int_l \cos(n, x)\, dl \\ + \mathbf{S}_\sigma [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K]\cos(N_3, x)\, d\sigma.\end{aligned} \tag{21}$$

En vertu des égalités (17) et (21), la première des égalités (13) devient la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned}
0 &= X + \int_{V_1} \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dV_1 + \int_{V_2} \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dV_2 - \int_U (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dU + A_{12}\int_\lambda \cos(n, x)\, d\lambda, \\
0 &= Y + \int_{V_1} \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dV_1 + \int_{V_2} \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dV_2 - \int_U (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dU + A_{12}\int_\lambda \cos(n, y)\, d\lambda, \\
0 &= Z + \int_{V_1} \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\, dV_1 + \int_{V_2} \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\, dV_2 - \int_U (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \Psi}{\partial z}\, dU + A_{12}\int_\lambda \cos(n, z)\, d\lambda.
\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Les deux autres se déduisent d'une manière analogue des deux dernières égalités (13).

Transformons de même les égalités (14).

Nous aurons évidemment, par un raisonnement analogue à celui qui a fourni l'égalité (17),

$$(23)\quad \begin{aligned} &\mathbf{S}_{S_{13}} (\rho_1 \Psi - K)[y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, dS_{13} \\ &\quad + \mathbf{S}_{S_{23}} \rho_2 \Psi [y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, dS_{23} \\ &= -\int_{V_1} \rho_1 \left(y\frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) dV_1 - \int_{V_2} \rho_2 \left(y\frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) dV_2 \\ &\quad + \mathbf{S}_{\sigma} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, d\sigma. \end{aligned}$$

D'autre part, nous aurons

$$\begin{aligned} &\int_U (\rho_1 - \rho_2)\left(y\frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) dU \\ &= \mathbf{S}_{\sigma} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, d\sigma \\ &\quad + \mathbf{S}_{S'} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(\nu_1, z) - z\cos(\nu_1, y)]\, dS' \\ &\quad + \mathbf{S}_{S'_{12}} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(N_2, z) - z\cos(N_2, y)]\, dS'_{12}. \end{aligned}$$

L'égalité (6 *bis*) étant vérifiée en tout point de la surface S'_{12} et l'égalité (15) en tout point de la surface S', l'égalité précédente peut s'écrire

$$(24)\quad \begin{aligned} &\int_U (\rho_1 - \rho_2)\left(y\frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) dU \\ &= \mathbf{S}_{\sigma} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, d\sigma \\ &\quad + A_{12} \mathbf{S}_{S'_{12}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right)[y\cos(N_1, z) - z\cos(N_1, y)]\, dS'_{12}. \end{aligned}$$

Exprimons maintenant qu'une rotation autour de l'axe des x n'altère ni l'aire de la couronne S'_{12}, ni l'aire de la couronne S', et nous trou-

verons les deux égalités

$$\mathbf{S}_{S'_{12}}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'_1}\right)[y\cos(N_1,z)-z\cos(N_1,y)]\,dS'_{12}$$
$$+\int_l[y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,dl+\int_m[y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,dm=0$$

et

$$\int_m[y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,dm+\int_\lambda[y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,d\lambda=0.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (24) devient

$$(25)\quad \int_U(\rho_1-\rho_2)\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dU$$
$$=\mathbf{S}_\sigma[(\rho_1-\rho_2)\Psi-K][y\cos(N_3,z)-z\cos(N_3,y)]\,d\sigma$$
$$+A_{12}\int_\lambda[y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,d\lambda-A_{12}\int_l[y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,dl.$$

En vertu des égalités (23) et (25), la première des égalités (14) devient la première des égalités

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}
0=L&+\int_{V_1}\rho_1\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dV_1+\int_{V_2}\rho_2\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dV_2\\
&-\int_U(\rho_1-\rho_2)\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dU+A_{12}\int_\lambda[y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,d\lambda,\\
0=M&+\int_{V_1}\rho_1\left(z\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dV_1+\int_{V_2}\rho_2\left(z\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dV_2\\
&-\int_U(\rho_1-\rho_2)\left(z\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dU+A_{12}\int_\lambda[z\cos(n,x)-x\cos(n,z)]\,d\lambda,\\
0=N&+\int_{V_1}\rho_1\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dV_1+\int_{V_2}\rho_2\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dV_2\\
&-\int_U(\rho_1-\rho_2)\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dU+A_{12}\int_\lambda[x\cos(n,y)-y\cos(n,x)]\,d\lambda.
\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se déduisent de même des deux dernières égalités (14).

Les égalités (22) et (26) mettent en évidence le théorème suivant que nous avions en vue de démontrer :

Lorsqu'un solide flotte à la surface de séparation de deux fluides incompressibles, soumis aux forces capillaires, il peut être regardé comme éprouvant, de la part de ces fluides, des actions qui se partagent en trois groupes :

1° ACTIONS DU PREMIER GROUPE. — *Pour les obtenir, on remplit avec le fluide 1 le volume V_1 que le solide déplace à l'intérieur du fluide 1, et avec le fluide 2, le volume V_2 que le solide déplace à l'intérieur du fluide 2; on détermine les actions extérieures de fonction potentielle Ψ, auxquelles seraient soumis les divers éléments de volume de ces fluides; on renverse le sens de ces actions et on les compose comme si elles agissaient sur le corps solide.* Ces actions sont celles que donnerait la généralisation du principe d'Archimède.

2° ACTIONS DU SECOND GROUPE. — *Pour les obtenir, on remplace le volume U du liquide 1, que le solide soulève, par un corps solide ayant pour densité $(\rho_1 - \rho_2)$, et l'on détermine les actions que ce solide, supposé invariablement lié au solide 3, subit de la part de forces extérieures ayant pour fonction potentielle Ψ. Dans le cas où le solide déprime le fluide 1, le sens de ces actions doit être changé.*

3° ACTIONS DU TROISIÈME GROUPE. — *Pour les obtenir, on applique une force, de grandeur $A_{12}\,d\lambda$, à chaque élément de la ligne λ suivant laquelle la surface de niveau S coupe le solide; cette force est normale à l'élément $d\lambda$, tangente à la surface S, et dirigée de l'intérieur du solide vers l'extérieur.*

Dans le cas où les forces extérieures agissantes se réduisent à la pesanteur, les actions du troisième groupe n'ont pas de composante verticale; pour calculer la poussée verticale éprouvée par le solide, il suffit de tenir compte des actions des deux premiers groupes; on retrouve alors un théorème que Laplace avait donné pour un corps

cylindrique à axe vertical, que Poisson avait étendu à un corps de révolution à axe vertical, et que E. Mathieu avait démontré d'une manière entièrement générale.

Non seulement, dans ce cas, les actions du troisième groupe n'ont pas de composante verticale, mais encore on démontre aisément qu'elles se font équilibre; l'action du fluide sur le corps solide se réduit donc à la poussée verticale calculée par Laplace, Poisson et E. Mathieu; ce théorème n'avait pas été démontré jusqu'ici, du moins à notre connaissance.

Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants;

PAR M. P. DUHEM.

INTRODUCTION, HISTORIQUE.

On sait que l'équilibre d'un corps flottant sur un liquide pesant est assuré lorsque le flotteur déplace un volume liquide aussi pesant que lui et que les deux centres de gravité du flotteur et du liquide déplacé sont sur une même verticale (*axe primitif*). Mais cet équilibre est-il stable?

Bouguer est le premier géomètre qui ait cherché à approfondir cette question. Il se borna à examiner le cas où le flotteur est symétrique par rapport à un plan qui demeure vertical pendant le mouvement; il supposa que le volume du liquide déplacé restait constant et démontra que la stabilité dépendait de la position d'un point particulier qu'il nomma *métacentre*. Ce point est l'intersection de l'axe primitif avec la direction de la résultante de la poussée du fluide après un déplacement infiniment petit. Si ce point est au-dessus du centre de gravité du corps, les forces tendront à ramener le corps à sa première position; elles tendront à l'en éloigner dans le cas contraire. L'équilibre est donc stable ou instable suivant que le métacentre est au-dessus ou au-dessous du centre de gravité du corps flottant. Telle est la condition de stabilité donnée par Bouguer et qui a été longtemps admise sans contestation.

Le raisonnement de Bouguer manquait entièrement de généralité;

non seulement il supposait que le plan de symétrie du corps demeurait vertical durant les oscillations effectuées par ce corps, mais, en outre, il supposait que le volume immergé demeurait invariable.

Duhamel ([1]) appela le premier l'attention sur le caractère arbitraire d'une pareille restriction.

« La supposition, dit-il, de la constance du volume déplacé, a dû paraître bientôt trop restreinte; car, comment admettre que la cause qui produit le dérangement ne puisse changer que l'inclinaison? On a reconnu d'ailleurs que, lors même que cette circonstance aurait lieu au commencement, elle ne subsisterait pas pendant toute la durée du mouvement, excepté dans le cas très particulier où le centre de gravité de la section à fleur d'eau serait situé sur l'axe primitif.

» On ne pouvait donc plus, en restant dans la généralité de la question, se dispenser d'avoir égard à la fois à la variation du volume et à celle de l'inclinaison; et c'est ce que l'on a fait. Mais ce que l'on n'a pas vu, c'est qu'alors le métacentre devenait un point complètement indéterminé, qui dépendait du rapport des deux variations et qui pouvait occuper toutes les positions de l'axe primitif.

» Le raisonnement de Bouguer, que l'on a reproduit, prouverait donc à volonté la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre du même corps, suivant la nature du dérangement primitif, en exceptant toutefois le cas particulier où l'axe primitif contiendrait le centre de gravité de la section à fleur d'eau. Cette conséquence absurde du genre de raisonnement suivi depuis Bouguer en rend l'insuffisance évidente et oblige de recourir aux équations du mouvement, même dans le cas d'un corps symétrique par rapport à un plan vertical. »

Duhamel se propose de former ces équations, en considérant toujours le cas d'un corps flottant symétrique dont le plan de symétrie demeure vertical; il suppose également que la surface du liquide demeure horizontale. Pour étudier le mouvement du flotteur, on peut faire abstraction de la présence du liquide, à condition d'appliquer au corps solide des forces de liaison convenablement choisies qui sont les

---

([1]) Duhamel, *Note sur divers principes de Mécanique : Observations sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIVe Cahier, t. XV, p. 12; 1835.)

pressions du liquide sur le solide. *Duhamel admet que ces pressions peuvent être déterminées d'après les règles de l'Hydrostatique,* telles qu'elles ont été établies par Archimède. Il forme alors les équations différentielles du mouvement du corps et, cherchant la condition pour que ce mouvement demeure toujours très petit, il retrouve ainsi la condition donnée par Bouguer, à savoir que le métacentre doit se trouver au-dessus du centre de gravité du corps. « En résumé, conclut-il, la théorie que l'on a donnée jusqu'ici de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, par la considération du métacentre, renferme des inexactitudes qui ne permettent plus de la conserver. Néanmoins, la condition à laquelle elle conduit est conforme à celle qu'une analyse exacte aurait fait connaître, et c'est précisément pour cela que l'erreur est restée si longtemps inaperçue. »

Plus tard, Poisson (1) et Duhamel (2) cherchèrent, par une méthode analogue, la condition de stabilité d'un flotteur de forme quelconque; en admettant encore que les pressions du liquide sur le solide pouvaient être déterminées par les règles de l'Hydrostatique, et en faisant usage du principe des forces vives, ils parvinrent au théorème suivant :

L'équilibre peut être encore stable lorsque le centre de gravité du corps est au-dessus de celui du fluide déplacé; il suffit que la distance de ces deux points soit moindre que le plus petit des moments d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport aux droites menées par son centre de gravité, divisé par le volume immergé.

Cette règle peut encore s'énoncer d'une autre manière.

Donnons au flotteur toutes les positions pour lesquelles le poids du liquide déplacé est précisément égal au poids du corps flottant; marquons, dans le corps, le centre de poussée correspondant à chacune de ces positions; ces centres de poussée dessinent une surface, considérée par Dupin, et nommée *surface des centres de carène;* on sait que la verticale passant par le centre de gravité d'un flotteur en équilibre est normale à la surface des centres de carène.

---

(1) POISSON, *Traité de Mécanique*, t. II, p. 579 (2e édition).
(2) DUHAMEL, *Cours de Mécanique*, t. II, p. 252.

Sur cette normale se trouvent deux centres de courbure principaux de la surface des centres de carène ; ces deux points se nomment les deux *métacentres* du flotteur ; le *petit métacentre* est celui qui se trouve le plus bas.

Ces définitions posées, la condition de stabilité donnée par Poisson et Duhamel peut s'énoncer ainsi : *Le centre de gravité du flotteur doit être au-dessous du petit métacentre*.

Cette règle avait été également donnée par Bravais [1] ; mais Bravais s'était borné à examiner le cas où le flotteur possède deux plans de symétrie rectangulaires et où les déplacements imposés au flotteur n'altèrent pas le volume immergé. Après avoir énoncé la règle précédente, Bravais ajoute : « Ce serait une erreur de croire que, conformément à un principe bien connu de Mécanique, le centre de gravité du flotteur est le plus bas possible dans la position d'équilibre stable ; ce serait mal entendre le principe de Mécanique auquel nous faisons allusion ; mais le centre de gravité du système formé par le flotteur et le liquide environnant doit être et est, en effet, le plus bas possible dans l'équilibre stable, comme il nous sera actuellement facile de le démontrer. » Bravais démontre cette proposition en supposant le niveau du liquide maintenu horizontal et le volume immergé maintenu invariable.

Poisson et Duhamel avaient écrit et intégré les équations des oscillations infiniment petites d'un corps flottant dans le cas où le flotteur admet un plan de symétrie qui demeure vertical pendant le mouvement et où toutes les vitesses initiales sont nulles. M. C. Jordan [2] se proposa de traiter dans toute sa généralité le problème des petits mouvements d'un flotteur. Pour mettre ce problème en équation, M. C. Jordan reprit l'hypothèse fondamentale déjà admise par Poisson et par Duhamel, à savoir que l'on pouvait faire abstraction de l'existence du liquide à la condition d'appliquer à la surface du corps des

---

(1) Auguste Bravais, *Sur l'équilibre des corps flottants*, Thèse de Mécanique soutenue devant la Faculté des Sciences de Lyon le 5 octobre 1837. Paris, 1840.

(2) C. Jordan, *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*. (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série II, tome I, p. 170 ; 1867.)

pressions *données à chaque instant par les principes de l'Hydrostatique;* voici comment M. C. Jordan énonce ces hypothèses :

« Nous supposerons que la surface du liquide est assez étendue pour que son niveau ne soit pas altéré par les oscillations du flotteur; qu'elle reste plane pendant toute la durée du mouvement; enfin, que la poussée du liquide sur le flotteur à un instant quelconque est précisément la même que si tout le système était maintenu au repos. »

M. C. Jordan ajoute : « Ces hypothèses ne sont pas parfaitement exactes; on conçoit, en effet, qu'il est impossible que le flotteur, en oscillant, ne communique pas quelque mouvement au liquide qui l'entoure et que, d'autre part, l'état de ce mouvement devra modifier les réactions qui se produisent; mais ces causes perturbatrices, qui ne paraissent pas susceptibles d'être soumises à un calcul précis, diminuent évidemment en même temps que l'amplitude et la vitesse des oscillations; et dans le cas limite où le déplacement et la vitesse initiale sont infiniment petits tous les deux, elles deviennent négligeables. »

Les suppositions fondamentales sur lesquelles repose l'analyse de M. C. Jordan sont les mêmes que celles de Duhamel et de Poisson; on ne doit donc pas s'étonner qu'il retrouve la condition de stabilité indiquée par ces géomètres.

Ces suppositions fondamentales avaient été très vivement critiquées par Clebsch [1]; parlant des recherches de Poisson et de Duhamel sur les petites oscillations des corps flottants, il ajoute : « Les équations qu'ils ont données reposent sur l'hypothèse que, pendant les mouvements infiniment petits du corps, on peut remplacer la pression hydrodynamique par la pression hydrostatique. Or, les deux pressions diffèrent entre elles de termes qui sont du même ordre que les vitesses que l'on a à considérer. Par conséquent, on voit qu'il n'est pas permis de négliger cette différence. En effet, les pressions hydrostatiques s'annulent les unes les autres à un infiniment petit près, puisque le corps qui éprouve des mouvements est dans une position infiniment voisine de la position d'équilibre. Au contraire, en ce qui concerne les pressions hydrodynamiques qui sont produites par le mouvement, il

---

[1] CLEBSCH, *Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper*. (*Journal de Crelle*, Bd. LVII, p. 149; 1860.)

n'existe aucune destruction de ce genre; d'une manière générale, elles s'opposent en chaque point au mouvement du corps; l'action de ces forces est évidemment du même ordre que l'action totale des pressions hydrostatiques.

» Les considérations qui précèdent suffisent à montrer que les équations ordinaires du mouvement d'un corps flottant ne sont pas simplement insuffisantes et en quelque sorte réduites à la première approximation, mais qu'elles sont nécessairement fausses en ce qu'elles négligent des termes qui sont du même ordre que les termes conservés et qui parfois les surpassent, ainsi qu'il arrive lorsqu'on étudie le mouvement qu'un corps de révolution, d'axe vertical, peut prendre autour de cet axe. »

Après avoir formulé ces critiques, Clebsch cherche, à son tour, à donner une théorie satisfaisante des oscillations infiniment petites des corps flottants. Les considérations auxquelles il se livre l'amènent à écrire six équations pour déterminer comment varient, en fonctions du temps, les trois translations ξ, η, ζ et les trois rotations φ, ψ, ϑ, en lesquelles peut se décomposer le mouvement du flotteur; ces équations ont l'aspect d'équations différentielles linéaires à coefficients constants; mais le premier membre de chacune de ces égalités, au lieu d'être formé par un nombre limité de termes et de contenir les dérivées de la fonction inconnue seulement jusqu'à un certain ordre, est une série renfermant les dérivées de tous les ordres pairs de la fonction inconnue. A ces équations, Clebsch applique des considérations semblables à celles qui servent à intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients constants; il cherche à les vérifier par des expressions de la forme

$$\xi = \xi_0 e^{\sigma t}, \qquad \eta = \eta_0 e^{\sigma t}, \qquad \ldots,$$

ξ_0, η_0, ..., σ étant des constantes. Le carré de la constante σ est déterminé par une certaine équation transcendante

$$f(\sigma^2) = 0.$$

Clebsch en conclut le théorème suivant :

« *L'équilibre d'un corps flottant est stable dans le cas suivant et*

seulement dans ce cas : c'est le cas où toutes les valeurs de σ^2 *qui résultent de l'équation*

$$f(\sigma^2) = 0$$

sont négatives. Cette équation dépend de la forme et de la position du corps, mais non des mouvements étrangers que le liquide possédait initialement. »

Sans vouloir examiner ici jusqu'à quel point les équations du mouvement d'un corps flottant, données par Clebsch, peuvent être assimilées à des équations différentielles linéaires à coefficients constants, nous ferons remarquer que la méthode suivie par Clebsch pour obtenir la condition de stabilité d'un corps flottant renferme un cercle vicieux; ce cercle est celui que Lejeune-Dirichlet a déjà signalé dans la démonstration donnée par Lagrange pour établir qu'un système est en équilibre stable lorsque son potentiel a une valeur minima. Pour former les équations du mouvement, Clebsch suppose que le corps demeure toujours infiniment voisin de sa position d'équilibre, c'est-à-dire que l'équilibre est stable; des équations qui renferment implicitement cette hypothèse ne peuvent servir à discuter si l'équilibre est stable ou instable. La méthode de Clebsch suffit à prouver que, lorsque l'équilibre est stable, la fonction $f(\sigma^2)$ ne s'annule pour aucune valeur réelle de σ; elle ne permet pas de démontrer la proposition réciproque.

Clebsch ne forme pas la fonction qu'il désigne par $f(\sigma^2)$; en sorte que, bien qu'il affirme l'existence d'une distinction essentielle entre la règle de stabilité imaginée par Poisson et par Duhamel et celle qu'il propose, on ne voit pas que cette distinction soit établie dans son Mémoire. Un calcul complet lui aurait montré que cette distinction n'est qu'apparente.

Pour éviter l'objection que l'on peut adresser à la méthode de Clebsch, une seule voie se présente; elle consiste à faire usage du principe si rigoureusement démontré par Lejeune-Dirichlet, et à chercher les conditions de stabilité du système en cherchant à rendre minimum le potentiel des actions auxquelles il est soumis.

Plusieurs essais ont été tentés dans cette voie. Nous laisserons de

côté ceux de Moseley ([1]) et de Duhil de Benazé et Risbec ([2]), qui n'ont apporté aucun progrès à la solution du problème de la stabilité des corps flottants soumis à des déplacements infiniment petits, et nous aborderons de suite les recherches de M. Guyou ([3]).

M. Guyou considère un flotteur immergé dans une cuve de *dimensions limitées;* il cherche à quelle condition le potentiel de ce système sera minimum, ou, ce qui revient au même pour un système soumis exclusivement à l'action de la pesanteur, à quelle condition le centre de gravité de ce système sera aussi bas que possible; par des démonstrations géométriques très simples et très élégantes qui rappellent les méthodes suivies par Bravais dans sa thèse de Mécanique, M. Guyou établit cette condition, qui est indépendante des dimensions de la cuve et qui, par conséquent, assurera encore la stabilité de l'équilibre du flotteur sur un liquide illimité; cette condition se trouve être précisément celle qu'avaient indiquée Poisson et Duhamel.

Les raisonnements de M. Guyou nous semblent cependant affectés d'une erreur qui en vicie les conclusions; comme cette erreur est assez délicate à apercevoir, nous croyons nécessaire d'y insister quelque peu.

M. Guyou démontre, en premier lieu, que si la surface libre du liquide n'était pas horizontale, on pourrait la déformer de manière à abaisser le centre de gravité du système, et cela sans déplacer le flotteur ni changer la partie de sa surface qui est immergée.

Il démontre, en second lieu, que si le poids du liquide déplacé n'était pas égal au poids du flotteur, une translation verticale convenablement choisie de ce dernier abaisserait le centre de gravité du système.

Il démontre, en troisième lieu, que si le centre de gravité du flotteur

---

([1]) MOSELEY, *On the dynamical stability and the oscillation of floating bodies* (*Philosophical Transactions;* 1850). *Voir* aussi : SIR E.-J. REED, *The stability of ships.*

([2]) DUHIL DE BENAZÉ et RISBEC, *Mémoire sur le mouvement complet du navire oscillant sur eau calme* (*Mémorial du Génie maritime,* 10e liv., 1874; p. 175). *Voir* aussi : POLLARD et DUDEBOUT, *Théorie du Navire,* t. II, p. 329. Paris, 1891.

([3]) E. GUYOU, *Théorie nouvelle de la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Revue maritime,* mars 1879, p. 682). — *Théorie du Navire,* p. 25. Paris, 1887.

n'était pas sur la même verticale que le centre de poussée et au-dessous des métacentres, on pourrait, par un déplacement qui n'altérerait pas le volume immergé, abaisser le centre de gravité du système.

De là, M. Guyou ([1]) conclut que, pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable, il est nécessaire et *suffisant :*

1° Que la surface libre du liquide soit horizontale;

2° Que le poids du liquide déplacé soit égal au poids du flotteur;

3° Que le centre de gravité du flotteur et le centre de poussée soient sur une même verticale;

4° Que le centre de gravité du flotteur soit au-dessous des métacentres.

Il est bien clair que la nécessité de ces conditions pour assurer sinon que l'équilibre est stable, du moins que le centre de gravité du système est le plus bas possible, découle des propositions établies par M. Guyou; mais ces propositions ne nous semblent pas prouver que les conditions dont il s'agit *suffisent* à assurer la stabilité de l'équilibre.

M. Guyou n'indique pas explicitement comment il a été amené à conclure que ces conditions sont suffisantes; mais un passage de son Livre ([2]) nous met sur la voie qui permet de reconstituer sa pensée; voici ce passage :

« Pour amener à une position quelconque le système composé du flotteur et du liquide supposés primitivement en équilibre, on peut d'abord donner au flotteur l'orientation considérée en le maintenant isocarène dans le liquide en repos; conservant ensuite cette orientation, on l'élèvera ou on l'abaissera de la quantité nécessaire, et l'on donnera enfin au liquide son dénivellement. »

Guidés par ce passage, nous pensons pouvoir reconstituer, de la manière suivante, le raisonnement qui a sans doute conduit M. Guyou à énoncer la proposition que nous discutons :

Notre système, formé d'une masse liquide et d'un flotteur, est défini par certaines variables indépendantes, en nombre limité ou illi-

---

([1]) GUYOU, *Théorie du Navire,* p. 30.

([2]) *Ibid.*, p. 31.

mité. Les conditions précédemment énoncées suffiront à assurer la stabilité de l'équilibre du système si, grâce à elles, la variation infiniment petite la plus générale de ces variables devient incapable d'abaisser le centre de gravité du système.

Or, la variation infiniment petite la plus générale de ces variables indépendantes peut toujours être regardée comme le résultat de trois autres variations infiniment petites des mêmes variables :

1° Une variation infiniment petite qui change l'orientation du flotteur sans altérer le volume immergé ni le niveau du liquide;

2° Une variation infiniment petite qui déplace verticalement le flotteur et le niveau du liquide, en laissant plan ce dernier;

3° Une variation infiniment petite qui déforme la surface du liquide sans déplacer le flotteur.

Chacune de ces variations partielles est incapable, lorsque les conditions énoncées sont vérifiées, d'abaisser le centre de gravité du système.

Mais, *lorsque des variations infiniment petites des variables qui fixent un système sont isolément incapables d'abaisser le centre de gravité du système, la variation infiniment petite que l'on obtient en les composant n'abaisse certainement pas le centre de gravité du système.*

Donc la variation infiniment petite la plus générale des variables qui fixent un système formé d'un liquide et d'un flotteur, ne peut abaisser le centre de gravité du système lorsque les quatre conditions énoncées sont vérifiées, en sorte que ces conditions assurent la stabilité de l'équilibre du système.

Ce raisonnement renferme une proposition sujette à critiques; c'est celle que nous avons mise en italiques.

En général, *cette proposition est exacte;* soient, en effet, $\alpha, \beta, \ldots$ les variables indépendantes qui fixent un système et ζ la cote du centre de gravité de ce système; si les variables $\alpha, \beta, \ldots$ éprouvent une variation infiniment petite $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots$, la cote ζ du centre de gravité éprouve une variation qui peut, en général, se mettre sous la forme

$$\delta\zeta = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots, \tag{1}$$

A, B, ... étant des fonctions finies de $\alpha, \beta, \ldots$.

Imaginons alors qu'une première variation infiniment petite $\delta'\alpha$, $\delta'\beta$, ... soit incapable d'abaisser le centre de gravité du système; nous aurons

$$(2) \qquad \delta'\zeta = A\,\delta'\alpha + B\,\delta'\beta + \dots \geqq 0;$$

imaginons qu'une seconde variation infiniment petite $\delta''\alpha$, $\delta''\beta$, ... soit incapable d'abaisser le centre de gravité du système; nous aurons

$$(2\ bis) \qquad \delta''\zeta = A\,\delta''\alpha + B\,\delta''\beta + \dots \geqq 0;$$

....

Composons entre elles ces variations infiniment petites; nous obtiendrons une variation résultante

$$\Delta\alpha = \delta'\alpha + \delta''\alpha + \dots,$$
$$\Delta\beta = \delta'\beta + \delta''\beta + \dots,$$

....

qui fera varier la cote du centre de gravité de

$$(3) \qquad \Delta\zeta = A(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \dots) + B(\delta\beta + \delta'\beta + \dots) + \dots.$$

Les égalités (2), (2 *bis*), ... et (3) permettront d'écrire

$$\Delta\zeta = \delta'\zeta + \delta''\zeta + \dots \geqq 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Mais CETTE PROPOSITION DEVIENT INEXACTE DANS CERTAINS CAS EXCEPTIONNELS; *ce sont ceux où les valeurs de* α, β, ... *sont telles que toute variation infiniment petite du premier ordre imposée à ces variables entraîne une variation de la cote du centre de gravité qui est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.*

Imaginons, par exemple, que $\delta\zeta$ soit un infiniment petit du second ordre lorsque $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... sont des infiniment petits du premier ordre;

nous devrons remplacer l'égalité (1) par une égalité telle que

$$(4)\qquad \delta\zeta = a_{11}(\delta\alpha)^2 + a_{22}(\delta\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\,\delta\alpha\,\delta\beta + \ldots,$$

les quantités a_{ij} étant finies; les égalités et inégalités (2) et (2 *bis*) seront remplacées par

$$(5)\qquad \delta'\zeta = a_{11}(\delta'\alpha)^2 + a_{22}(\delta'\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\,\delta'\alpha\,\delta'\beta + \ldots \geqq 0,$$

$$(5\ bis)\qquad \delta''\zeta = a_{11}(\delta''\alpha)^2 + a_{22}(\delta''\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\,\delta''\alpha\,\delta''\beta + \ldots \geqq 0.$$

Nous aurons également dans ce cas, au lieu de l'égalité (3),

$$\Delta\zeta = a_{11}(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \ldots)^2 + a_{22}(\delta'\beta + \delta''\beta + \ldots)^2 + \ldots$$
$$+ 2a_{12}(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \ldots)(\delta'\beta + \delta''\beta + \ldots) + \ldots.$$

On voit alors sans peine que les égalités ou inégalités (5) et (5 *bis*) n'entraînent pas nécessairement l'égalité ou inégalité

$$\Delta\zeta \geqq 0.$$

Or, c'est précisément dans un cas exceptionnel de ce genre que M. Guyou paraît avoir fait usage de la proposition en question; parmi les quatre conditions qu'il énonce, les trois premières expriment que la variation éprouvée par la cote du centre de gravité est un infiniment petit d'ordre supérieur aux variations infiniment petites des variables indépendantes.

Cette discussion montre que les raisonnements de M. Guyou ne permettent pas d'affirmer que les conditions par lui énoncées sont suffisantes pour assurer l'équilibre d'un système formé par un fluide et un corps flottant; nous verrons d'ailleurs, au cours du présent travail, que ces conditions suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant sur un fluide *limité;* mais c'est à des circonstances toutes spéciales que le raisonnement de M. Guyou, inexact en général, doit son succès dans ce cas particulier ([1]).

([1]) Une étude analogue à celle de M. Guyou aurait été faite par Moreau (*Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement des corps flottants;* Brest, 1830). Il nous a été impossible de nous procurer cet Ouvrage, que nous citons d'après la *Théorie du navire* de MM. Pollard et Dudebout.

Cet exposé rapide nous montre que les conditions de stabilité d'un corps flottant sont loin d'être encore établies d'une manière certaine et rigoureuse, même dans le cas simple où le fluide et le flotteur sont soumis seulement à l'action de la pesanteur. Quant au cas plus général où le fluide et le flotteur sont soumis à des forces extérieures admettant une fonction potentielle quelconque, il est demeuré jusqu'ici inabordé.

C'est ce problème général que nous nous sommes proposé de traiter.

Nous avons composé le potentiel d'un système formé par un solide et un fluide, et nous avons cherché à quelles conditions le potentiel de ce système avait une valeur minima.

On sait, par la belle et rigoureuse démonstration de Lejeune-Dirichlet, que tout état où le potentiel d'un système a une valeur minima est un état d'équilibre stable; la réciproque de cette proposition est-elle vraie? N'y a-t-il pas d'autres états d'équilibre stable que ceux qui correspondent à une valeur minima du potentiel?

Cette réciproque est vraisemblable; toutefois, elle n'a pas été démontrée jusqu'ici d'une manière entièrement rigoureuse, et elle est généralement admise à titre de postulat.

Bien que ce postulat ne paraisse pas susceptible d'être démontré dans l'état actuel de la Mécanique, il nous semble que l'on peut le déduire, *du moins pour les systèmes dépourvus de frottement et de viscosité,* d'une autre proposition plus simple et dont l'acceptation s'impose plus aisément à l'esprit; cette proposition est la suivante :

Un état d'équilibre stable d'un système ne peut cesser d'être stable parce qu'on introduit dans le système de nouvelles liaisons indépendantes du temps.

Avant d'exposer cette déduction, quelques remarques sont nécessaires.

Considérons un système défini par n variables indépendantes α, β, ..., λ. Prenons un état initial $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$ de ce système.

Faisons ensuite choix d'une variable θ et de n fonctions $a(\theta)$,

$b(\theta), \ldots, l(\theta)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Pour $\theta = \theta_0$, on a

$$a(\theta_0) = \alpha_0, \quad b(\theta_0) = \beta_0, \quad \ldots, \quad l(\theta_0) = \lambda_0.$$

2° Lorsque θ croît à partir de θ_0, les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$ demeurent finies, continues et uniformes, du moins tant que θ ne surpasse pas une certaine limite ; de plus, les dérivées $\frac{d\,a(\theta)}{d\theta}$, $\frac{d\,b(\theta)}{d\theta}$, ..., $\frac{d\,l(\theta)}{d\theta}$ sont finies.

Si nous posons

$$(6) \qquad \alpha = a(\theta), \quad \beta = b(\theta), \quad \ldots, \quad \lambda = l(\theta),$$

nous définirons une suite linéaire et continue d'états du système partant de l'état $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$ ou, en d'autres termes, une modification virtuelle finie issue de l'état $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0$.

Cela posé, imaginons que le potentiel thermodynamique

$$\Phi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$$

du système ne soit pas minimum pour $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, ..., $\lambda = \lambda_0$.

Il est possible d'imaginer au moins une modification virtuelle finie, issue de l'état $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, le long de laquelle la fonction

$$\Phi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$$

commence par ne pas croître. En d'autres termes, on doit pouvoir, au moins d'une manière, choisir les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$, qui figurent dans les égalités (6), de manière que, pour toute valeur de θ supérieure à θ_0 et inférieure à une certaine limite Θ qui surpasse θ_0 d'une quantité finie, on ait

$$(7) \qquad \Phi[a(\theta), b(\theta), \ldots, l(\theta)] - \Phi(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0) \leqq 0.$$

Considérons une de ces manières de choisir les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$. Écrivons les égalités (6) ; entre ces égalités, éliminons

la variable θ ; nous trouvons les $(n-1)$ relations

$$(8)\qquad \begin{cases} f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0, \\ g(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Si nous imposons au système les $(n-1)$ liaisons bilatérales, indépendantes du temps, exprimées par les relations (8), nous le transformons en un système à liaisons complètes, ne dépendant plus que du seul paramètre θ ; nous pourrons, en outre, imposer à ce système la liaison unilatérale et indépendante du temps

$$(9)\qquad \theta > \theta_0.$$

Le potentiel thermodynamique du système deviendra une simple fonction de θ,

$$\Psi(\theta) = \Phi[a(\theta), b(\theta), \ldots, l(\theta)]$$

et l'égalité ou inégalité (7) pourra s'écrire

$$(10)\qquad \Psi(\theta) - \Psi(\theta_0) \leqq 0.$$

Prenons le système dans l'état initial $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, où θ_0, et donnons à $\frac{d\theta}{dt}$ une valeur initiale v_0 qui soit *positive;* les divers points du système seront animés de vitesses initiales qui seront compatibles avec les liaisons (8) et (9); le système va prendre un mouvement que le principe des forces vives suffira à mettre en équation.

La force vive du système peut se mettre sous la forme $F(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, la fonction $F(\theta)$ demeurant comprise entre deux limites positives M et m lorsque θ varie entre θ_0 et Θ.

Le principe des forces vives nous donne alors

$$(11)\qquad F(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = F(\theta_0)v_0^2 = [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)].$$

Cette égalité nous apprend tout d'abord que, tant que θ demeurera

compris entre θ_0 et Θ, $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut s'annuler; en effet, le premier terme du second membre est essentiellement positif et le second ne peut être négatif, d'après (10). La quantité $\frac{d\theta}{dt}$ ne pouvant changer de signe sans passer par 0, on voit que cette quantité, positive au début du mouvement, demeurera positive tant que θ n'aura pas franchi la limite Θ.

Si nous convenons de ne considérer que la partie du mouvement pendant laquelle θ n'a pas encore franchi la limite Θ, nous pourrons écrire l'égalité (11) sous la forme

$$dt = d\theta \sqrt{\frac{F(\theta)}{F(\theta_0) v_0^2 + [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}}, \tag{12}$$

le radical étant pris en valeur absolue.

Le système, partant de l'état caractérisé par la valeur θ_0 du paramètre variable, atteindra pour la première fois l'état caractérisé par la valeur Θ du même paramètre au bout d'un temps

$$T = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{\frac{F(\theta)}{F(\theta_0) v_0^2 + [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}}\, d\theta. \tag{13}$$

On voit sans peine que l'égalité (13) permet d'écrire

$$T \leqq \sqrt{\frac{M}{F(\theta_0)}}\, \frac{\Theta - \theta_0}{v_0}. \tag{14}$$

Ainsi, quelle que soit la valeur initiale donnée de v_0, on pourra fixer un temps fini au bout duquel le système aura passé au moins une fois tous les états caractérisés par des valeurs du paramètre variable comprises entre θ_0 et Θ.

Cette proposition démontre que l'état θ_0, ou $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, n'est pas un état d'équilibre stable pour le système soumis aux liaisons (8) et (9); dès lors, d'après le principe que nous avons admis, ce ne peut être non plus un état d'équilibre stable pour le système non soumis à ces liaisons et nous arrivons ainsi à la proposition suivante, réci-

proque du théorème de Lejeune-Dirichlet :

Un état où le potentiel thermodynamique d'un système n'a pas une valeur minima ne peut être, pour ce système, un état d'équilibre stable.

C'est sur cette proposition que nous allons nous appuyer, en même temps que sur le théorème de Lejeune-Dirichlet, pour traiter de la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

Ce n'est cependant pas ce problème que nous traiterons en premier lieu; nous commencerons par étudier la stabilité de l'équilibre d'un système de fluides ne portant pas de flotteur; ce problème, plus simple que la question de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, la précède logiquement. La méthode employée, les résultats obtenus en étudiant les fluides qui ne portent pas de flotteur préparent l'étude des fluides qui portent un flotteur.

Ce que nous dirons ici au sujet de la stabilité d'un système composé exclusivement de fluides n'est pas entièrement inédit; après avoir amorcé cette question dans un premier travail ([1]), nous l'avons développée en partie dans le cours ([2]) que nous avons professé à la Faculté des Sciences de Lille, en 1890-1891; plus récemment, nous avons traité complètement ([3]) la stabilité de l'équilibre d'un nombre quelconque de fluides mélangés, question qui renferme comme cas particulier celle dont nous parlons en ce moment. Néanmoins, nous avons cru devoir traiter ici la stabilité de l'équilibre d'un système composé uniquement de fluides non mélangés, parce que ce problème, incomplètement résolu dans nos deux premières publications, se trouvait, dans la troisième, impliqué dans un problème plus général.

Après un premier Chapitre, consacré à la stabilité de l'équilibre de fluides qui ne portent pas de flotteur, un deuxième Chapitre traite des

([1]) *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrostatique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. IV, C. 1890).

([2]) *Hydrodynamique, élasticité, acoustique,* Liv. II, Chap. II. Paris, 1891.

([3]) *Dissolutions et mélanges;* premier Mémoire : *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille,* t. III. B. 1893).

conditions d'équilibre des corps flottants; c'est seulement alors que, toutes les propositions préliminaires étant établies, nous abordons, dans un troisième Chapitre, l'étude générale de la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

CHAPITRE I.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DE FLUIDES QUI NE PORTENT PAS DE FLOTTEUR.

I. — *Rappel des principes de l'Hydrostatique.*

Considérons un fluide ayant en tout point la même température; nous supposerons que l'état de ce fluide soit entièrement déterminé lorsqu'on connaît la forme de la surface qui le limite et la densité ρ en chaque point (x, y, z) de l'espace que cette surface enferme; cette densité est supposée fonction continue de x, y, z. Lorsque deux fluides différents sont en contact, la densité varie d'une manière discontinue à la traversée de la surface de contact.

Nous admettrons, ce qui implique certaines hypothèses que nous avons détaillées ailleurs ([1]), que le potentiel thermodynamique interne d'un système formé de deux semblables fluides 1 et 2 est donné par la formule suivante

$$\mathfrak{F} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\,dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\,dv_2, \tag{1}$$

la première intégrale s'étendant à tous les éléments de volume dv_1 du fluide 1 et la seconde intégrale s'étendant à tous les éléments de volume dv_2 du fluide 2; la fonction φ_1 et la fonction φ_2 sont deux fonctions analytiques différentes, caractéristiques des fluides 1 et 2.

Les forces extérieures appliquées au système sont de deux sortes :

1° Chaque élément dS de la partie déformable de la surface qui limite le système supporte une force dont les composantes sont

$$P\cos(P, x)\,dS, \quad P\cos(P, y)\,dS, \quad P\cos(P, z)\,dS.$$

([1]) P. Duhem, *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*. (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 183; 1893.)

2° Chaque élément de volume dv de l'un des fluides, élément dont la masse est $\rho\, dv$, est soumis à une force dont les composantes sont

$$\rho X\, dv, \quad \rho Y\, dv, \quad \rho Z\, dv.$$

Ces principes posés, on peut établir d'une manière très rigoureuse [1] les propositions suivantes, qui sont, pour la plupart, très anciennement connues, et qui sont les fondements de l'Hydrostatique :

1° Il existe une fonction Π_1, uniforme, finie, continue, douée de dérivées partielles, en tous les points du fluide 1 ; il existe une fonction Π_2 possédant les mêmes propriétés en tous les points du fluide 2.

La fonction Π_1 n'est négative en aucun point du fluide 1; la fonction Π_2 n'est négative en aucun point du fluide 2.

2° En tout point du fluide 1, on a

$$(2) \qquad \begin{cases} \rho_1 X = \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \\ \rho_1 Y = \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \\ \rho_1 Z = \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(3) \qquad \varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \Pi_1 = 0.$$

3° En tout point du fluide 2, on a

$$(2\ bis) \qquad \begin{cases} \rho_2 X = \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial x}, \\ \rho_2 Y = \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial y}, \\ \rho_2 Z = \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(3\ bis) \qquad \varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \Pi_2 = 0.$$

---

[1] P. DUHEM, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique,* cours professé à la Faculté des Sciences de Lille en 1890-1891, t. I, p. 60-80. Paris, 1891.

4° En tout point de la surface de contact S_{12} des fluides 1 et 2, on a

$$\Pi_1 = \Pi_2. \tag{4}$$

5° En tout point de la partie déformable S_1 de la surface qui sépare le fluide 1 de l'extérieur, on a

$$\left\{\begin{aligned} P\cos(P, x) &= \Pi_1 \cos(n_i, x), \\ P\cos(P, y) &= \Pi_1 \cos(n_i, y), \\ P\cos(P, z) &= \Pi_1 \cos(n_i, z), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

n_i étant la normale menée à la surface S_1 par le point considérée et dirigée vers l'intérieur du fluide 1.

6° En tout point de la partie déformable S_2 de la surface qui sépare le fluide 2 de l'extérieur, on a

$$\left\{\begin{aligned} P\cos(P, x) &= \Pi_2 \cos(n_i, x), \\ P\cos(P, y) &= \Pi_2 \cos(n_i, y), \\ P\cos(P, z) &= \Pi_2 \cos(n_i, z). \end{aligned}\right. \tag{5 bis}$$

D'après l'égalité (3), la densité ρ_1, en un point du premier fluide, dépend uniquement de la pression Π_1 en ce point; écrivons abréviativement l'égalité (3)

$$\rho_1 = F_1(\Pi_1). \tag{6}$$

Moyennant cette égalité (6), les égalités (2) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} F_1(\Pi_1)X &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \\ F_1(\Pi_1)Y &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \\ F_1(\Pi_1)Z &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Désignons par V_1 une fonction uniforme, finie et continue des coor-

données x_1, y_1, z_1 d'un point de l'espace occupé par le fluide 1, telle que l'on ait

$$\frac{1}{F_1(\Pi_1)} d\Pi_1 + dV_1 = 0. \tag{8}$$

Cette fonction V_1 sera définie à une constante près. Les égalités (7) deviendront alors

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dV_1 = 0, \tag{9}$$

en sorte que l'on aura, en tout point du fluide 1,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Écrivons de même l'égalité (2 *bis*) sous la forme

$$\rho_2 = F_2(\Pi_2).$$

Désignons par V_2 une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x_2, y_2, z_2 d'un point de l'espace occupé par le fluide 2, définie, à une constante près, par l'égalité

$$\frac{1}{F_2(\Pi_2)} d\Pi_2 + dV_2 = 0. \tag{8 bis}$$

Nous aurons alors, en tout point du fluide 2,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dV_2 = 0, \tag{9 bis}$$

en sorte que les fonctions X, Y, Z vérifieront encore les égalités (10) en tout point de l'espace occupé par le fluide 2.

Les fonctions X, Y, Z, vérifiant les égalités (10) en tout point du système, il existe une fonction V des coordonnées d'un point du système, variable d'une manière continue dans tout l'espace occupé par

le système, telle que l'on ait

$$(11)\quad \begin{cases} X + \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ Y + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ Z + \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Seulement, si l'espace occupé par le système n'est pas simplement connexe, cette fonction peut n'être pas uniforme. Cette fonction est d'ailleurs définie à une constante près.

Dans l'espace occupé par le fluide 1, les deux fonctions V et V_1 sont continues et ont les mêmes dérivées partielles; elles ne diffèrent donc que par une constante, en sorte que l'on a

$$V = V_1 + C_1.$$

D'ailleurs la fonction V_1 est une fonction uniforme des coordonnées d'un point de l'espace occupé par le fluide 1; la fonction V demeure donc uniforme si le point (x, y, z) auquel elle se rapporte varie seulement à l'intérieur du fluide 1.

Des considérations analogues s'appliquent au fluide 2.

Ainsi, pour que des forces extérieures puissent maintenir en équilibre un système formé d'un certain nombre de fluides, il faut qu'elles admettent une fonction potentielle V en tout point de l'espace occupé par ces fluides. Cette fonction potentielle n'est pas forcément uniforme dans tout l'espace occupé par le système; mais elle est uniforme dans chaque espace partiel qu'occupe chacune des masses fluides connexes qui composent le système.

On voit, par conséquent, que les surfaces qui limitent les divers fluides connexes ou les séparent les uns des autres forment autant de surfaces-coupures, transformant la fonction continue, mais non forcément uniforme, V en un groupe de fonctions V_1, V_2, ..., V_n, séparément uniformes et continues, mais ne se raccordant pas l'une à l'autre avec continuité.

L'égalité (8) donne

$$V_1 = \Phi_1(\Pi_1) \tag{12}$$

ou, en résolvant cette équation par rapport à Π_1,

$$\Pi_1 = G_1(V_1). \tag{13}$$

La fonction $G_1(V_1)$ est une fonction uniforme de V_1; en effet, la fonction $F_1(\Pi_1)$, qui est égale à la densité ρ_1 du fluide 1, est essentiellement positive; l'égalité (8) montre alors que V_1 diminue constamment lorsque Π_1 augmente, en sorte qu'une valeur de V_1 ne peut correspondre à plus d'une valeur de Π_1.

Chacune des surfaces définies, à l'intérieur du fluide 1, par une équation telle que

$$V_1 = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même, telle que

$$V = \text{const.},$$

est alors une surface d'égale pression; elle est aussi, d'après l'égalité (6), une surface d'égale densité. Une telle surface se nomme, comme on sait, une *surface de niveau*.

Lorsqu'une partie déformable de la surface qui limite le système fluide est soumise à une pression uniforme et donnée P_0, cette portion de surface prend le nom de *surface libre*.

Si nous considérons une surface libre connexe, confinant, par exemple, au fluide 1, on aura, en tout point de cette surface, $\Pi_1 = P_0$, et, par conséquent, V_1 aura, en tout point de cette surface, la valeur constante $\Phi_1(P_0)$; d'où le théorème suivant :

Toute portion connexe de surface libre est située dans une même surface de niveau.

Si la surface libre d'un système liquide se compose de plusieurs parties différentes, non connexes entre elles mais confinant avec une même masse fluide connexe 1, ces diverses parties seront encore si-

tuées dans une même surface de niveau ; si, au contraire, ces diverses portions de surface libre ne confinent pas à une même masse fluide connexe, elles pourront être situées dans des surfaces de niveau différentes.

En tout point de la surface de séparation de deux fluides continus 1 et 2, on doit avoir

$$\Pi_1 = \Pi_2. \tag{4}$$

On a, d'ailleurs,

$$\Pi_1 = G_1(V_1), \tag{13}$$
$$\Pi_2 = G_2(V_2). \tag{13 bis}$$

L'égalité (4) devient donc

$$G_1(V_1) - G_2(V_2) = 0. \tag{14}$$

Si donc dx, dy, dz sont les composantes d'un déplacement infiniment petit effectué sur la surface de séparation, on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\,G_1(V_1)}{dV_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}dx + \frac{\partial V_1}{\partial y}dy + \frac{\partial V_1}{\partial z}dz\right) \\ &- \frac{d\,G_2(V_2)}{dV_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}dx + \frac{\partial V_2}{\partial y}dy + \frac{\partial V_2}{\partial z}dz\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Mais, en tout point de la surface commune aux deux fluides, on a

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = -X = \frac{\partial V}{\partial x},$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial y} = -Y = \frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_2}{\partial z} = -Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

On a d'ailleurs, d'après les égalités (13) et (13 *bis*),

$$\frac{d\,G_1(V_1)}{dV_1}dV_1 + d\Pi_1 = 0,$$
$$\frac{d\,G_2(V_2)}{dV_2}dV_2 + d\Pi_2 = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (8) et (8 *bis*),

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\,G_1(V_1)}{dV_1} = F_1(\Pi_1), \\ \dfrac{d\,G_2(V_2)}{dV_2} = F_2(\Pi_2). \end{cases}$$

Si donc nous désignons par Π la valeur commune des pressions Π_1, Π_2, en un point de la surface S_{12}, l'égalité (15) deviendra

$$(17) \qquad [F_1(\Pi) - F_2(\Pi)]\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = 0.$$

Si, sous la pression Π qui règne à la surface de contact, les deux fluides n'ont pas la même densité, $F_1(\Pi)$ n'est pas égal à $F_2(\Pi)$ et l'équation (17) devient

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0.$$

En sorte que *toute portion connexe de la surface de contact de deux fluides de densité différente est une surface de niveau.*

Si, au contraire, les deux fluides ont la même densité, $F_1(\Pi)$ est égal à $F_2(\Pi)$; l'égalité (17) est satisfaite identiquement et la forme de la surface de contact est indéterminée.

Si deux fluides différents, 1 et 2, formant chacun une masse connexe, sont en contact le long de plusieurs surfaces séparées, on peut se demander si ces diverses surfaces sont ou ne sont pas dans une même surface de niveau.

Il n'est pas possible de donner une réponse entièrement générale à cette question. Toutefois, si l'un des fluides, le fluide 1 par exemple, est toujours plus dense que l'autre fluide, le fluide 2, quelles que soient les pressions ϖ_1, ϖ_2, sous lesquelles ces deux fluides sont pris (ces pressions étant, toutefois, comprises parmi celles qui sont réalisées au sein du système), on peut affirmer que les diverses parties de la surface de contact sont dans une même surface de niveau.

Imaginons, en effet, que S_{12}, S'_{12} soient deux parties différentes de la surface de contact; la première correspond à des valeurs V_1, V_2, Π des fonctions considérées dans ce qui précède; la seconde, à des va-

leurs V'_1, V'_2, Π' des mêmes fonctions. Nous aurons les égalités

$$G_1(V_1) - G_2(V_2) = 0, \tag{14}$$

$$G_1(V'_1) - G_2(V'_2) = 0. \tag{14 bis}$$

De ces égalités nous déduisons

$$G_1(V'_1) - G_1(V_1) - G_2(V'_2) + G_2(V_2) = 0$$

ou bien

$$\int_{V_1}^{V'_1} \frac{d\,G_1(v)}{dv}\,dv - \int_{V_2}^{V'_2} \frac{d\,G_2(v)}{dv}\,dv = 0. \tag{18}$$

Mais nous savons que l'on peut écrire, à l'intérieur du fluide 1,

$$V_1 = V - C_1,$$

C_1 étant une constante, et à l'intérieur du fluide 2,

$$V_2 = V - C_2,$$

C_2 étant une constante. La fonction V étant continue dans tout l'espace, nous concluons aisément de là que

$$V'_1 - V_1 = V'_2 - V_2.$$

L'égalité (18) peut alors s'écrire

$$(V'_1 - V_1)\left[\frac{d\,G_1(U_1)}{dU_1} - \frac{d\,G_2(U_2)}{dU_2}\right] = 0, \tag{19}$$

U_1 étant compris entre V_1 et V'_1 et U_2 entre V_2 et V'_2.

Soient ϖ_1, ϖ_2 les valeurs de Π_1, Π_2, qui correspondent aux valeurs U_1, U_2 de V_1, V_2. Les égalités (16) nous donneront

$$\frac{d\,G_1(U_1)}{dU_1} = F_1(\varpi_1),$$

$$\frac{d\,G_2(U_2)}{dU_2} = F_2(\varpi_2).$$

D'ailleurs, d'après l'égalité (8), V_1 varie toujours en sens contraire

de Π_1; U_1 étant compris entre V_1 et V'_1, ϖ_1 sera compris entre Π' et Π; de même ϖ_2 sera compris entre Π et Π'. L'égalité (19) deviendra donc

$$(V'_1 - V_1)[F_1(\varpi_1) - F_2(\varpi_2)] = 0,$$

les pressions ϖ_1 et ϖ_2 étant toutes deux comprises entre Π et Π', et, par conséquent, se trouvant au nombre des pressions réalisées au sein du système.

Mais, par hypothèse, le fluide 1 est plus dense sous la pression ϖ_1 que le fluide 2 sous la pression ϖ_2; on a donc

$$F_1(\varpi_1) - F_2(\varpi_2) > 0,$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$V'_1 - V_1 = 0.$$

Il en résulte que les deux surfaces S_{12}, S'_{12} sont, comme nous l'avions annoncé, dans une même surface de niveau.

§ II. — *Fluide soumis à une pression uniforme et constante; potentiel thermodynamique de ce fluide; variation première de ce potentiel.*

Nous avons vu que l'on avait, dans tout l'espace occupé par le fluide,

$$(11) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

la fonction V étant une fonction continue de x, y, z, mais pouvant n'être pas uniforme lorsque le système est formé de plusieurs fluides distincts, et que l'espace qu'il remplit n'est pas simplement connexe.

Nous admettrons désormais que l'on peut tracer autour du système une surface dont tous les points soient à une distance finie de la surface qui limite le système; qu'il existe une certaine fonction V, *uniforme,* finie et continue à l'intérieur de cette surface, telle qu'une

masse fluide dm, placée au point (x, y, z), soit soumise à une force ayant pour composantes

$$-\frac{\partial V}{\partial x}dm, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}dm, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}dm.$$

Cette hypothèse admise, considérons la quantité

$$W = \int V\rho\, dv, \tag{20}$$

dans laquelle l'intégrale s'étend au volume entier d'un fluide continu et cherchons quelle variation subit cette quantité W lorsqu'on impose au fluide une modification infiniment petite.

Soit ρ la densité du fluide, au commencement de la modification, en un point d'un élément de volume dv, fixe dans l'espace; soit $(\rho + \delta\rho)$ la densité, au sein du même élément de volume, à la fin de la modification; soient S la surface primitive du fluide et S′ la surface déformée; soit ε une quantité dont la valeur absolue est la distance normale infiniment petite des deux surfaces S, S′, dont le signe est le signe + dans les régions où la surface S′ est extérieure à la surface S et le signe — dans les régions où la surface S′ est intérieure à la surface S; nous aurons évidemment

$$\delta W = \int V\,\delta\rho\, dv + \int V\rho\varepsilon\, dS, \tag{21}$$

la première intégrale s'étendant au volume du fluide, et la seconde à la surface qui le limite.

Cette égalité (21) peut se transformer.

Soient δx, δy, δz les composantes du déplacement du point matériel qui avait pour coordonnées x, y, z, au début de la modification; nous aurons, en désignant par n_i la normale à la surface S vers l'intérieur du fluide,

$$\delta\rho = -\rho\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right),$$

$$\varepsilon = \cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z,$$

en sorte que l'égalité (21) deviendra

$$\delta W = -\int \rho V \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial z} \right) dv$$
$$- \int \rho V [\cos(n_i, x) \delta x + \cos(n_i, y)\, \delta y + \cos(n_i, z)\, \delta z]\, dS.$$

Des intégrations par parties transforment aisément cette égalité en

$$\delta W = \int \rho \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right) dv$$

ou bien, en vertu des égalités (11), en

$$\delta W = -\int \rho (X\, \delta x + Y\, \delta y + Z\, \delta z)\, dv.$$

L'intégrale qui figure au second membre est évidemment le travail virtuel, effectué dans la modification considérée, par l'ensemble des forces appliquées aux diverses masses élémentaires qui composent le fluide. Donc, *moyennant les hypothèses faites, les forces appliquées aux divers éléments de masse qui composent un fluide admettent un potentiel* W, *défini par l'égalité* (20).

Si le système était composé de deux fluides, 1 et 2, le potentiel des forces qui agissent sur les divers éléments de masse qui le forment serait donné par l'égalité

$$W = \int_1 V \rho_1\, dv_1 + \int_2 V \rho_2\, dv_2. \tag{20 bis}$$

La variation que cette quantité éprouve dans une modification infiniment petite du fluide s'obtiendra par une formule analogue à la formule (21); si nous désignons par ε_1 une quantité, analogue à ε, comptée positivement vers l'extérieur du fluide 1, et par ε_2 une quantité, analogue à ε, comptée positivement vers l'intérieur du fluide 2, nous aurons

$$(21\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W = {} & \int_1 V\, \delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 V\, \delta\rho_2\, dv_2 \\ & + \int_1 V \rho_1 \varepsilon_1\, dS_1 + \int_2 V \rho_2 \varepsilon_2\, dS_2 \\ & + \int_{S_{12}} V(\rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_2)\, dS_{12}. \end{aligned} \right.$$

Les pressions appliquées à la surface déformable du système n'admettent pas, en général, de potentiel; il faut, toutefois, faire exception à cette règle dans le cas où *les parties déformables* S_1, S_2 *de la surface qui limite le système supportent une pression uniforme qui garde une valeur invariable* P_0 *pendant les diverses modifications du système;* dans ce cas particulier, où nous nous supposerons placé désormais, les pressions extérieures admettent, comme l'on sait, pour potentiel la fonction

$$W' = P_0\left(\int_1 dv_1 + \int_2 dv_2\right), \tag{22}$$

dont la variation est

$$\delta W' = P_0\left(\int_{S_1} \varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} \varepsilon_2\, dS_2\right). \tag{23}$$

En toutes circonstances, le système admet pour potentiel thermodynamique interne la quantité

$$\mathfrak{F} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\, dv_2, \tag{1}$$

dont la variation est

$$\left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{F} = & \int_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\delta\rho_2\, dv_2 \\ & + \int_{S_1} \varphi_1(\rho_1)\varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} \varphi_2(\rho_2)\varepsilon_2\, dS_2 \\ & + \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1)\varepsilon_1 + \varphi_2(\rho_2)\varepsilon_2]\, dS_{12}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Si donc on admet les deux hypothèses indiquées dans le présent paragraphe, on voit que *le système admet un potentiel thermodynamique total;* ce potentiel a pour expression, en vertu des égalités (1), (20 *bis*) et (22),

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= \mathfrak{F} + W + W' \\ &= \int_1 [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\, dv_1 + \int_2 [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0]\, dv_2. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Dans une modification infiniment petite du fluide, cette quantité Φ éprouve une variation $\delta\Phi$, qui a pour valeur, d'après les égalités (24), (21 *bis*) et (23),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\Phi = &\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_2\, dv_2 \\ &+ \int_{\mathrm{S}_1} [\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1 + \mathrm{P}_0]\varepsilon_1\, d\mathrm{S}_1 \\ &+ \int_{\mathrm{S}_2} [\varphi_2(\rho_2) + \mathrm{V}\rho_2 + \mathrm{P}_0]\varepsilon_2\, d\mathrm{S}_2 \\ &+ \int_{\mathrm{S}_{12}} \big\{[\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1]\varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + \mathrm{V}\rho_2]\varepsilon_2\big\}\, d\mathrm{S}_{12}. \end{aligned}\right.$$

On remarquera que cette formule, très générale, ne suppose pas que le système fluide auquel on l'applique soit en équilibre.

§ III. — *Variation seconde du potentiel thermodynamique.*

Une variation infiniment petite des variables indépendantes dont dépend l'état du système a fait subir au potentiel thermodynamique une variation $\delta\Phi$, donnée par l'égalité (26); donnons, de nouveau, la même variation aux variables indépendantes et cherchons la variation $\delta^2\Phi$ que subit la quantité $\delta\Phi$.

La variation de la quantité $\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\, dv_1$ est aisée à former. Nous avons évidemment

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\, dv_1 = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 \\ &+ \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta^2\rho_1\, dv_1 \\ &+ \int_{\mathrm{S}_1} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\,\varepsilon_1\, d\mathrm{S}_1 \\ &+ \int_{\mathrm{S}_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta\rho_1\,\varepsilon_1\, d\mathrm{S}_{12}. \end{aligned}\right.$$

La variation de la quantité $\int_2 \left[\frac{d\,\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \mathrm{V}\right] \delta\rho_2\, dv_2$ s'exprime d'une manière analogue.

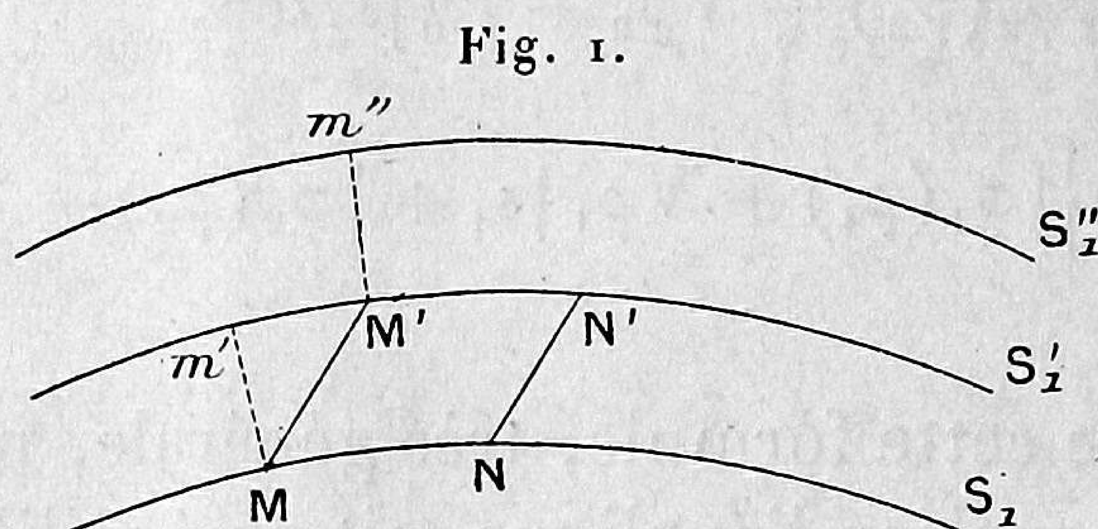
Le calcul de la quantité

$$\delta \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1 + \mathrm{P}_0]\,\varepsilon_1\, d\mathrm{S}_1$$

nécessite quelques explications plus détaillées.

S_1 (*fig.* 1) est la position initiale de la surface S_1; S'_1 sa position

Fig. 1.



après la première variation; S''_1 sa position après la seconde variation.

Faisons correspondre, *suivant une loi quelconque*, un point M′ de la surface S'_1 à chaque point M de la surface S_1, cette loi étant seulement assujettie à faire correspondre des points infiniment voisins à des points infiniment voisins.

Ce mode de correspondance fait correspondre à l'élément superficiel $\mathrm{MN} = d\mathrm{S}_1$ l'élément superficiel $\mathrm{M'N'} = d\mathrm{S}'_1$.

Pour calculer la nouvelle valeur prise par l'intégrale

$$\int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1 + \mathrm{P}_0]\,\varepsilon_1\, d\mathrm{S}_1,$$

il faut substituer à $[\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1]$ la valeur $[\varphi_1(\rho'_1) + \mathrm{V}\rho'_1]$ que prend la même quantité non plus au point M, au commencement de la première modification, mais au point M′, au commencement de la deuxième modification; à la distance normale $\varepsilon_1 = \mathrm{M}m'$ du point M à la surface S'_1 la distance normale $\varepsilon'_1 = \mathrm{M}'m''$ du point M′ à la surface S''_1; à l'élément $d\mathrm{S}_1$, l'élément $d\mathrm{S}'_1$; enfin intégrer non plus pour la surface S_1, mais pour la surface S'_1. La nouvelle valeur de notre intégrale sera donc

$$\int_{S'_1} [\varphi_1(\rho'_1) + \mathrm{V}'\rho'_1 + \mathrm{P}_0]\,\varepsilon'_1\, d\mathrm{S}'_1,$$

et la variation cherchée aura pour valeur

$$\begin{aligned}
&\delta \int [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 dS_1 \\
&= \int_{S_1} [\varphi_1(\rho'_1) - \varphi_1(\rho_1) + V(\rho'_1 - \rho_1) + \rho_1(V' - V)]\varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0](\varepsilon'_1 - \varepsilon_1) dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1(dS'_1 - dS_1).
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\rho'_1 - \rho_1 &= D\rho_1, \\
V' - V &= DV, \\
\varepsilon'_1 - \varepsilon_1 &= D\varepsilon_1, \\
dS'_1 - dS_1 &= D\, dS'_1
\end{aligned}$$

et nous aurons

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
&\delta \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 dS_1 \\
&= \int_{S_1} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] D\rho_1\, \varepsilon_1 dS_1 + \int_{S_1} \rho_1 DV \varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0] D\varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 D\, dS_1.
\end{aligned}\right.$$

Soient Dx, Dy, Dz les composantes du segment MM'; nous aurons

$$(29)\qquad DV = \frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz.$$

Si ρ_1 est la densité, au point M, au commencement de la première modification, la densité au même point et au commencement de la deuxième modification est $(\rho_1 + \delta\rho_1)$; la densité au point M' et au

commencement de la deuxième modification est alors

$$\rho_1 + D\rho_1 = \rho_1 + \delta\rho_1 + \frac{\partial(\rho_1+\delta\rho_1)}{\partial x}Dx + \frac{\partial(\rho_1+\delta\rho_1)}{\partial y}Dy + \frac{\partial(\rho_1+\delta\rho_1)}{\partial z}Dz.$$

On a donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$D\rho_1 = \delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz. \tag{30}$$

En vertu des égalités (29) et (30), l'égalité (28) devient

$$\begin{cases} \delta\int_{S_1}[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1+P_0]\varepsilon_1 dS_1 \\ = \int_{S_1}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1 dS_1 \\ +\int_{S_1}\left\{\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\right]Dx\right. \\ \qquad +\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial y}\right]Dy \\ \qquad \left.+\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z}+V\frac{\partial\rho_1}{\partial z}+\rho_1\frac{\partial V}{\partial z}\right]Dz\right\}\varepsilon_1 dS_1 \\ +\int_{S_1}[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1+P_0]D(\varepsilon_1 dS_1). \end{cases} \tag{31}$$

Les quantités

$$\delta\int_{S_2}[\varphi_2(\rho_2)+V\rho_2+P_0]\varepsilon_2 dS_2,$$

$$\delta\int_{S_{12}}\{[\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1]\varepsilon_1+[\varphi_2(\rho_2)+V\rho_2]\varepsilon_2\}dS_{12}$$

se calculent d'une manière analogue.

Nous avons laissé entièrement quelconque la loi de correspondance établie entre un point $M(x, y, z)$ de la surface primitive et un point $M'(x+Dx, y+Dy, z+Dz)$ de la surface déformée; nous avons supposé que cette loi faisait toujours correspondre deux points infini-

ment voisins M', N' de la surface déformée à deux points infiniment voisins, M, N, de la surface primitive. *Dans certains cas, il est commode de faire correspondre au point géométrique* M, *où se trouvait un certain point matériel du fluide au début de la première modification, le point géométrique* M' *où se trouve le même point matériel à la fin de la première modification;* on a alors

$$D x = \delta x, \qquad D y = \delta y, \qquad D z = \delta z, \tag{32}$$

δx, δy, δz étant les composantes du déplacement virtuel du fluide au point M. Lorsque nous adopterons ce mode particulier de correspondance, nous conviendrons d'écrire $\delta\varepsilon$, $\delta\, dS$, au lieu de $D\,\varepsilon$, $D\, dS$. Il ne faut pas oublier que *l'adoption de ce mode de correspondance n'est nullement obligatoire;* dans certains cas, il est plus commode d'en adopter un autre.

§ IV. — *Expression de la variation seconde dans le cas où le système est en équilibre.*

Les résultats précédents nous permettent d'écrire la forme générale de $\delta^2\Phi$. Il nous sera utile, pour les développements qui vont suivre, de chercher l'expression de $\delta^2\Phi$ dans le cas particulier où l'état initial du système est un état d'équilibre.

Pour cela, il nous faudra introduire dans l'expression de $\delta^2\Phi$ les simplifications qui résultent des conditions d'équilibre données au § I. Mais ces simplifications se trouveront indiquées d'une manière toute naturelle si nous donnons aux conditions d'équilibre la forme que l'on obtient en exprimant que l'on doit avoir

$$\delta\Phi = 0, \tag{33}$$

pour toute modification virtuelle du système.

Si l'on observe que l'on a, en tout point de la surface S_{12},

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0, \tag{34}$$

l'égalité (33) pourra s'écrire, en vertu de l'égalité (26),

$$(35)\quad \begin{cases} \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V\right] \delta\rho_2\, dv_2 \\ + \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0]\varepsilon_2\, dS_2 \\ + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 - \varphi_2(\rho_2) - V\rho_2]\varepsilon_1\, dS_{12} = 0. \end{cases}$$

Cette égalité (35) ne doit pas avoir lieu identiquement; elle doit avoir lieu seulement pour les modifications virtuelles qui laissent invariable la masse de chacun des corps 1 et 2. Ces conditions s'expriment par les égalités

$$\delta\int_1 \rho_1\, dv_1 = 0, \qquad \delta\int_2 \rho_2\, dv_2 = 0,$$

qui peuvent encore s'écrire

$$(36)\quad \begin{cases} \int_1 \delta\rho_1\, dv_1 + \int_{S_1} \rho_1\varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\, dS_{12} = 0, \\ \int_{S_1} \delta\rho_2\, dv_2 + \int_{S_2} \rho_2\varepsilon_2\, dS_2 + \int_{S_{12}} \rho_2\varepsilon_2\, dS_{12} = 0. \end{cases}$$

L'égalité (35) devant avoir lieu toutes les fois que les égalités (34) et (36) ont lieu, il doit exister deux constantes C_1 et C_2, telles que l'on ait

$$(37)\quad \begin{cases} \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1\right] \delta\rho_1\, dv + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2\right] \delta\rho_2\, dv_2 \\ + \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0 + C_1\rho_1]\varepsilon_1\, dS_1 \\ + \int_{S_2} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0 + C_2\rho_2]\varepsilon_2\, dS_2 \\ + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 - C_1\rho_1 - \varphi_2(\rho_2) - V\rho_2 - C_2\rho_2]\varepsilon_1\, dS_{12} = 0, \end{cases}$$

quelles que soient les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$, ε_1, ε_2.

Par conséquent, *on doit avoir, en désignant par* C_1 *et* C_2 *deux constantes :*

1° *En tout point du fluide* 1,

$$\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1 = 0, \tag{38}$$

et, en tout point du fluide 2,

$$\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2 = 0; \tag{38 bis}$$

2° *En tout point de la surface* S_1,

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 + P_0 = 0, \tag{39}$$

et, en tout point de la surface S_2,

$$\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2 + P_0 = 0; \tag{39 bis}$$

3° *En tout point de la surface* S_{12},

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 = \varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2. \tag{40}$$

Avant de faire usage de ces conditions d'équilibre, assurons-nous qu'elles résultent des conditions posées au § I.

Les égalités (2) nous donnent, en tout point du fluide 1,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = 0.$$

D'autre part, l'égalité (3) nous donne

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} - \rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} - \rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - \rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0.$$

Ces égalités nous montrent que l'on a, en tout point du fluide 1,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0$$

et, par conséquent,

$$(38)\qquad \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V+C_1=0,$$

C_1 étant une constante. L'égalité (38 *bis*) se déduit de même des égalités (2 *bis*) et (3 *bis*).

Les égalités (3) et (38) donnent, en tout point du fluide 1,

$$(41)\qquad \varphi_1(\rho_1)+(V+C_1)\rho_1+\Pi_1=0.$$

Les égalités (3 *bis*) et (38 *bis*) donnent, en tout point du fluide 2,

$$(41\ bis)\qquad \varphi_2(\rho_2)+(V+C_2)\rho_2+\Pi_2=0.$$

Observons que l'on a, en tout point de la surface S_1, $\Pi_1=P_0$; en tout point de la surface S_2, $\Pi_2=P_0$; enfin, en tout point de la surface S_{12}, $\Pi_1=\Pi_2$, et nous verrons sans peine que les égalités (41) et (41 *bis*) donnent les égalités (39), (39 *bis*) et (40).

Revenons maintenant aux égalités (38), (38 *bis*), (39), (39 *bis*) et (40), et voyons quelles simplifications subit l'expression de $\delta^2\Phi$ lorsqu'on les suppose vérifiées.

Les modifications virtuelles auxquelles se rapporte la variation seconde $\delta^2\Phi$ ne sont pas quelconques; elles laissent constante la masse de chacun des deux fluides 1 et 2, en sorte qu'elles sont assujetties aux égalités

$$\delta\int_1 \rho_1\,dv_1=0,\qquad \delta\int_2 \rho_2\,dv_2=0,$$

$$\delta^2\int_1 \rho_1\,dv_1=0,\qquad \delta^2\int_2 \rho_2\,dv_2=0.$$

Les deux premières égalités équivalent, nous l'avons vu, aux éga-

lités (36); quant aux deux dernières, elles peuvent se transformer par un raisonnement semblable à celui qui fait connaître $\delta^2\Phi$; elles prennent alors la forme suivante :

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_1 \delta^2\rho_1\,dv_1 + 2\int_{S_1}\delta\rho_1\varepsilon_1\,dS_1 + 2\int_{S_{12}}\delta\rho_1\varepsilon_1\,dS_{12}\\
&+\int_{S_1}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1\\
&+\int_{S_{12}}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}\\
&+\int_{S_1}\rho_1 D(\varepsilon_1\,dS_1) + \int_{S_{12}}\rho_1 D(\varepsilon_1\,dS_{12}) = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(42\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_2 \delta^2\rho_2\,dv_2 + 2\int_{S_2}\delta\rho_2\varepsilon_2\,dS_2 + 2\int_{S_{12}}\delta\rho_2\varepsilon_2\,dS_{12}\\
&+\int_{S_2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_2}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_2\\
&+\int_{S_{12}}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_2}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_{12}\\
&+\int_{S_2}\rho_2 D(\varepsilon_2\,dS_2) + \int_{S_{12}}\rho_2 D(\varepsilon_2\,dS_{12}) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant l'expression de $\delta^2\Phi$. Par un groupement convenable des termes qui la composent, elle peut s'écrire

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_1\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta^2\rho_1\,dv_1\\
&+\int_{S_1}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\left(2\delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1\\
&+\int_{S_{12}}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\left(2\delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}\\
&+\int_{S_1}[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\,D(\varepsilon_1\,dS_1)\\
&+\int_{S_{12}}[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\,D(\varepsilon_1\,dS_{12})\\
&+\int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1\\
&+\int_{S_{12}}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

le signe : ... désignant des termes de même forme que ceux qui sont écrits, mais où l'indice 2 remplace l'indice 1.

En vertu des égalités (34), (38), (38 *bis*), (39), (39 *bis*) et (40), l'égalité (43) peut s'écrire

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 \\ &+\int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\ &+\int_{S_{12}}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\ &+C_1\left[\int_1 \delta^2\rho_1\,dv_1\right. \\ &\qquad+\int_{S_1}\left(2\,\delta\rho_1+\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\ &\qquad+\int_{S_{12}}\left(2\,\delta\rho_1+\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\ &\qquad\qquad\left.+\int_{S_1}\rho_1\,D(\varepsilon_1\,dS_1)+\int_{S_{12}}\rho_1\,D(\varepsilon_1\,dS_{12})\right]+\ldots \end{aligned}\right.$$

En chaque point de la surface S_{12} on peut attribuer à Dx, Dy, Dz la même valeur dans l'expression

$$\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12},$$

et dans l'expression

$$\rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_{12}.$$

Dès lors, en vertu des égalités (34), (42) et (42 *bis*), l'égalité (44) devient

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1+\int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ &+\int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\ &+\int_{S_2}\rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_2 \\ &+\int_{S_{12}}(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}. \end{aligned}\right.$$

Telle est la forme très simple que prend la *variation seconde du potentiel thermodynamique d'un système composé de deux fluides, soumis à une pression constante, dans le cas où l'état initial est un état d'équilibre.*

§ V. — *Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les masses élémentaires ne sont sollicitées par aucune force.*

Imaginons tout d'abord que les divers éléments de masse qui composent le système ne soient soumis à aucune force extérieure; la seule force extérieure qui agisse sur le système est la pression P_0, appliquée à la surface libre.

Dans ce cas, la fonction V se réduit à une constante; l'égalité (38) nous apprend alors que la densité ρ_1 a la même valeur en tous les points du fluide 1 et l'égalité (41) nous enseigne qu'il en est de même de la pression Π_1; les égalités (38 *bis*) et (41 *bis*) entraînent également la constance des quantités ρ_2 et Π_2 à l'intérieur du fluide 2; *chacun des fluides que renferme le système en équilibre est homogène.*

La constance de la fonction V entraîne, en tout point du système, les égalités

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

en sorte que l'égalité (45) se réduit à

$$\delta^2 \Phi = \int_1 \frac{d^2 \varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} (\delta\rho_1)^2 \, dv_1 + \int_2 \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (\delta\rho_2)^2 \, dv_2.$$

Si l'on remarque que ρ_1 a la même valeur en tout point du fluide 1 et ρ_2 la même valeur en tout point du fluide 2, cette égalité peut encore s'écrire

$$(46) \qquad \delta^2 \Phi = \frac{d^2 \varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} \int_1 (\delta\rho_1)^2 \, dv_1 + \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} \int_2 (\delta\rho_2)^2 \, dv_2.$$

Il est des modifications pour lesquelles cette quantité $\delta^2\Phi$ est évidemment égale à 0; ce sont celles dans lesquelles chaque particule

fluide qui se déplace est remplacée par une particule fluide de même densité; pour de semblables modifications, non seulement $\delta^2\Phi$ est égal à o, mais il en est de même de toutes les variations d'ordre supérieur de Φ, en sorte que, pour de semblables modifications, l'équilibre du système doit être regardé comme indifférent; cette proposition est une conséquence immédiate et évidente de la définition du mot *fluide*.

Excluons ces modifications particulières et cherchons à quelles conditions l'équilibre du système sera stable pour toutes les autres modifications; la condition cherchée s'obtiendra en exprimant que, pour toutes ces modifications, la quantité $\delta^2\Phi$ est positive, ce qui donnera, en vertu de l'égalité (46),

$$\frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\int_1(\delta\rho_1)^2\,dv_1+\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\int_2(\delta\rho_2)^2\,dv_2>0. \tag{47}$$

Les variations $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ sont seulement assujetties aux conditions (36), qui les laissent entièrement arbitraires. La condition (47) équivaut donc aux deux conditions

$$\frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}>0,\qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}>0. \tag{48}$$

Telles sont les conditions qui expriment que le système est en équilibre stable sous l'action d'une pression uniforme et constante.

Nous admettrons que l'équilibre d'un système fluide, soumis uniquement à l'action d'une pression uniforme et constante, est toujours un équilibre stable; *nous admettrons*, par conséquent, *que les inégalités* (48) *sont toujours vérifiées par tous les fluides.*

Interprétons ces inégalités.

La densité ρ_1 que prend le fluide 1 soumis exclusivement à une pression uniforme P_0 est donnée par l'égalité (3), où Π_1 prend la valeur P_0, c'est-à-dire par l'égalité

$$\varphi_1(\rho_1)-\rho_1\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+P_0=0. \tag{49}$$

Sous la pression uniforme (P_0+dP_0), à la même température, le

fluide 1 prend une densité $(\rho_1 + d\rho_1)$; l'équation qui lie $d\rho_1$ à dP_0, obtenue en différentiant l'égalité (49), est

$$\rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} d\rho_1 = dP_0.$$

La première inégalité (48) nous apprend donc simplement que $d\rho_1$ est de même signe que dP_0. Ainsi, *l'hypothèse que nous avons admise revient à supposer que, dans tout fluide soumis exclusivement à une pression uniforme, un accroissement de cette pression détermine un accroissement de la densité.*

§ VI. — *Stabilité de l'équilibre d'un système fluide terminé par des surfaces libres.*

Revenons au cas général auquel se rapporte l'égalité (45).

Nous avons vu que, dans ce cas, chacune des surfaces S_1, S_2, S_{12} était une surface de niveau.

De ce fait que la surface S_1 est une surface de niveau, il résulte que l'on peut, en désignant par n_i la normale à la surface S_1, dirigée vers l'intérieur du fluide 1, écrire

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, x),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, y),$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, z).$$

On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz$$
$$= \frac{\partial V}{\partial n_i} [\cos(n_i, x) Dx + \cos(n_i, y) Dy + \cos(n_i, z) Dz].$$

Mais, d'autre part, on a évidemment

$$\varepsilon_1 = -[\cos(n_i, x) Dx + \cos(n_i, y) Dy + \cos(n_i, z) Dz].$$

Par conséquent, on a

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 = -\frac{\partial V}{\partial n_i}\varepsilon_1^2.$$

Cette remarque et deux autres remarques analogues permettent de transformer l'égalité (45) en

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\, dv_2 \\ &-\int_{S_1}\rho_1\frac{\partial V}{\partial n_i}\varepsilon_1^2\, dS_1 - \int_{S_2}\rho_2\frac{\partial V}{\partial n_i}\varepsilon_2^2\, dS_2 \\ &-\int_{S_{12}}(\rho_2-\rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2}\varepsilon_1^2\, dS_{12}, \end{aligned}\right.$$

n_2 étant la normale à la surface S_{12} vers l'intérieur du fluide 2.

Il existe évidemment des modifications du système dans lesquelles cette variation est égale à 0 : ce sont celles où le liquide se meut de telle manière que chacune des trois surfaces S_1, S_2, S_{12} demeure invariable et que chaque particule fluide déplacée soit remplacée par une particule de même densité. De pareilles modifications annulent non seulement $\delta^2\Phi$, mais encore toutes les variations d'ordre supérieur de Φ; on doit regarder l'équilibre du système comme indifférent à de semblables modifications; en fait, elles ne font varier aucun des paramètres qui, par hypothèse, suffisent à déterminer l'état du système.

Laissons de côté ces modifications particulières et cherchons la condition de stabilité du système pour toutes les autres modifications; cette condition s'obtiendra en exprimant que la quantité $\delta^2\Phi$ est positive pour toutes ces modifications; elle s'écrira, en vertu de l'égalité (50),

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\, dv_2 \\ &-\int_{S_1}\rho_1\frac{\partial V}{\partial n_i}\varepsilon_1^2\, dS_1 - \int_{S_2}\rho_2\frac{\partial V}{\partial n_i}\varepsilon_2^2\, dS_2 \\ &\qquad -\int_{S_{12}}(\rho_2-\rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2}\varepsilon_1^2\, dS_{12} > 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous admettons l'exactitude de l'hypothèse énoncée au paragraphe précédent, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équilibre d'un système de fluides terminés par des surfaces libres soit un équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait :

1° *En tout point des surfaces libres* S_1, S_2,

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} \leqq 0; \tag{52}$$

2° *En tout point de la surface de contact* S_{12} *de deux fluides* 1 *et* 2,

$$(\rho_2 - \rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2} \leqq 0. \tag{53}$$

Dans ces deux conditions, l'égalité n'a jamais lieu pour tous les points d'une région d'étendue finie de la surface.

Que ces conditions suffisent à assurer l'inégalité (51), cela est bien évident; mais qu'elles soient nécessaires pour que cette égalité soit vérifiée, cela s'aperçoit moins aisément, car les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$, ε_1, ε_2 ne sont pas arbitraires, mais soumises aux conditions (36); une démonstration est donc ici nécessaire; démontrons, par exemple, qu'en tout point de la surface S_1, on a nécessairement

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} \leqq 0, \tag{52 bis}$$

l'égalité n'ayant pas lieu en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur la surface S_1; la nécessité des deux autres conditions s'établirait d'une manière analogue.

La condition (52 *bis*) ne peut être en défaut que de deux manières; ou bien $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est égal à 0 en tous les points d'un domaine d'étendue finie tracé sur la surface S_1; ou bien $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est positif au moins en un point de la surface S_1; dans ce dernier cas, on pourrait, autour du

point où $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est positif, tracer un domaine d'étendue finie où, par raison de continuité, $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ serait également positif; donc, si la condition (52 *bis*) était en défaut, on pourrait assurément tracer, sur la surface S_1, un domaine D, d'étendue finie, en tout point duquel la quantité $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ serait nulle ou positive.

Cela posé, imaginons qu'on laisse immobiles le fluide 2 et les surfaces S_2, S_{12} qui le limitent; qu'on laisse également invariable la partie de la surface S_1 qui est extérieure au domaine D; qu'on déplace le fluide 1 de telle manière que le liquide qui remplissait un élément de volume fixe dans l'espace soit remplacé par un liquide de même densité; que l'on donne enfin, aux divers points du domaine D, des déplacements tels que

$$\int_D \varepsilon_1 \, dS_1 = 0.$$

Si l'on observe que la densité ρ_1 a la même valeur en tous les points du domaine D, qui appartient à une surface libre et partant à une surface de niveau, on verra sans peine que les égalités (36) sont vérifiées et, par conséquent, que la modification considérée est une modification virtuelle du système.

Or, pour une semblable modification, le premier membre de l'inégalité (51) se réduit à

$$-\int_D \rho_1 \frac{\partial V}{\partial n_i} \varepsilon_1^2 \, dS_1,$$

et, contrairement à l'inégalité (51), ce premier membre serait nul ou négatif si la condition (52 *bis*) n'était pas vérifiée. Cette condition (52 *bis*) est donc nécessairement vérifiée.

Maintenant que nous avons, en (52) et (53), les conditions générales de la stabilité de l'équilibre, cherchons à interpréter ces conditions.

La surface libre S_1 est une surface de niveau; la force (X, Y, Z) en un point de cette surface est normale à cette surface; pour que $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ soit négatif, il faut et il suffit que la force soit dirigée vers l'intérieur

du fluide 1; la condition (52) peut donc s'énoncer ainsi :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur une surface libre; en tout point d'une telle surface où elle n'est pas nulle, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide.

De même, la condition (53) peut s'énoncer ainsi :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur la surface de contact de deux fluides; en tout point d'une telle surface où elle n'est pas nulle, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.

CHAPITRE II.

L'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS.

§ I. — *Théorèmes généraux sur l'équilibre des corps flottants.*

Imaginons un système formé de deux fluides 1 et 2, et d'un solide 3. Ce dernier sera supposé absolument invariable de forme et d'état. Nous supposerons le solide en contact avec le fluide 1 par une partie S_{13} de sa surface, et avec le fluide 2 par une autre partie S_{23} de sa surface. Le fluide sera soumis à deux sortes de forces extérieures : des forces appliquées à ses divers éléments de masse, et des pressions appliquées aux divers éléments de la surface qui le limite; au sujet de ces forces, nous admettrons les mêmes hypothèses, nous emploierons les mêmes notations qu'au Chapitre précédent; quant au corps solide, nous le supposerons soumis à des forces que nous réduirons à une force et à un couple; ξ, η, ζ seront les composantes de la force résultante suivant les trois axes de coordonnées et λ, μ, ν les composantes de l'axe du couple suivant les trois mêmes axes.

L'état du solide étant supposé rigoureusement invariable, la présence

de ce corps introduit seulement, dans le potentiel thermodynamique interne, un terme constant que l'on peut négliger d'écrire ; le potentiel thermodynamique interne sera donc encore donné par l'égalité (1) du Chapitre I.

Les conditions d'équilibre d'un pareil système, s'obtiendront en écrivant que, pour toute modification virtuelle du système, on a

$$\delta\mathcal{F} - d\mathcal{T}_e \geqq 0; \tag{1}$$

$\delta\mathcal{F}$ étant la variation du potentiel thermodynamique interne dans la modification considérée et $d\mathcal{T}_e$ le travail des forces extérieures.

Désignons par δx, δy, δz les composantes du déplacement imposé à un point matériel de l'un des deux fluides; par δf, δg, δh les trois translations suivant Ox, Oy, Oz et par δl, δm, δn les trois rotations autour de ces mêmes axes; le travail des forces extérieures appliquées au système aura pour expression

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} d\mathcal{T}_e = & \int_{S_1}[P\cos(P,x)\,\delta x + P\cos(P,y)\,\delta y + P\cos(P,z)\,\delta z]\,dS_1 \\ & + \int_{S_2}[P\cos(P,x)\,\delta x + P\cos(P,y)\,\delta y + P\cos(P,z)\,\delta z]\,dS_2 \\ & + \int_1 \rho_1(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dv_1 \\ & + \int_2 \rho_2(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dv_2 \\ & + \xi\,\delta f + \eta\,\delta g + \zeta\,\delta h + \lambda\,\delta l + \mu\,\delta m + \nu\,\delta n. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{F} = & \int_{S_1}\varphi_1(\rho_1)\,\varepsilon_1\,dS_1 + \int_{S_2}\varphi_2(\rho_2)\,\varepsilon_2\,dS_2 \\ & + \int_1 \frac{d\,\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\,\delta\rho_1\,dv_1 + \int_2 \frac{d\,\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\,\delta\rho_2\,dv_2. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités (2) et (3) permettent de donner une forme explicite à l'égalité (1).

On peut supposer, en premier lieu, que le corps solide demeure im-

mobile et que, seul, le fluide éprouve un déplacement virtuel. La considération de tels déplacements virtuels redonnera toutes les conditions énumérées au Chapitre I, § I.

En vertu de ces conditions, les inégalités et égalités (1), (2) et (3) donnent, pour toute transformation où le fluide ne se creuse pas de cavité,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi\,\delta f + \eta\,\delta g + \zeta\,\delta h + \lambda\,\delta l + \mu\,\delta m + \nu\,\delta n \\ &\quad - \int_{S_{13}} \Pi_1 \Big[\cos(N,x)\,\delta x + \cos(N,y)\,\delta y + \cos(N,z)\,\delta z\Big]\,dS_{13}, \\ &\quad - \int_{S_{23}} \Pi_2 \Big[\cos(N,x)\,\delta x + \cos(N,y)\,\delta y + \cos(N,z)\,\delta z\Big]\,dS_{23} \leqq 0, \end{aligned}\right.$$

N étant la normale au point (x, y, z) de la surface du corps solide, dirigée vers l'extérieur de ce corps. D'ailleurs, comme toute modification où le fluide ne se creuse pas de cavité est une modification renversable, le signe d'inégalité peut être effacé.

Le fluide demeurant en contact avec le corps solide durant la modification considérée, si l'on désigne par Δx, Δy, Δz les composantes du déplacement du point matériel *appartenant au corps solide*, dont les coordonnées sont x, y, z, à l'instant t, on a, en tout point des surfaces S_{13} et S_{23},

$$\begin{aligned} &\cos(N,x)\,\delta x + \cos(N,y)\,\delta y + \cos(N,z)\,\delta z \\ &= \cos(N,x)\Delta x + \cos(N,y)\Delta y + \cos(N,z)\Delta z. \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y &= \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z &= \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m, \end{aligned}\right.$$

L'égalité (4) devient donc

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\xi - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N,x)\,dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N,x)\,dS_{23}\right]\delta f\\
&+\left[\eta - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N,y)\,dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N,y)\,dS_{23}\right]\delta g\\
&+\left[\zeta - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N,z)\,dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N,z)\,dS_{23}\right]\delta h\\
&+\Big\{\lambda - \int_{S_{13}} \Pi_1 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\,dS_{13}\\
&\qquad - \int_{S_{23}} \Pi_2 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\,dS_{23}\Big\}\delta l\\
&+\Big\{\mu - \int_{S_{13}} \Pi_1 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\,dS_{13}\\
&\qquad - \int_{S_{23}} \Pi_2 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\,dS_{23}\Big\}\delta m\\
&+\Big\{\nu - \int_{S_{13}} \Pi_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{13}\\
&\qquad - \int_{S_{23}} \Pi_2 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{23}\Big\}\delta n = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient δf, δg, δh, δl, δm, δn, en sorte que nous trouvons les conditions

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N,x)\,dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N,x)\,dS_{23}\\
\eta &= \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N,y)\,dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N,y)\,dS_{23},\\
\zeta &= \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N,z)\,dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N,z)\,dS_{23},\\
\lambda &= \int_{S_{13}} \Pi_1 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\,dS_{13}\\
&\quad + \int_{S_{23}} \Pi_2 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\,dS_{23},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(7)\quad \begin{cases} \mu = \displaystyle\int_{S_{13}} \Pi_1 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{13} \\ \qquad + \displaystyle\int_{S_{23}} \Pi_2 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{23}, \\ \nu = \displaystyle\int_{S_{13}} \Pi_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{13} \\ \qquad + \displaystyle\int_{S_{23}} \Pi_2 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{23}. \end{cases}$$

Telles sont les conditions qui, jointes aux équations de l'Hydrostatique, donnent les conditions d'équilibre d'un système de fluides qui porte un flotteur.

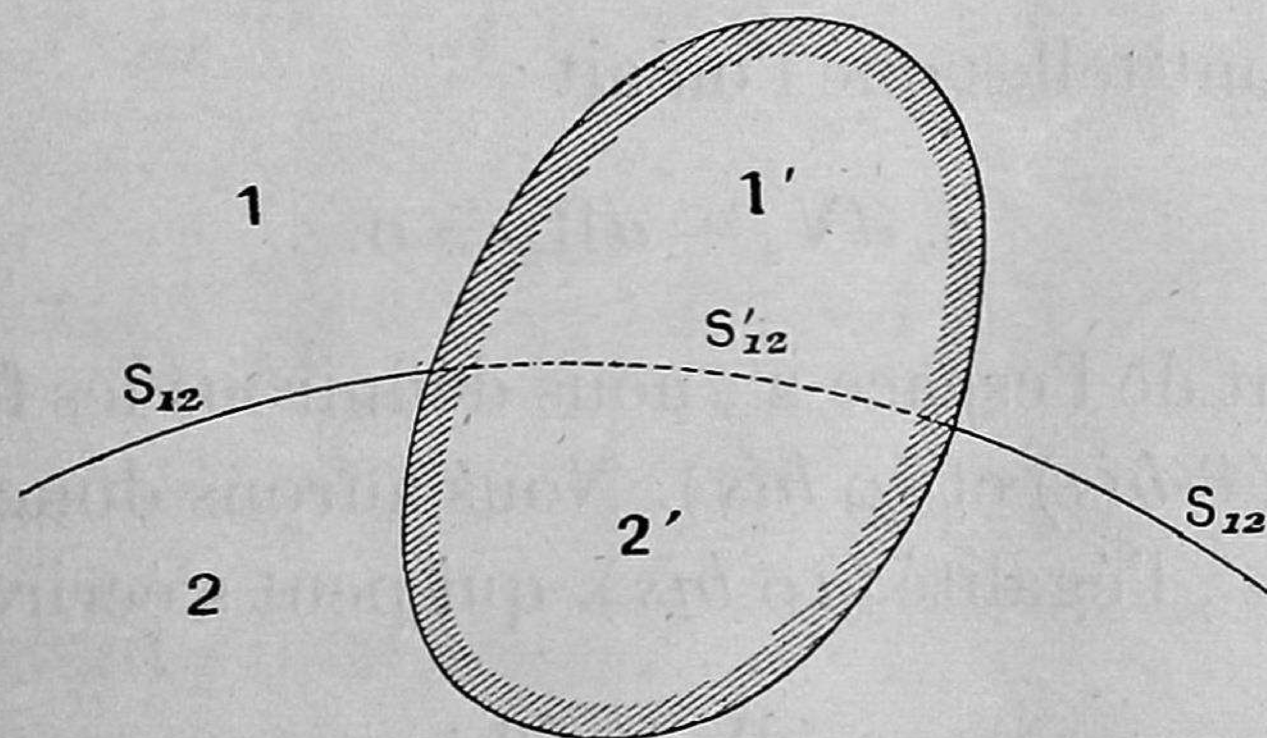
Ce que nous venons de dire est général.

Imaginons maintenant que les forces extérieures admettent une fonction potentielle V; que cette fonction soit uniforme, finie et continue en tous les points d'un espace renfermant non seulement les fluides, mais le corps solide.

La surface de séparation S_{12} des fluides 1 et 2 est une surface de niveau; la fonction V prend, en tous les points de cette surface, une même valeur A.

Le lieu des points, intérieurs au corps 3, où la fonction V prend la valeur A, forme une surface S'_{12}, connexe avec la surface S_{12} (*fig.* 2).

Fig. 2.



Cette surface S'_{12} sépare le corps 3 en deux régions; l'une, contiguë au fluide 1, que nous désignerons par 1′; l'autre, contiguë au fluide 2, que nous désignerons par 2′.

A l'intérieur du fluide 1, la densité ρ_1 et la pression Π_1 sont des

fonctions bien déterminées de V :

$$\rho_1 = R_1(V), \tag{8}$$

$$\Pi_1 = P_1(V); \tag{9}$$

ces fonctions sont telles que l'on ait

$$\rho_1 \, dV + d\Pi_1 = o. \tag{10}$$

En chaque point de l'espace 1′, nous définirons les fonctions ρ_1 et Π_1 par les équations (8) et (9). Nous aurons donc encore, en tout point de l'espace 1′, l'égalité (10), qui peut s'écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = o, \\ \rho_1 \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = o, \\ \rho_1 \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = o. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

De même, à l'intérieur du fluide 2, la densité ρ_2 et la pression Π_2 sont deux fonctions bien déterminées de V :

$$\rho_2 = R_2(V), \tag{8 bis}$$

$$\Pi_2 = P_2(V). \tag{9 bis}$$

Ces fonctions sont telles que l'on ait

$$\rho_2 \, dV_2 + d\Pi_2 = o. \tag{10 bis}$$

En chaque point de l'espace 2′, nous définirons les fonctions ρ_2 et Π_2 par les équations (8 *bis*) et (9 *bis*). Nous aurons donc encore, en tout point de l'espace 2′, l'égalité (10 *bis*), qui peut s'écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_2 - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} = o, \\ \rho_2 \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = o, \\ \rho_2 \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} = o. \end{aligned} \right. \tag{11 bis}$$

Cela posé, on trouvera sans peine que l'on a

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, x)\, dS_{23} \\
&\quad = \int_{1'} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\, dv_3 + \int_{2'} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}\, dv_3 \\
&\quad = -\int_{1'} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\, dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x}\, dv_3 . \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&\int_{S_{13}} \Pi_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\
&\quad + \int_{S_{23}} \Pi_2 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23} \\
&\quad = \int_{1'} \left(y \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} \right) dv_3 + \int_{2'} \left(y \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - z \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} \right) dv_3 \\
&\quad = -\int_{1'} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial z} y - \frac{\partial V}{\partial y} z \right) dv_3 - \int_{2'} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial z} y - \frac{\partial V}{\partial y} z \right) dv_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu des égalités (12), les égalités (7) prennent la forme suivante :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\xi = -\int_{1'} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\, dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x}\, dv_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&\lambda = -\int_{1'} \rho_1 \left(y \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial y} \right) dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \left(y \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial y} \right) dv_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces égalités peuvent s'interpréter.

Remplissons l'espace occupé par le corps solide par un fluide fictif ayant pour densité ρ_1 en tout point de l'espace $1'$ et ρ_2 en tout point de l'espace $2'$. Considérons les forces extérieures qui agissent sur les divers éléments de masse de ce fluide, et *composons-les comme s'il s'agissait d'un corps solide;* soient ξ', η', ζ' les composantes de la force résultante et λ', μ', ν' les composantes de l'axe du couple résul-

tant; on voit sans peine que l'on a

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \xi - \xi' &= 0, \\ \eta - \eta' &= 0, \\ \zeta - \zeta' &= 0, \\ \lambda - \lambda' &= 0, \\ \mu - \mu' &= 0, \\ \nu - \nu' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités sont une généralisation du principe d'Archimède.

§ II. — *Potentiel thermodynamique d'un système qui renferme un flotteur. Variation première de ce potentiel.*

Considérons un système formé de deux fluides et d'un flotteur en contact avec ces deux fluides. Le potentiel thermodynamique interne de ce système pourra s'écrire [Chapitre I, égalité (1)]

$$(15)\qquad \mathfrak{F} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\, dv_2,$$

la présence du corps solide introduisant seulement dans ce potentiel un terme constant qu'il est inutile d'écrire.

Nous supposerons le système limité par une surface invariable, en sorte que les pressions qui peuvent agir aux divers points de cette surface n'effectueront aucun travail. Pour calculer le potentiel des forces extérieures, il suffira de tenir compte des forces appliquées aux divers éléments de masse des corps fluides et du corps solide.

Les forces appliquées aux divers éléments de masse des corps fluides admettent un potentiel qui a pour valeur

$$(16)\qquad \Omega = \int_1 V \rho_1\, dv_1 + \int_2 V \rho_2\, dv_2.$$

Nous supposerons que chaque masse élémentaire $dm_3 = \rho_3\, dv_3$ du

corps solide soit soumise à une force dont les composantes ont pour valeur

$$-\rho_3 \frac{\partial U}{\partial x} dv_3, \quad -\rho_3 \frac{\partial U}{\partial y} dv_3, \quad -\rho_3 \frac{\partial U}{\partial z} dv_3,$$

U étant une fonction potentielle, qui est uniforme, finie et continue en tous les points d'un domaine à l'intérieur duquel se trouve le corps solide.

Les forces extérieures auxquelles le corps solide est soumis admettront alors un potentiel qui aura pour valeur

$$(17) \qquad \Omega' = \int_3 \rho U_3 \, dv_3$$

et le système admettra un potentiel thermodynamique total ayant pour valeur

$$(18) \qquad \Phi = \mathcal{F} + \Omega + \Omega'.$$

La variation première de ce potentiel aura pour valeur

$$(19) \qquad \delta\Phi = \delta(\mathcal{F} + \Omega) + \delta\Omega'.$$

Si l'on se reporte à l'expression de $(\mathcal{F} + \Omega)$, donnée par les égalités (15) et (16), on voit que cette expression se rapproche du potentiel thermodynamique total d'un système ne renfermant pas de flotteur, potentiel dont nous avons calculé la variation première au Chapitre I [égalité (26)]. Seulement les parties déformables de la surface qui limite le fluide se nomment ici S_{13}, S_{23}, au lieu de se nommer S_1, S_2; de plus, les termes en P_0 font défaut. On aura donc

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta(\mathcal{F} + \Omega) = & \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta\rho_1 \, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V\right] \delta\rho_2 \, dv_2 \\ & + \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\, \varepsilon_1 \, dS_{13} + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2]\, \varepsilon_2 \, dS_{23} \\ & + \int_{S_{12}} \{[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\, \varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2]\, \varepsilon_2\} \, dS_{12}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, on a

$$(21)\qquad \delta\Omega' = \int_3 \rho_3 \left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z \right) dv_3.$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ étant donnés par les égalités (5), cette dernière égalité devient

$$(22)\qquad \left\{ \begin{aligned} \delta\Omega' = {} & \delta f \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x} dv_3 + \delta g \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial y} dv_3 + \delta h \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial z} dv_3 \\ & + \delta l \int_3 \rho_3 \left(y \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial y} \right) dv_3 + \delta m \int_3 \rho_3 \left(z \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial z} \right) dv_3 \\ & + \delta n \int_3 \rho_3 \left(x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \right) dv_3. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (19), (20), (21), (22) font connaître la variation première du potentiel thermodynamique.

Nous allons en faire usage pour retrouver les conditions d'équilibre d'un système fluide portant un flotteur sous une forme qui nous sera utile par la suite.

Ces conditions s'expriment en écrivant que l'on a, pour toute déformation virtuelle,

$$(23)\qquad \delta\Phi = 0.$$

Si l'on observe que l'on a, en tout point de la surface S_{13},

$$\varepsilon_1 = -[\Delta x \cos(N, x) + \Delta y \cos(N, y) + \Delta z \cos(N, z)];$$

qu'en tout point de la surface S_{23} ε_2 s'exprime d'une manière analogue; on voit sans peine que les égalités (5), (19), (20) et (22) transforment l'égalité (23) en

$$(24)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_1 \left[\frac{\partial \varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V \right] \delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V \right] \delta\rho\, dv_2 \\ & + \int_{S_{12}} \left\{ [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\, \varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2]\, \varepsilon_2 \right\} dS_{12} \end{aligned} \right.$$

$$
(24)\quad\left\{
\begin{aligned}
&+\delta f\Big\{\int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x}\,dv_3 - \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1]\cos(N,x)\,dS_{13} \\
&\qquad\qquad - \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2)+V\rho_2]\cos(N,x)\,dS_{23}\Big\} \\
&+\delta g\{\ldots\} + \delta h\{\ldots\} \\
&+\delta l\Big\{\int_3 \rho_3\Big(y\frac{\partial U}{\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial y}\Big)dv_3 \\
&\qquad - \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1)+V\rho_1][y\cos(N,z)-z\cos(N,y)]\,dS_{13} \\
&\qquad - \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2)+V\rho_2][y\cos(N,z)-z\cos(N,y)]\,dS_{23}\Big\} \\
&+\delta m\{\ldots\} + \delta n\{\ldots\} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Cette égalité (24) ne doit pas avoir lieu identiquement; elle doit avoir lieu seulement pour les modifications virtuelles qui laissent invariable la masse de chacun des fluides 1 et 2.

Exprimons que la masse du corps I demeure invariable; nous trouvons

$$
\int_1 \delta\rho_1\,dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{13} = 0
$$

ou encore

$$
(25)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\int_1 \delta\rho_1\,dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} \\
&\quad - \delta f\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N,x)\,dS_{13} - \delta g\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N,y)\,dS_{13} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \delta h\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N,z)\,dS_{13} \\
&\quad - \delta l\int_{S_{13}} \rho_1[z\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\,dS_{13} \\
&\quad - \delta m\int_{S_{13}} \rho_1[z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\,dS_{13} \\
&\quad - \delta n\int_{S_{13}} \rho_1[x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{13} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Le fluide 2 fournit une égalité analogue, que nous désignerons par (25 *bis*).

L'égalité (24) doit avoir lieu toutes les fois que les égalités (25) et (25 *bis*) sont vérifiées, et seulement dans ce cas. Le calcul des variations nous enseigne qu'il existe alors deux constantes C_1, C_2, telles qu'en ajoutant au premier membre de l'égalité (24) le produit par C_1 du premier membre de l'égalité (25) et le produit par C_2 du premier membre de l'égalité (25 *bis*), on obtienne une quantité identiquement nulle.

Si l'on observe alors que l'on a, en tout point de la surface S_{12}, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$, on trouve les conditions suivantes :

1° *On a, en tout point du fluide* 1,

$$\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1 = 0 \tag{26}$$

et, en tout point du fluide 2,

$$\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2 = 0. \tag{26 bis}$$

2° *On a, en tout point de la surface* S_{12},

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 = \varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2. \tag{27}$$

3° *On a, enfin,*

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x} dv_3 = \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1] \cos(N, x)\, dS_{13} \\
&\qquad + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2] \cos(N, x)\, dS_{23}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\int_3 \rho_3 \left(y \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial y}\right) dv_3 \\
&\quad = \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1][y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{13} \\
&\qquad + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2][y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{23}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système de deux fluides portant un flotteur; on prouverait aisément qu'elles sont équivalentes aux conditions établies au § I.

CHAPITRE III.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN FLOTTEUR.

§ I. — *Variation seconde du potentiel thermodynamique d'un système de fluides qui renferme un flotteur.*

Considérons un système de deux fluides, 1 et 2, contenant un flotteur; concevons que ce système soit soumis aux hypothèses indiquées au § 2 du Chapitre II; ce système admet un potentiel thermodynamique Φ, défini par les égalités (15), (16), (17), (18) du Chapitre II; la variation première $\delta\Phi$ de ce potentiel est donnée par les égalités (19), (20), (21), (22) du même Chapitre; proposons-nous de déterminer la forme générale de la variation seconde $\delta^2\Phi$.

Nous aurons

$$\delta^2\Phi = \delta^2(\mathcal{F} + \Omega) + \delta^2\Omega'. \tag{1}$$

En raisonnant sur l'expression de $\delta(\mathcal{F} + \Omega)$ [Chapitre II, égalité (20)] comme au Chapitre I, § 3, nous avons raisonné sur l'expression de $\delta\Phi$, nous trouverons

$$\left\{\begin{aligned} \delta^2(\mathcal{F}+\Omega) = & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2 dv_1 + \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta^2\rho_1\, dv_1 \\ & + 2\int_{S_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1\, dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1\, dS_{13} \\ & + \int_{S_{12}} \left\{ \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\right] Dx \right. \\ & \qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial y}\right] Dy \\ & \qquad \left. + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial z}\right] Dz \right\} \varepsilon_1\, dS_{12} \\ & + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\, D(\varepsilon_1\, dS_1) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$(2)\quad \begin{cases} + \int_{S_{13}} \Big\{ \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\right] Dx \\ \qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial y}\right] Dy \\ \qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial z}\right] Dz \Big\} \varepsilon_1 dS_{13} \\ + \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{13}) \\ + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

le symbole : etc. représentant des termes qui sont analogues à ceux que nous avons écrits et qui se déduisent de ceux-là en permutant les indices 1 et 2.

Les égalités [Chapitre II, égalités (26) et (27)]

$$(3)\qquad \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1 = 0 \qquad \text{(en tout point du fluide 1)},$$

$$(4)\qquad \varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 = 0 \qquad \text{(en tout point de la surface } S_{12}\text{)}$$

permettent d'écrire

$$(5)\quad \begin{cases} \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta^2\rho_1\, dv_1 \\ \quad + 2\int_{S_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1 dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1 dS_{13} \\ \quad + \int_{S_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 dS_{12} \\ \quad + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{12}) \\ \quad + \int_{S_{13}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 dS_{13} \\ \quad + \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{13}) \\ = -C_1 \Big\{ \int_1 \delta^2\rho_1\, dv_1 + 2\int_{S_{12}} \delta\rho_1\varepsilon_1 dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \delta\rho_1\varepsilon_1 dS_{13} \\ \qquad + \int_{S_{12}} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 dS_{12} + \int_{S_{12}} \rho_1 D(\varepsilon_1 dS_{12}) \\ \qquad + \int_{S_{13}} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 dS_{13} \Big\} \\ \quad + \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{13}). \end{cases}$$

En exprimant que la masse du fluide 1 est essentiellement invariable, nous trouvons l'identité

$$(6) \qquad \int_1 \delta\rho_1\,dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{13} = 0.$$

Le premier membre de cette égalité (6) étant identiquement nul, il en doit être de même de sa variation, ce qui nous donne l'égalité

$$(7)\left\{\begin{aligned} &\int_1 \delta^2\rho_1\,dv_1 + 2\int_{S_{12}} \delta\rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \delta\rho_1\varepsilon_1\,dS_{13} \\ &\quad+\int_{S_{12}}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} + \int_{S_{12}} \rho_1 D(\varepsilon_1\,dS_{12}) \\ &\quad+\int_{S_{13}}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{13} + \int_{S_{13}} \rho_1 D(\varepsilon_1\,dS_{13}) = 0.\end{aligned}\right.$$

Moyennant cette égalité (7), le second membre de l'égalité (5) se réduit à

$$\int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1] D(\varepsilon_1\,dS_{13}).$$

Ce calcul, et un calcul semblable effectué sur le fluide 2, donnent à l'égalité (2) la forme

$$(8)\left\{\begin{aligned} \delta^2(\mathcal{F} + \Omega) = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 \\ &+\int_{S_{12}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\ &+\int_{S_{13}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{13} \\ &+\int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1] D(\varepsilon_1\,dS_{13}) + \text{etc.},\end{aligned}\right.$$

le symbole : etc. ayant un sens analogue à celui qu'il a dans l'égalité (2).

Nous pouvons, en tous les points de la surface S_{13}, prendre

$$(9) \qquad Dx = \Delta x, \qquad Dy = \Delta y, \qquad Dz = \Delta z,$$

Δx, Δy, Δz étant les composantes du déplacement du point du corps solide dont les coordonnées initiales sont x, y, z, et étant donnés, par

conséquent, par les égalités

$$(10)\quad \begin{cases} \Delta x = \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y = \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z = \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m. \end{cases}$$

Nous aurons alors

$$\varepsilon_1 = - [\cos(N, x)\,\Delta x + \cos(N, y)\,\Delta y + \cos(N, z)\,\Delta z]$$

ou bien, en vertu des égalités (10),

$$(11)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = - \{ \cos(N, x)\,\delta f + \cos(N, y)\,\delta g + \cos(N, z)\,\delta h \\ \qquad + [y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\,\delta l \\ \qquad + [z\cos(N, x) - x\cos(N, z)]\,\delta m \\ \qquad + [x\cos(N, y) - y\cos(N, x)]\,\delta n \}. \end{cases}$$

Si nous convenons de prendre δf, δg, δh, δl, δm, δn comme variations indépendantes, nous aurons, en vertu de l'égalité (11),

$$(12)\quad \begin{cases} \Delta\varepsilon_1 = - \delta f\,\Delta\cos(N, x) - \delta g\,\Delta\cos(N, y) - \delta h\,\Delta\cos(N, z) \\ \qquad - \delta l\,[y\,\Delta\cos(N, z) - z\,\Delta\cos(N, y)] \\ \qquad - \delta l\,[\cos(N, z)\,\Delta y - \cos(N, y)\,\Delta z] \\ \qquad - \delta m\,[z\,\Delta\cos(N, x) - x\,\Delta\cos(N, z)] \\ \qquad - \delta m\,[\cos(N, x)\,\Delta z - \cos(N, z)\,\Delta x] \\ \qquad - \delta n\,[x\,\Delta\cos(N, y) - y\,\Delta\cos(N, x)] \\ \qquad - \delta n\,[\cos(N, y)\,\Delta x - \cos(N, x)\,\Delta y]. \end{cases}$$

Mais on a également

$$(13)\quad \begin{cases} \Delta\cos(N, x) = \cos(N, z)\,\delta m - \cos(N, y)\,\delta n, \\ \Delta\cos(N, y) = \cos(N, x)\,\delta n - \cos(N, z)\,\delta l, \\ \Delta\cos(N, z) = \cos(N, y)\,\delta l - \cos(N, x)\,\delta m. \end{cases}$$

En vertu des égalités (10) et (13), l'égalité (12) devient

$$(14)\quad \Delta\varepsilon_1 = 0.$$

D'ailleurs, l'élément dS_{13} est un élément d'aire invariable de la surface du solide, en sorte que

$$\Delta\, dS_{13} = 0. \tag{15}$$

En vertu des égalités (14) et (15), l'égalité (8) devient

$$\left\{\begin{aligned} \delta^2(\mathfrak{F}+\Omega) = & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 \\ & + \int_{S_{12}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\, dS_{12} \\ & + \int_{S_{13}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z\right)\varepsilon_1\, dS_{13} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Calculons maintenant $\delta^2\Omega'$.

Nous avons

$$\Omega' = \int_3 \rho_3\, U\, dv_3,$$

$$\delta\Omega' = \int_3 \rho_3\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z\right) dv_3,$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta^2\Omega' = & \int_3 \rho_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(\Delta z)^2\right. \\ & \qquad \left. + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\Delta y\,\Delta z + 2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\Delta z\,\Delta x + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y\right] dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial\,\Delta x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\,\Delta x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\,\Delta x}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 x\right) dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial y}\left(\frac{\partial\,\Delta y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\,\Delta y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\,\Delta y}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 y\right) dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial\,\Delta z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\,\Delta z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\,\Delta z}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 z\right) dv_3. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Les égalités (10) donnent

$$\frac{\partial\,\Delta x}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\,\Delta x}{\partial y} = -\,\delta n, \qquad \frac{\partial\,\Delta x}{\partial z} = \delta m,$$

$$\Delta^2 x = 0,$$

ce qui donne la première des égalités

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\Delta x}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial\,\Delta x}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial\,\Delta x}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 x = (\Delta z\,\delta m - \Delta y\,\delta n), \\ \dfrac{\partial\,\Delta y}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial\,\Delta y}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial\,\Delta y}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 y = (\Delta x\,\delta n - \Delta z\,\delta l), \\ \dfrac{\partial\,\Delta z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial\,\Delta z}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial\,\Delta z}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 z = (\Delta y\,\delta l - \Delta x\,\delta m). \end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En vertu des égalités (8), l'égalité (17) devient

$$(19)\quad \begin{cases} \delta^2\Omega' = \displaystyle\int_3 \rho_3 \Big[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(\Delta z)^2 \\ \qquad + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\Delta y\,\Delta z + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\Delta z\,\Delta x + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y\Big]\,dv_3 \\ \quad + \displaystyle\int_3 \rho_3 \Big[(\Delta z\,\delta m - \Delta y\,\delta n)\frac{\partial U}{\partial x} + (\Delta x\,\delta n - \Delta z\,\delta l)\frac{\partial U}{\partial y} \\ \qquad + (\Delta y\,\delta l - \Delta x\,\delta m)\dfrac{\partial U}{\partial z}\Big]\,dv_3. \end{cases}$$

Les égalités (16) et (19), jointes aux égalités (10) et (11), donnent

$$(20)\quad \begin{cases} \delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega') = \displaystyle\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ \quad + \displaystyle\int_{S_{12}} \rho_1\Big(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\Big)\varepsilon_1\,dS_{12} \\ \quad + \displaystyle\int_{S_{12}} \rho_2\Big(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\Big)\varepsilon_2\,dS_{12} \\ \quad + Q, \end{cases}$$

Q étant une forme quadratique des six variables

$$\delta f,\quad \delta g,\quad \delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,\quad \delta n,$$

$$(21)\quad \begin{cases} Q = A_{11}(\delta f)^2 + A_{22}(\delta g)^2 + A_{33}(\delta h)^2 \\ \quad + A_{44}(\delta l)^2 + A_{55}(\delta m)^2 + A_{66}(\delta n)^2 \\ \quad + A_{23}\,\delta g\,\delta h + A_{31}\,\delta h\,\delta f + A_{12}\,\delta f\,\delta g \\ \quad + A_{56}\,\delta m\,\delta n + A_{64}\,\delta n\,\delta l + A_{45}\,\delta l\,\delta m \\ \quad + A_{14}\,\delta f\,\delta l + A_{25}\,\delta g\,\delta m + A_{36}\,\delta h\,\delta n \\ \quad + A_{15}\,\delta f\,\delta m + A_{16}\,\delta f\,\delta n \\ \quad + A_{26}\,\delta g\,\delta n + A_{24}\,\delta g\,\delta l \\ \quad + A_{34}\,\delta h\,\delta l + A_{35}\,\delta h\,\delta m. \end{cases}$$

Les coefficients A_{ij} de cette forme ont les valeurs suivantes :

$$A_{11} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\, dv_3,$$

$$A_{22} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\, dv_3,$$

$$A_{33} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\, dv_3,$$

$$\begin{aligned}
A_{44} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ z^2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - yz \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) \right] \\
&\qquad\qquad + y^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) \Big\}\, dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ z^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) - yz \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) \right] \\
&\qquad\qquad + y^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) \Big\}\, dS_{23} \\
&+\int_3 \rho_3 \left(z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2yz \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - y \frac{\partial U}{\partial y} - z \frac{\partial U}{\partial z} \right) dv_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{55} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ x^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - zx \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z) \right] \\
&\qquad\qquad + z^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) \Big\}\, dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ x^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - zx \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z) \right] \\
&\qquad\qquad + z^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) \Big\}\, dS_{23} \\
&+\int_3 \rho_3 \left(x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2zx \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x} + z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - z \frac{\partial U}{\partial z} - x \frac{\partial U}{\partial x} \right) dv_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{66} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ y^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - xy \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) \right] \\
&\qquad\qquad + x^2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) \Big\}\, dS_{13} \\
&-\int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ y^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - xy \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) \right] \\
&\qquad\qquad + x^2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) \Big\}\, dS_{23} \\
&+\int_3 \rho_3 \left(y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - x \frac{\partial U}{\partial x} - y \frac{\partial U}{\partial y} \right) dv_3,
\end{aligned}$$

$$A_{23} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,y)\right] dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,y)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\,dv_3,$$

$$A_{31} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,z)\right] dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N,x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,z)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\,dv_3,$$

$$A_{12} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,x)\right] dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N,x)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\,dv_3,$$

$$\begin{aligned}
A_{56} = & \int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[2yz\cos(N,x) - xz\cos(N,y) - xy\cos(N,z)] \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial y}[x^2\cos(N,z) - xz\cos(N,x)] \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial z}[x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)] \Big\}\, dS_{13} \\
& + \int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[2yz\cos(N,x) - xz\cos(N,y) - zy\cos(N,z)] \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial y}[x^2\cos(N,z) - xz\cos(N,x)] \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial z}[x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)] \Big\}\, dS_{23} \\
& - \int_3 \rho_2 \Big\{ 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xz\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} \\
& \qquad + 2x^2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial z} \Big\}\, dv_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{64} = & \int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y^2\cos(N,z) - yz\cos(N,y)] \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial y}[2zx\cos(N,y) - yx\cos(N,z) - yz\cos(N,x)] \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial z}[y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)] \Big\}\, dS_{13} \\
& + \int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y^2\cos(N,z) - yz\cos(N,y)] \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial y}[2zx\cos(N,y) - yx\cos(N,z) - yz\cos(N,x)] \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial z}[y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)] \Big\}\, dS_{23}
\end{aligned}$$

$$-\int_3 \rho_3 \left\{ 2zx\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} \right.$$
$$\left. + 2y^2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial x} \right\} dv_3,$$

$$A_{45} = \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}[z^2\cos(N,y) - zy\cos(N,z)] \right.$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}[z^2\cos(N,x) - zy\cos(N,z)]$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial z}[2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)] \right\} dS_{13}$$
$$+\int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}[z^2\cos(N,y) - zy\cos(N,z)] \right.$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}[z^2\cos(N,x) - zx\cos(N,z)]$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial z}[2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)] \right\} dS_{23}$$
$$-\int_3 \rho_3 \left\{ 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2zy\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - 2zx\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} \right.$$
$$\left. + 2z^2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y} \right\} dv_3,$$

$$A_{14} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y\cos(N,z) - z\cos(N,y)] \right.$$
$$\left. + \cos(N,x)\left(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y}\right) \right\} dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y\cos(N,z) - z\cos(N,y)] \right.$$
$$\left. + \cos(N,x)\left(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y}\right) \right\} dS_{23}$$
$$+ 2\int_3 \rho_3 \left(y\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} - z\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} \right) dv_3,$$

$$A_{25} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}[z\cos(N,x) - x\cos(N,z)] \right.$$
$$\left. + \cos(N,y)\left(z\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial z}\right) \right\} dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}[z\cos(N,x) - x\cos(N,z)] \right.$$
$$\left. + \cos(N,y)\left(z\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial z}\right) \right\} dS_{23}$$
$$+ 2\int \rho_3 \left(z\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} - x\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} \right) dv_3,$$

$$A_{36} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)] + \cos(N, z)\left(x \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right\} dS_{13}$$

$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)] + \cos(N, z)\left(x \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right\} dS_{23}$$

$$+ 2\int_{3} \rho_3 \left(x \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y} - y \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x}\right) dv_3,$$

$$A_{15} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z)\right] \right\} dS_{13}$$

$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z)\right] \right\} dS_{23}$$

$$+ \int_{3} \rho_3 \left(2z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dv_3,$$

$$A_{26} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x)\right] \right\} dS_{13}$$

$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x)\right] \right\} dS_{23}$$

$$+ \int_{3} \rho_3 \left(2x \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dv_3,$$

$$A_{34} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{13}$$

$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{23}$$

$$+ \int_{3} \rho_3 \left(2y \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dv_3,$$

$$A_{16} = \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{13}$$

$$+ \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{23}$$

$$- \int_{3} \rho_3 \left(2y \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial U}{\partial y}\right) dv_3,$$

$$
\begin{aligned}
A_{24} = & \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) \right] \right\} dS_{13} \\
& + \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) \right] \right\} dS_{23} \\
& - \int_3 \rho_3 \left(2z \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial^2 U}{\partial y \, \partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) dv_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{35} = & \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) \right] \right\} dS_{13} \\
& + \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) \right] \right\} dS_{23} \\
& - \int_3 \rho_3 \left(2x \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial^2 U}{\partial z \, \partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) dv_3.
\end{aligned}
$$

Ces égalités, jointes aux égalités (20) et (21), font connaître la forme de la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$, dans le cas particulier où l'état initial du système est un état d'équilibre. Pour calculer plus brièvement cette quantité, nous avons supposé que les variations

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n$$

étaient des variations arbitraires, en sorte que l'on eût

$$\delta^2 f = 0, \quad \delta^2 g = 0, \quad \delta^2 h = 0, \quad \delta^2 l = 0, \quad \delta^2 m = 0, \quad \delta^2 n = 0.$$

Nous aurions pu ne pas faire cette hypothèse; la quantité

$$\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$$

aurait alors renfermé une fonction linéaire et homogène de

$$\delta^2 f, \quad \delta^2 g, \quad \delta^2 h, \quad \delta^2 l, \quad \delta^2 m, \quad \delta^2 n.$$

Mais les égalités (28) du Chapitre II nous auraient permis de démontrer que cette fonction est identiquement nulle lorsque l'état initial du système est un état d'équilibre.

§ II. — *Stabilité de l'équilibre d'un système de fluides qui renferme un flotteur.*

Une transformation analogue à celle qui a fourni l'égalité (50) du Chapitre précédent permet d'écrire l'égalité (20) sous la forme

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}\delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\Omega') = {} & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ & - \int_{S_{12}} (\rho_2-\rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2}\varepsilon_1^2\,dS_{12} + Q.\end{aligned}\right.$$

Nous avons admis que, quels que soient les fluides 1 et 2, on avait [Chapitre I, inégalités (48)],

$$(23)\qquad \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} > 0, \qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} > 0.$$

Ces inégalités admises, nous allons chercher s'il est possible de marquer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait, pour tout déplacement du système, l'inégalité

$$(24)\qquad \delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\Omega') > 0.$$

Ces conditions seront les conditions de stabilité du système.

Imaginons que l'on maintienne le flotteur immobile; que l'on garde une densité invariable au fluide qui remplit chaque élément de volume du système; on pourra néanmoins déformer la surface S_{12}, cette déformation étant simplement soumise à la condition

$$\int_{S_{12}} \varepsilon_1\,dS_{12} = 0.$$

L'inégalité (24) se réduira, dans ce cas, à

$$\int_{S_{12}} (\rho_2-\rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2}\varepsilon_1^2\,dS_{12} < 0.$$

Cette inégalité entraîne, comme nous l'avons vu à la fin du Cha-

pitre I, la conséquence suivante, qui est une PREMIÈRE CONDITION NÉCESSAIRE POUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie prise sur la surface de contact des deux fluides; en tout point de cette surface où elle est différente de o, *elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.*

On peut imaginer des déplacements qui laissent invariable la densité du fluide qui remplit chacun des éléments de volume du système; seulement, en exprimant que la masse de chacun des deux fluides doit demeurer invariable, on trouve que de semblables déplacements sont assujettis aux conditions suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1\varepsilon_1\, dS_{13} = 0, \\ \int_{S_{12}} \rho_2\varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2\varepsilon_2\, dS_{23} = 0. \end{cases}$$

Si l'on remarque que les densités ρ_1, ρ_2 ont des valeurs constantes le long de la surface S_{12}, ces égalités peuvent s'écrire

$$(26)\quad \begin{cases} \rho_1 \int_{S_{12}} \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1\varepsilon_1\, dS_{13} = 0, \\ \rho_2 \int_{S_{12}} \varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2\varepsilon_2\, dS_{23} = 0. \end{cases}$$

On peut même assujettir un tel déplacement à ne pas déformer la surface de séparation S_{12}; dans ce cas, les égalités (26) deviennent

$$\int_{S_{13}} \rho_1\varepsilon_1\, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} \rho_2\varepsilon_2\, dS_{23} = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$(27)\quad \begin{cases} \delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,x)\, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,y)\, dS_{13} + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,z)\, dS_{13} \\ \quad + \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\, dS_{13} \\ \quad + \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{13} \\ \quad + \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{13} = 0, \end{cases}$$

et une égalité analogue, qui se déduit de la précédente en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2, et que nous désignerons par (27 *bis*).

Lorsque les six quantités δf, δg, δh, δl, δm, δn vérifient ces deux relations (27) et (27 *bis*) on peut prendre :

$\delta\rho_1 = 0$, en tout point du fluide 1 ;
$\delta\rho_2 = 0$, en tout point du fluide 2 ;
$\varepsilon_1 = 0$, en tout point de la surface S_{12}.

L'inégalité (24) se réduit alors à

$$Q > 0.$$

Cette inégalité nous donne une SECONDE CONDITION NÉCESSAIRE POUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME :

La forme quadratique Q *des six variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn *doit être une forme définie positive toutes les fois que ces six variables vérifient les deux relations linéaires et homogènes* (27) *et* (27 *bis*).

Nous venons de trouver deux conditions qui sont nécessaires pour que l'équilibre du système soit un équilibre stable; mais il n'est pas prouvé que ces conditions suffisent à assurer la stabilité de cet équilibre; inversement, nous pouvons énoncer deux CONDITIONS QUI SUFFISENT A ASSURER LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME; mais la seconde de ces conditions peut n'être pas nécessaire.

Voici ces conditions :

1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact des deux fluides; en tout point de cette surface où elle est différente de* 0, *elle est dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.*

2° *La forme quadratique* Q *des six variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn *est une forme définie positive, quelles que soient les valeurs attribuées à ces variables; ou, du moins, elle ne devient nulle que pour des valeurs de ces variables qui ne vérifient pas à la fois les égalités* (27) *et* (27 *bis*).

Considérons, en effet, la quantité $\delta^2(\mathfrak{F} + \Omega + \Omega')$ donnée par l'éga-

lité (22); notre première condition empêche le troisième terme d'être jamais négatif; notre seconde condition produit le même effet sur le quatrième terme; quant aux deux premiers, en vertu des inégalités (23), ils ne sont jamais négatifs. De plus, les quatre termes ne pourront être simultanément égaux à o; le quatrième, en effet, ne peut devenir égal à o que pour des valeurs de δf, δg, δh, δl, δm, δn qui ne vérifient pas à la fois les deux relations (27) et (27 *bis*); dans ce cas, l'un au moins des trois premiers termes, doit être différent de zéro.

§ III. — *Cas où les deux fluides confinent par une surface illimitée.*

La surface fixe qui enferme les deux fluides et le flotteur a des dimensions limitées; mais il peut se faire que la fonction potentielle V puisse se prolonger indéfiniment d'une manière analytique en dehors de cette surface; on pourra alors supposer que l'on prenne successivement des surfaces closes de plus en plus grandes, et que l'on donne à la surface de contact des deux fluides des dimensions de plus en plus grandes. C'est dans ce cas que nous allons maintenant nous placer.

Nous remarquerons, en premier lieu, que lorsqu'on étend ainsi, de plus en plus, l'aire de la surface de contact des deux fluides, en prolongeant analytiquement cette surface, on ne modifie pas les valeurs des coefficients de la forme quadratique Q.

Supposons que la forme Q puisse être rendue négative par un choix convenable des six variations

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n.$$

Si ces six quantités ne vérifient pas les conditions (27) et (27 *bis*), et si la surface qui enferme les deux fluides et le flotteur a des dimensions données, il n'est pas certain que l'équilibre du flotteur ne soit pas stable; mais nous allons démontrer que, *si l'on suppose variables les dimensions de la surface de contact des deux fluides, on pourra toujours prendre l'aire de cette surface assez grande pour que, dans le cas considéré, l'équilibre du système ne soit plus stable.*

Prenons, en effet, une surface S_{12} déterminée.

Nous pourrons imposer au système une variation virtuelle définie de la manière suivante :

1° Les éléments du déplacement du corps solide ont les valeurs considérées δf, δg, δh, δl, δm, δn, qui donnent à Q une valeur négative ;

2° La quantité $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ a la même valeur en tout point de la surface S_{12} ;

3° La quantité $\delta\rho_1$ a la même valeur en tout point du fluide 1 ;

4° La quantité $\delta\rho_2$ a la même valeur en tout point du fluide 2 ;

Ces diverses quantités sont liées par les relations qui expriment que chacun des fluides 1 et 2 garde une masse invariable ; ces relations sont l'égalité

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \delta\rho_1\, dv_1 - \int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} \\ &\quad + \delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,x)\, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,y)\, dS_{13} \\ &\qquad\qquad + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,z)\, dS_{13} \\ &\quad + \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\, dS_{13} \\ &\quad + \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{13} \\ &\quad + \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{13} = 0 \end{aligned}\right.$$

et une égalité, que nous désignerons par (28 *bis*), et qui se déduit de la précédente en permutant les indices 1 et 2.

Ce déplacement peut faire prendre à la quantité $\delta^2(\mathfrak{F} + \Omega + \Omega')$ une valeur positive, bien que Q ait une valeur négative, car les trois termes

$$(\delta\rho_1)^2 \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\, dv_1, \quad (\delta\rho_2)^2 \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\, dv_2, \quad (\rho_1 - \rho_2)\varepsilon_1^2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_2}\, dS_{12}$$

ont des valeurs positives.

Faisons maintenant croître les dimensions de la surface close qui enferme le système; l'aire de la surface S_{12} est multipliée par le nombre λ; le volume occupé par le fluide 1 est multiplié par le nombre μ_1; le volume occupé par le fluide 2 est multiplié par le nombre μ_2.

On voit sans peine que l'on vérifiera les égalités (28) et (28 *bis*) en prenant pour ε_1, $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ de nouvelles valeurs ε'_1, $\delta\rho'_1$, $\delta\rho'_2$, telles que

$$\lambda\varepsilon'_1 = \varepsilon_1, \qquad \mu_1\delta\rho'_1 = \delta\rho_1, \qquad \mu_2\delta\rho'_2 = \delta\rho_2.$$

Les valeurs des intégrales

$$\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\,dv_1, \quad \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\,dv_2, \quad \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_2}\,dS_{12}$$

seront multipliées par des nombres qui seront respectivement de l'ordre de μ_1, μ_2, λ. Par conséquent, dans l'expression de

$$\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega'),$$

le terme Q, qui est négatif, gardera une valeur invariable, tandis que les valeurs positives des termes

$$(\delta\rho_1)^2\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\,dv_1, \quad (\delta\rho_2)^2\int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\,dv_2, \quad (\rho_1 - \rho_2)\varepsilon_1^2\int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_2}\,dS_{12}$$

seront multipliées par des nombres de l'ordre de $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$, $\frac{1}{\lambda}$.

On pourra donc toujours prendre μ_1, μ_2, λ assez grands pour que la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$ soit négative, ce qui démontre la proposition énoncée.

Il résulte de cette proposition que si deux fluides, portant un flotteur, confinent par une surface illimitée, l'équilibre du système sera instable si la forme Q peut être rendue négative.

En rapprochant cette proposition de celles qui ont été démontrées au paragraphe précédent et qui sont indépendantes de l'aire de la surface de contact des deux fluides, nous arrivons à énoncer de la manière suivante les CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES *pour la*

stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface illimitée qui sépare deux fluides :

1° *La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie prise sur la surface de contact des deux fluides ; en tout point où cette force est différente de zéro, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense ;*

2° *La forme quadratique* Q *ne doit être négative pour aucun ensemble de valeurs de* δf, δg, δh, δl, δm, δn ; *elle ne doit pas être nulle pour un ensemble de valeurs des mêmes quantités vérifiant les égalités* (27) *ou* (27 *bis*).

Ainsi, dans le cas particulier où les deux fluides qui portent le flotteur confinent par une surface illimitée, le problème de la stabilité de l'équilibre des corps flottants est complètement résolu.

§ IV. — *Cas où les forces extérieures se réduisent à la pesanteur.*

Prenons l'axe des z dirigé vers le zénith; si les forces extérieures qui agissent sur le flotteur et sur le corps solide se réduisent à la pesanteur, et si nous désignons par g l'intensité de la pesanteur, nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = g,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = g.$$

Les égalités données à la fin du § I, qui font connaître les coefficients A_{ij}, deviendront

$$A_{11} = 0,$$
$$A_{22} = 0,$$
$$A_{33} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, z)\, dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N, z)\, dS_{23},$$
$$A_{44} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{13}$$
$$-g\int_{S_{23}} \rho_2 y[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{23} - g\int_{3} \rho_3 z\, dv_3,$$

$$A_{55} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 x[x\cos(N,z) - z\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$- g\int_{S_{23}} \rho_2 x[x\cos(N,z) - z\cos(N,x)]\,dS_{23} - g\int_3 \rho_3 z\,dv_3,$$

$$A_{66} = 0,$$

$$A_{23} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,y)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N,y)\,dS_{23},$$

$$A_{31} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,x)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N,x)\,dS_{23},$$

$$A_{12} = 0,$$

$$A_{56} = \quad g\int_{S_{13}} \rho_1 [x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 [x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)]\,dS_{23} + g\int_3 \rho_3 y\,dv_3,$$

$$A_{64} = \quad g\int_{S_{13}} \rho_1 [y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)]\,dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 [y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)]\,dS_{23} + g\int_3 \rho_3 x\,dv_3,$$

$$A_{45} = \quad g\int_{S_{13}} \rho_1 [2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\,dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{13}} \rho_2 [2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\,dS_{23},$$

$$A_{14} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y\cos(N,x)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 y\cos(N,x)\,dS_{23},$$

$$A_{25} = \quad g\int_{S_{13}} \rho_1 x\cos(N,y)\,dS_{13} + g\int_{S_{23}} \rho_2 x\cos(N\,y)\,dS_{23},$$

$$A_{36} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$- g\int_{S_{23}} \rho_2 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{23},$$

$$A_{15} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 x\cos(N,x)\,dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 x\cos(N,x)\,dS_{23} - g\int_3 \rho_3\,dv_3,$$

$$A_{26} = 0,$$

$$A_{34} = g\int_{S_{13}} \rho_1 [z\cos(N, y) - 2y\cos(N, z)]\, dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 [z\cos(N, y) - 2y\cos(N, z)]\, dS_{23},$$
$$A_{16} = 0,$$
$$A_{24} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y\cos(N, y)\, dS_{13}$$
$$- g\int_{S_{23}} \rho_2 y\cos(N, y)\, dS_{23} - g\int \rho_3\, dv_3,$$
$$A_{35} = g\int_{S_{13}} \rho_1 [2x\cos(N, z) - z\cos(N, x)]\, dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 [2x\cos(N, z) - z\cos(N, x)]\, dS_{23}.$$

Six de ces coefficients, les coefficients A_{11}, A_{22}, A_{66}, A_{12}, A_{26}, A_{16} sont égaux à o; nous ne devons pas nous en étonner; en effet, il est évident *a priori* que la forme Q doit être identiquement nulle lorsque l'on a

$$\delta h = 0, \qquad \delta m = 0, \qquad \delta n = 0.$$

Une modification, infiniment petite ou finie, qui consiste exclusivement en une translation du flotteur parallèlement à la surface de contact des deux fluides et une rotation autour d'un axe normal à cette surface ne change en rien la valeur du potentiel thermodynamique du système; pour de tels déplacements, l'équilibre du système est indifférent; c'est seulement lorsqu'on les exclut qu'il peut être question de stabilité de l'équilibre.

§ V. — *Cas où les deux fluides en contact sont homogènes.*

L'expression de la forme Q devient beaucoup plus simple lorsque l'on suppose homogènes les deux fluides 1 et 2, soit qu'on les regarde comme incompressibles, soit que l'on néglige les variations que la densité de chacun de ces fluides éprouve d'un point à l'autre par l'effet de la pesanteur.

Pour transformer, dans ce cas, l'expression des coefficients A_{ij},

nous ferons usage des formules bien connues

$$(29)\quad \begin{cases} \int F \cos(n_e, x)\, dS = \int \frac{\partial F}{\partial x}\, dv, \\ \int F \cos(n_e, y)\, dS = \int \frac{\partial F}{\partial y}\, dv, \\ \int F \cos(n_e, z)\, dS = \int \frac{\partial F}{\partial z}\, dv, \end{cases}$$

dans lesquelles les intégrales des premiers membres s'étendent à une surface fermée S et les intégrales du second membre au volume v qu'enferme cette surface; n_e est la normale extérieure à la surface S.

Transformation du coefficient A_{33}. — Nous avons, d'après les formules du numéro précédent,

$$A_{33} = -g\rho_1 \int_{S_{13}} \cos(N, z)\, dS_{13} - g\rho_2 \int_{S_{23}} \cos(N, z)\, dS_{23}.$$

Prolongeons, à l'intérieur du solide, la surface plane S_{12}; soit S'_{12} ce prolongement; soit Σ l'aire de la surface S'_{12}; appliquons la troisième égalité (29) à la surface fermée que forment les surfaces S_{13} et S'_{12}; nous trouverons sans peine

$$\int_{S_{13}} \cos(N, z)\, dS_{13} + \int_{S'_{12}} \cos(n_2, z)\, dS'_{12} = 0.$$

Mais, en tout point de la surface S'_{12}, $\cos(n_2, z) = 1$, *si nous supposons le fluide* 2 *superposé au fluide* 1. L'égalité précédente nous donne alors

$$\int_{S_{13}} \cos(N, z)\, dS_{13} = -\Sigma.$$

Nous aurons de même

$$\int_{S_{23}} \cos(N, z)\, dS_{23} = \Sigma$$

et, partant,

$$A_{33} = g(\rho_1 - \rho_2)\Sigma.$$

Transformation des coefficients A_{44} *et* A_{55}. — Nous avons

$$A_{44} = -g\rho_1 \int_{S_{13}} [y^2 \cos(N, z) - zy \cos(N, y)]\, dS_{13}$$
$$- g\rho_2 \int_{S_{23}} [y^2 \cos(N, z) - zy \cos(N, y)]\, dS_{23} - g \int \rho_3 z\, dv_3.$$

La troisième égalité (29), appliquée à la surface fermée $S_{13} S'_{12}$, donne

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{S_{13}} y^2 \cos(N, z)\, dS_{13} + \int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} = 0. \\ \quad \text{On a, de même,} \\ \displaystyle\int_{S_{23}} y^2 \cos(N, z)\, dS_{23} - \int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} = 0. \end{array} \right.$$

La seconde égalité (29), appliquée à la même surface fermée, donne

$$\int_{S_{13}} zy \cos(N, y)\, dS_{13} = \int z\, dv'_1,$$

v'_1 étant le volume compris entre les surfaces S'_{12} et S_{13}.

On a, de même,

$$\int_{S_{23}} zy \cos(N, y)\, dS_{23} = \int z\, dv'_2,$$

v'_2 étant le volume compris entre les surfaces S_{23} et S'_{12}.

Soient

ξ, η_1, ζ_1 les coordonnées du centre de gravité du fluide 1 qui remplirait le volume v'_1;

ξ_2, η_2, ζ_2 les coordonnées du centre de gravité du fluide 2 qui remplirait le volume v'_2;

M'_1 la masse du premier fluide;

M'_2 la masse du second fluide.

Nous aurons, d'après les égalités précédentes,

$$(b)\qquad \begin{cases} \rho_1 \int_{S_{13}} zy\cos(N,y)\,dS_{13} = \zeta_1 M'_1, \\ \rho_2 \int_{S_{23}} zy\cos(N,y)\,dS_{23} = \zeta_2 M'_2. \end{cases}$$

Soient ξ_3, η_3, ζ_3 les coordonnées du centre de gravité du solide; M_3 sa masse; nous aurons

$$(c)\qquad \int_3 \rho_3 z\,dv_3 = M_3\zeta_3.$$

Les égalités (a), (b) et (c) nous donneront

$$A_{44} = g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12} + g(M'_1\zeta_1 - M'_2\zeta_2 - M_3\zeta_3),$$

Désignons par Ξ, H, Z les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble des fluides déplacés par le corps solide; nous aurons

$$M'_1\zeta_1 + M'_2\zeta_2 = (M'_1 + M'_2)Z.$$

D'ailleurs, d'après le principe d'Archimède,

$$M'_1 + M'_2 = M_3.$$

On a donc, tout calcul fait,

$$A_{44} = g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3).$$

On a de même

$$A_{55} = g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} z^2\,dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3).$$

Transformation des coefficients A_{23}, A_{31}. — Nous avons

$$A_{23} = -g\rho_1\int_{S_{13}} \cos(N,y)\,dS_{13} - g\rho_2\int_{S_{23}} \cos(N,y)\,dS_{23}.$$

La deuxième égalité (29), appliquée à la surface fermée formée par S_{13} et S'_{12} donne

$$\int_{S_{13}} \cos(N, y)\, dS_{13} = 0.$$

On a également

$$\int_{S_{23}} \cos(N, y)\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{23} = 0.$$

On a de même

$$A_{31} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{56}, A_{64}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{56} = {} & g\rho_1 \int_{S_{13}} [x^2 \cos(N, y) - xy \cos(N, x)]\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} [x^2 \cos(N, y) - xy \cos(N, x)]\, dS_{23} + g\int \rho_3 y\, dv_3 \end{aligned}$$

On trouve sans peine, par les égalités (29),

$$\int_{S_{13}} x^2 \cos(N, y)\, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} x^2 \cos(N, y)\, dS_{23} = 0,$$

$$\int_{S_{13}} xy \cos(N, x)\, dS_{13} = \int y\, dv'_1,$$

$$\int_{S_{23}} xy \cos(N, x)\, dS_{23} = \int y\, dv'_2,$$

en sorte que l'on peut écrire

$$A_{56} = g(M_3\eta_3 - M'_1\eta_1 - M'_2\eta_2) = gM_3(\eta_3 - H).$$

Mais le centre de gravité du flotteur et le centre de gravité de l'ensemble des fluides déplacés sont sur une même verticale; on a donc

$$\eta_3 - H = 0$$

et

$$A_{56} = 0.$$

On a de même

$$A_{64} = 0.$$

Transformation du coefficient A_{45}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{45} = {} & g\rho_1 \int_{S_{13}} [2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} [2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\, dS_{23}. \end{aligned}$$

On trouve sans peine, à l'aide des formules (29),

$$\int_{S_{13}} xy\cos(N,z)\, dS_{13} = -\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12},$$

$$\int_{S_{23}} xy\cos(N,z)\, dS_{23} = \int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12},$$

$$\int_{S_{13}} z[y\cos(N,x) + x\cos(N,y)]\, dS_{13} = 0,$$

$$\int_{S_{23}} z[y\cos(N,x) + x\cos(N,y)]\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{45} = -2g(\rho_1 - \rho_3)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12}.$$

Transformation des coefficients A_{14}, A_{25}. — Nous avons

$$A_{14} = -g\rho_1 \int_{S_{13}} y\cos(N,x)\, dS_{13} - g\rho_2 \int_{S_{32}} y\cos(N,x)\, dS_{23}.$$

On trouve sans peine, par les formules (29),

$$\int_{S_{13}} y\cos(N,x)\, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} y\cos(N,x)\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{14} = 0.$$

De même,

$$A_{25} = 0.$$

Transformation du coefficient A_{36}. — Il suffit de remarquer que l'on a

$$A_{36} = -(A_{14} + A_{25})$$

pour trouver

$$A_{36} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{15}, A_{24}. — Nous avons

$$A_{15} = g\rho_1 \int_{S_{13}} x\cos(N, x)\,dS_{13} + g\rho_2 \int_{S_{23}} x\cos(N, x)\,dS_{23} - g\int \rho_3\,dv_3.$$

Les formules (29) donnent

$$\int_{S_{13}} x\cos(N, x)\,dS_{13} = v'_1,$$

$$\int_{S_{23}} x\cos(N, x)\,dS_{23} = v'_2.$$

On a donc

$$A_{15} = g(M'_1 + M'_2 - M_3).$$

Mais, d'après le principe d'Archimède,

$$M'_1 + M'_2 = M_3.$$

On a donc

$$A_{15} = 0$$

et de même

$$A_{24} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{34}, A_{35}. — Nous avons

$$A_{34} = g\rho_1 \int_{S_{13}} [z\cos(N, y) - 2y\cos(N, z)]\,dS_{13} + g\rho_2 \int_{S_{23}} [z\cos(N, y) - 2y\cos(N, z)]\,dS_{23}.$$

Les formules (29) nous donnent sans peine

$$\int_{S_{13}} z\cos(N, y)\,dS_{13} = 0,$$

$$\int_{S_{32}} z\cos(N, y)\,dS_{23} = 0,$$

$$\int_{S_{13}} y\cos(N, z)\,dS_{13} = -\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12},$$

$$\int_{S_{23}} y\cos(N, z)\,dS_{23} = \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}$$

et, par conséquent,

$$A_{34} = 2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}.$$

On a de même

$$A_{35} = -2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}.$$

Les calculs que nous venons de faire nous apprennent que, *dans le cas où le flotteur est porté par deux fluides homogènes soumis à la seule action de la pesanteur, la forme quadratique* Q *peut s'écrire*

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} Q = {} & g(\rho_1 - \rho_2)\Sigma(\delta h)^2 \\ & + \left[g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3)\right](\delta l)^2 \\ & + \left[g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x^2\,dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3)\right](\delta m)^2 \\ & - \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12}\right]\delta l\,\delta m \\ & + \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}\right]\delta h\,\delta l \\ & - \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}\right]\delta h\,\delta m. \end{aligned}\right.$$

Cette forme donnée à la quantité Q suppose l'axe des z vertical et, par conséquent, le plan des xy horizontal; mais elle ne suppose rien de plus au sujet des axes de coordonnées. Par un choix plus particulier des axes de coordonnées, on peut lui donner une forme beaucoup plus simple.

En premier lieu, *imaginons que l'on fasse passer l'axe des z par le centre de gravité γ de l'aire Σ de la section à fleur d'eau S'_{12}*; nous aurons

$$\int_{S'_{12}} x\, dS'_{12} = 0, \qquad \int_{S'_{12}} y\, dS'_{12} = 0. \tag{31}$$

En second lieu, si par le centre de gravité γ de la section à fleur d'eau on mène, dans le plan de cette section, un axe mobile, le moment d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport à cet axe D variera lorsqu'on fera tourner cet axe D autour du point γ. On sait qu'il existe une position de l'axe D pour laquelle le moment d'inertie est maximum, et une position de l'axe D pour laquelle le moment d'inertie est minimum; ces deux positions sont rectangulaires; on les nomme les *axes principaux d'inertie de la section* S'_{12}; les moments d'inertie de la section S'_{12} par rapport à ces axes sont les *moments d'inertie principaux* de cette section. *Prenons les axes* Ox, Oy, *parallèles aux axes principaux d'inertie de la section à fleur d'eau;* désignons par J_x, J_y les moments principaux d'inertie qui se rapportent respectivement à l'axe parallèle à Ox et à l'axe parallèle à Oy. Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} = J_x, \\ &\int_{S'_{12}} x^2\, dS'_{12} = J_y, \\ &\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12} = 0. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

En vertu des égalités (31) et (32), l'égalité (30) se réduit à

$$\left\{\begin{aligned} Q = {} & g(\rho_1 - \rho_2)\Sigma(\delta h)^2 \\ & + [g(\rho_1 - \rho_2)J_x + M_3 g(Z - \zeta_3)](\delta l)^2 \\ & + [g(\rho_1 - \rho_2)J_y + M_3 g(Z - \zeta_3)](\delta m)^2. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Dans le cas où les fluides 1 et 2 sont homogènes, les égalités (27) et (27 *bis*) se réduisent à la forme unique

$$(34) \qquad \Sigma\,\delta h + \delta l \int_{S'_{12}} y\, dS'_{12} - \delta m \int_{S'_{12}} x\, dS'_{12} = 0.$$

Si l'on fait passer l'axe des z par le centre de gravité γ de la section à fleur d'eau, cette égalité se réduit à

$$(35) \qquad \delta h = 0.$$

Les égalités (33) et (35) nous permettent de donner les CONDITIONS QUI SONT NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES *pour la stabilité de l'équilibre d'un corps solide pesant flottant à la surface de séparation de deux fluides homogènes pesants*.

Si nous nous reportons à ce que nous avons dit à la fin du § II, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

1° Il est *nécessaire* que le fluide le moins dense soit superposé au fluide le plus dense, ce qu'exprime l'inégalité

$$(36) \qquad \rho_1 - \rho_2 > 0.$$

Il est *nécessaire* que la forme Q soit positive pour tous les déplacements du solide qui vérifient l'égalité (35), ce qui, en vertu de l'égalité (33), donne les inégalités

$$(37) \qquad \begin{cases} M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_x > 0, \\ M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_y > 0. \end{cases}$$

2° Il est *suffisant* que le fluide le moins dense soit superposé au fluide le plus dense et qu'en outre la quantité Q soit positive pour tous les déplacements du solide. Or ces conditions suffisantes sont vérifiées lorsque les conditions nécessaires (36) et (37) le sont.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre d'un corps solide pesant qui flotte à la surface de séparation de deux fluides homogènes pesants soit un

équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait les trois inégalités

$$(36) \qquad \rho_1 - \rho_2 > 0,$$

$$(37) \qquad \begin{cases} M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_x > 0, \\ M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_y > 0. \end{cases}$$

On suppose exclus, bien entendu, les déplacements pour lesquels on aurait

$$\delta h = 0, \qquad \delta l = 0, \qquad \delta m = 0;$$

pour de tels déplacements, l'*équilibre du système est indifférent.*

Les conditions de stabilité obtenues sont indépendantes de l'aire de la surface de contact des deux fluides; par conséquent, *elles s'appliquent même au cas où les deux fluides sont en contact par une surface illimitée.*

Des deux inégalités (37), une seule est nécessaire; des deux moments d'inertie principaux, J_x, J_y, il en est un qui est plus petit que l'autre, à moins qu'ils ne soient égaux entre eux; soit j la plus petite des deux quantités J_x, J_y; les deux inégalités (37) pourront être remplacées par l'inégalité unique

$$(38) \qquad M_3(Z - \zeta_3) + (\rho_1 - \rho_2) j > 0.$$

On reconnaît sans peine dans cette inégalité la condition trouvée par Poisson et Duhamel et critiquée par Clebsch.

Nous pouvons donc, en dernière analyse, énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre d'un corps solide pesant qui flotte sur la surface de séparation, limitée ou illimitée, de deux fluides homogènes pesants soit un équilibre stable, il faut et il suffit : 1° que le fluide le moins dense soit superposé au fluide le plus dense; 2° que le petit métacentre soit au-dessus du centre de gravité du corps solide.

Nos formules générales nous redonnent donc la règle classique de la

stabilité de l'équilibre des corps flottants; elles la démontrent par une méthode qui nous paraît exempte de toute contestation.

Il nous est possible maintenant d'expliquer pourquoi le raisonnement de M. Guyou, bien qu'inexact, conduisait dans le cas actuel à des conclusions exactes.

Le raisonnement de M. Guyou consiste, comme nous l'avons vu, à partager toute modification du système en trois modifications composantes :

1° Une déformation de la surface de séparation des deux fluides;

2° Une translation verticale du corps flottant;

3° Un déplacement qui n'altère pas le volume immergé, c'est-à-dire une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité de l'aire de la section à fleur d'eau.

M. Guyou cherche la condition pour que le centre de gravité du système s'élève en chacune de ces modifications isolées; en d'autres termes, il cherche à rendre positive la variation seconde du potentiel relative à chacune des modifications isolées.

Il admet alors que la variation seconde du potentiel relative à la modification la plus générale du système est positive.

En général, ce raisonnement ne serait pas valable, parce que la variation seconde du potentiel d'un système relative à la modification la plus générale de ce système n'est pas la somme des variations secondes relatives à des modifications partielles en lesquelles la modification la plus générale peut se décomposer.

Mais cette proposition, qui n'est ordinairement pas vraie, se trouve être exacte dans le cas particulier qui nous occupe.

En effet, la variation seconde du potentiel thermodynamique du système est, pour la modification la plus générale, en vertu des égalités (20) et (33),

$$\begin{aligned}\delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\Omega')=(\rho_1-\rho_2)g\int_{S_{12}}\varepsilon_1^2\,dS_{12}&+(\rho_1-\rho_2)g\Sigma(\delta h)^2\\&+[(\rho_1-\rho_2)gJ_x+M_3g(Z-\zeta_3)](\delta l)^2\\&+[(\rho_1-\rho_2)gJ_y+M_3g(Z-\zeta_3)](\delta m)^2.\end{aligned}$$

Or le premier terme représente précisément la variation seconde rela-

tive à la première modification composante considérée par M. Guyou; le deuxième terme représente la variation seconde relative à la deuxième modification composante; et les deux derniers termes représentent la variation seconde relative à la troisième modification composante. Ainsi la variation seconde du potentiel, relativement à la modification la plus générale est bien la somme des variations secondes relatives aux trois modifications partielles que M. Guyou a imaginées.

Mais l'exactitude de cette proposition tient à une circonstance particulière au cas que nous venons de traiter; cette circonstance, c'est l'absence de termes en $\delta l\,\delta h$ et en $\delta m\,\delta h$. Elle cesserait d'être exacte, même pour le cas de la pesanteur, si les deux fluides étaient assez compressibles pour cesser d'être sensiblement homogènes.

Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide;

PAR M. P. DUHEM.

Introduction.

A la surface de séparation S_{12} de deux fluides quelconques, 1 et 2, soumis à des forces quelconques, flotte un corps solide 3. Ce corps porte du lest liquide qui y peut être contenu de deux manières :

Tantôt (*fig.* 1), une cavité entièrement close contient deux fluides,

Fig. 1.

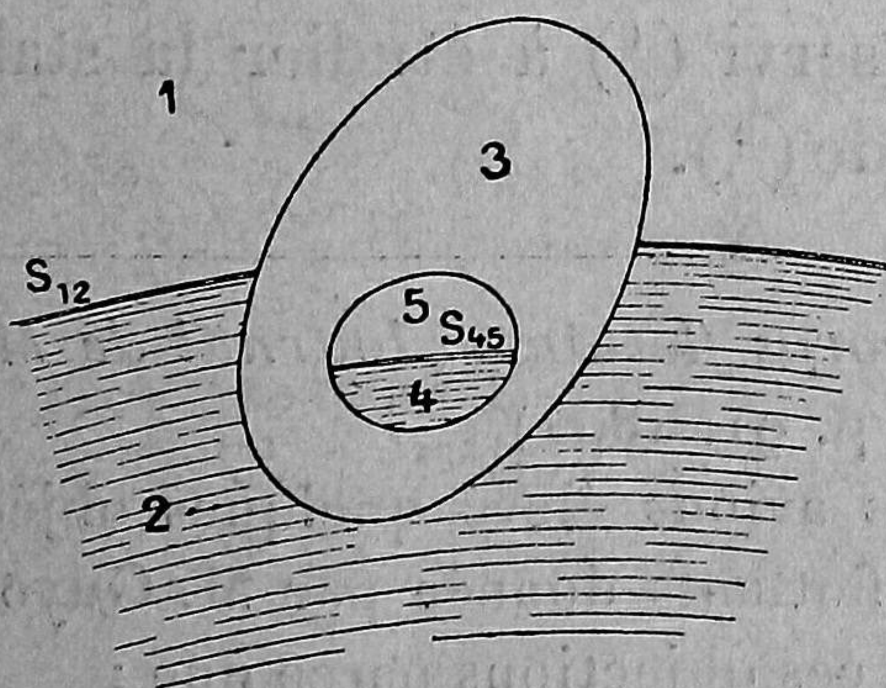
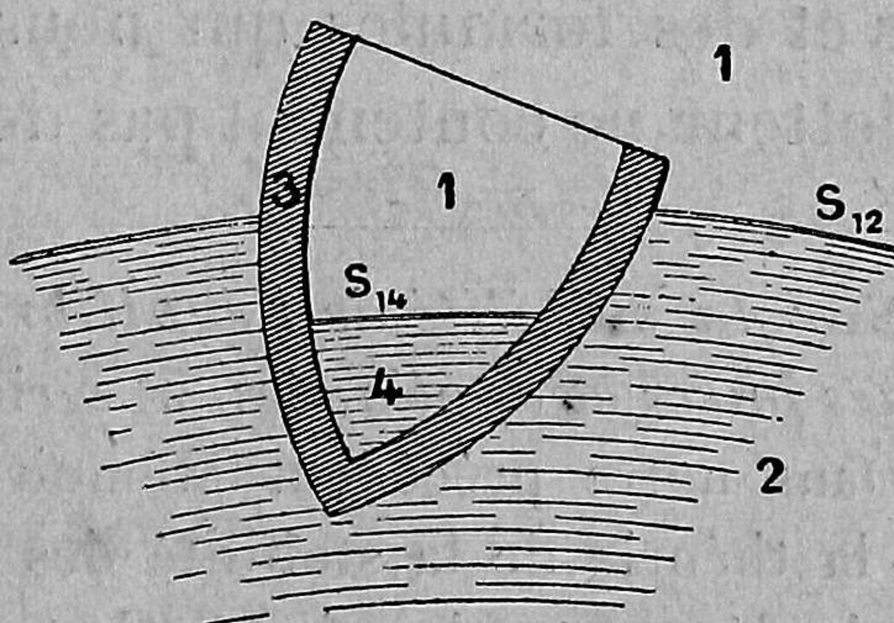


Fig. 2.



4 et 5, superposés suivant une surface S_{45}, par exemple un liquide et de l'air; tantôt (*fig.* 2) une cavité, librement ouverte dans le fluide 1, renferme une certaine quantité du liquide 4.

Ces deux cas diffèrent à peine au point de vue de la Mécanique, et il sera assurément suffisant de traiter l'un d'eux, le second par exemple; les résultats obtenus s'étendront sans peine au premier.

L'établissement des conditions d'équilibre d'un flotteur qui porte du lest liquide n'offre rien qui soit difficile, ni rien qui soit nouveau. Nous pourrons donc regarder cette question comme résolue et la passer sous silence.

Imaginons que le flotteur et le lest liquide qui y est contenu aient pris leur état d'équilibre; solidifions le lest liquide; il formera, avec le vaisseau qui le porte, un flotteur entièrement solide dont la stabilité pourra être étudiée par les méthodes que nous avons discutées ailleurs. Les conditions de stabilité ainsi obtenues ne sont pas celles qu'il convient de réaliser pour assurer la stabilité du vaisseau portant du lest supposé liquide; le problème qui va nous occuper consiste à rechercher en quoi les secondes conditions diffèrent des premières.

Cette importante question ne paraît pas avoir sollicité les efforts des mécaniciens, jusqu'en 1881, époque où M. Guyou publia, d'abord dans le cours autographié de l'École Navale, puis dans la *Revue maritime*, une étude sur la *Théorie de la variation de la stabilité, ou de la stabilité différentielle*. Cette étude, exposée de nouveau par son auteur dans sa *Théorie du navire* (Paris, 1887), renfermait un important théorème qui résout, pour un cas très particulier, il est vrai, le problème qui nous occupe.

Nous nous proposons, dans le présent travail, d'étudier ce problème d'une manière entièrement générale, en faisant usage des méthodes et des formules qui nous ont servi ([1]) à étudier la stabilité d'un flotteur ne contenant pas de liquide ([2]).

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5e série, t. I, p. 91; 1895).

([2]) Dans notre précédent Mémoire, nous avions élevé quelques objections contre la théorie de la stabilité des corps flottants donnée par M. Guyou; en réalité, la démonstration de M. Guyou évite ces objections parce que :

1° La translation verticale d'un corps immergé dans un liquide que termine une surface plane élève le centre de gravité du système tant que le poids du liquide déplacé diffère du poids du flotteur, *et cela quelle que soit l'orientation du solide.*

2° La dénivellation du liquide élève le centre de gravité du système, *quelle que soit la position du flotteur.*

Ces deux remarques entraînent l'égalité à zéro des termes dont la présence justifierait, en général, notre objection.

I. — Stabilité d'un flotteur portant du lest liquide et soumis à des forces extérieures quelconques.

Nous nous supposerons placés dans le cas auquel correspond la *fig.* 2. En conservant alors des notations semblables de tout point à celles dont nous avons fait usage dans notre travail *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, nous établirons la proposition suivante :

Un flotteur solide 3, *portant du lest liquide* 4, *flotte à la surface de séparation de deux fluides* 1 *et* 2 *que limite une surface close, d'étendue finie, invariable de position et de forme. Pour que l'équilibre d'un tel système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout déplacement virtuel du système, l'inégalité*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2 dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2 dv_2 + \int_4 \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}(\delta\rho_4)^2 dv_4 \\ &+ \int_{S_{12}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1 dS_{12} \\ &+ \int_{S_{12}} \rho_2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_2 dS_{12} \\ &+ \int_{S_{14}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1 dS_{14} \\ &+ \int_{S_{14}} \rho_4 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_4 dS_{14} \\ &\qquad + R > 0. \end{aligned}\right.$$

R est une forme quadratique des six variables δf, δg, δh, δl, δm, δn :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} R = \;& B_{11}(\delta f)^2 + B_{22}(\delta g)^2 + B_{33}(\delta h)^2 \\ &+ B_{44}(\delta l)^2 + B_{55}(\delta m)^2 + B_{66}(\delta n)^2 \\ &+ B_{23}\,\delta g\,\delta h + B_{31}\,\delta h\,\delta f + B_{12}\,\delta f\,\delta g \\ &+ B_{56}\,\delta m\,\delta n + B_{64}\,\delta n\,\delta l + B_{45}\,\delta l\,\delta m \\ &+ B_{15}\,\delta f\,\delta m + B_{16}\,\delta f\,\delta n \\ &+ B_{26}\,\delta g\,\delta n + B_{24}\,\delta g\,\delta l \\ &+ B_{34}\,\delta h\,\delta l + B_{35}\,\delta h\,\delta m. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients B_{ij} ont des formes analogues à celles des coefficients A_{ij} considérés dans notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, mais plus compliquées. Tandis que l'on avait, par exemple,

$$(3)\quad \begin{cases} A_{11} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{13} \\ \qquad -\int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dv_3, \end{cases}$$

on aura

$$(4)\quad \begin{cases} B_{11} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{23} \\ \qquad -\int_{S_{34}} \rho_4 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{34} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dv_3. \end{cases}$$

On aperçoit aisément, sur cet exemple, comment chacun des coefficients B_{ij} se déduit du coefficient A_{ij} correspondant.

On peut imaginer des déplacements virtuels qui laissent invariable la densité du fluide qui remplit chacun des éléments de volume du système; seulement, en exprimant que la masse de chacun des trois fluides doit demeurer invariable, on trouve que de semblables déplacements sont assujettis aux conditions suivantes :

$$\int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} + \int_{S_{14}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{14} = 0,$$

$$\int_{S_{12}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0,$$

$$\int_{S_{14}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{14} + \int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{34} = 0.$$

Si l'on remarque que, le long de la surface S_{12}, les densités ρ_1, ρ_2 ont des valeurs constantes r_1, r_2; que, le long de la surface S_{14}, les densités ρ_1, ρ_4 ont des valeurs constantes r'_1, r_4, les conditions précé-

dentes peuvent s'écrire

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & r_1 \int_{S_{12}} \varepsilon_1\, dS_{12} + r'_1 \int_{S_{14}} \varepsilon_1\, dS_{14} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0,\\ & r_2 \int_{S_{12}} \varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0,\\ & r_4 \int_{S_{14}} \varepsilon_4\, dS_{14} + r_2 \int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{34} = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut même assujettir un tel déplacement à ne pas déformer ni déplacer les surfaces de séparation S_{12}, S_{14} des divers fluides. Dans ce cas, les conditions (5) deviennent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0,\\ & \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0,\\ & \int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{34} = 0. \end{aligned}\right.$$

En vertu de l'égalité (11) de notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, ces trois conditions (6) deviennent trois relations linéaires et homogènes entre les six variations δf, δg, δh, δl, δm, δn. Voici la première de ces relations :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & \delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, y)\, dS_{13}\\ & \qquad\qquad + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, z)\, dS_{13}\\ & + \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13}\\ & + \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)]\, dS_{13}\\ & + \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)]\, dS_{13} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les deux autres se déduisent de celle-là en remplaçant l'indice 1 soit par l'indice 2, soit par l'indice 4. Nous les désignerons par (7 *bis*) et (7 *ter*).

En raisonnant comme nous l'avons fait au Chapitre III, § II de notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, nous obtiendrons sans peine les conditions suivantes pour la stabilité d'un flotteur qui porte du lest liquide :

I. Conditions nécessaires, mais peut-être insuffisantes. — 1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact de deux fluides appartenant au système; en tout point d'une telle surface où elle est différente de zéro, elle est dirigée vers l'intérieur du plus dense des deux fluides.*

2° *La forme* R *est une forme définie positive lorsqu'on suppose les six variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn, *liées par les trois relations* (7), (7 *bis*), (7 *ter*).

II. Conditions suffisantes, mais peut-être pas nécessaires. — 1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact de deux fluides appartenant au système; en tout point d'une telle surface où elle est différente de zéro, elle est dirigée vers l'intérieur du plus dense des deux fluides.*

2° *La forme* R, *où les variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn *sont indépendantes, est une forme définie positive; ou, du moins, si elle s'annule, c'est pour des valeurs des variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn, *qui ne vérifient pas les égalités* (7), (7 *bis*), (7 *ter*).

II. — Comparaison avec un flotteur portant du lest solide.

Supposons que, le système étant en équilibre, on solidifie le liquide 4. On obtiendra un flotteur entièrement solide. Pour que l'équilibre d'un tel flotteur soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, pour

tout déplacement virtuel du système, l'inégalité

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1+\int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2\\&+\int_{S_{12}}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}\\&+\int_{S_{12}}\rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_{12}+T>0.\end{aligned}\right.$$

T est une forme quadratique des six variables δf, δg, δh, δl, δm, δn,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}T = \;& C_{11}(\delta f)^2 + C_{22}(\delta g)^2 + C_{33}(\delta h)^2\\&+C_{44}(\delta l)^2 + C_{55}(\delta m)^2 + C_{66}(\delta n)^2\\&+C_{23}\,\delta g\,\delta h + C_{31}\,\delta h\,\delta f + C_{12}\,\delta f\,\delta g\\&+C_{56}\,\delta m\,\delta n + C_{64}\,\delta n\,\delta l + C_{45}\,\delta l\,\delta m\\&+C_{15}\,\delta f\,\delta m + C_{16}\,\delta f\,\delta n\\&+C_{26}\,\delta g\,\delta n + C_{24}\,\delta g\,\delta l\\&+C_{34}\,\delta h\,\delta l + C_{35}\,\delta h\,\delta m.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients C_{ij} ont des formes analogues à celles des coefficients A_{ij} ou B_{ij}. On a, par exemple,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}C_{11} = &-\int_{S_{13}}\rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)\,dS_{13}-\int_{S_{23}}\rho_2\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)\,dS_{23}\\&-\int_{S_{14}}\rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n_1,x)\,dS_{14}\\&+\int_3\rho_2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,dv_3+\int_4\rho_4\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dv_4;\end{aligned}\right.$$

les autres coefficients C_{ij} ont des formes analogues.

L'expression (10) du coefficient C_{11} peut se transformer.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\int_4\rho_4\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dv_4 = &-\int_4\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\rho_4}{\partial x}\,dv_4\\&+\int_{S_{14}}\rho_4\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n_1,x)\,dS_{14}-\int_{S_{34}}\rho_4\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N,x)\,dS_{34}.\end{aligned}$$

Cette égalité et d'autres analogues permettent de transformer l'expression de T. Posons

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n,\\ \Delta y &= \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l,\\ \Delta z &= \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m;\end{aligned}\right.$$

Δx, Δy, Δz sont les composantes du déplacement du point (x, y, z), si on le suppose invariablement lié au corps solide.

Nous aurons, on le voit sans peine,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} = {} & \mathrm{R}\\ & -\int_4 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right)\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \rho_4}{\partial z}\Delta z\right) dv_4\\ & -\int_{\mathrm{S}_{14}} \rho_1 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right)\\ & \qquad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, d\mathrm{S}_{14}\\ & +\int_{\mathrm{S}_{34}} \rho_4 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right)\\ & \qquad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, d\mathrm{S}_{14}.\end{aligned}\right.$$

Mais on a ([1]), en tout point du fluide 4 en équilibre,

$$\frac{d\,\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4} + \mathrm{V} = \mathrm{C},$$

C étant une constante. On déduit de là

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\\ & + \frac{d^2\,\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \rho_4}{\partial z}\Delta z\right) = 0.\end{aligned}$$

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants,* Chap. I, égalité (38) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5e série, t. I, p. 128).

En vertu de cette égalité, l'égalité (12) peut s'écrire

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
T = {} & R \\
& + \int_4 \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}\left(\frac{\partial\rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho_4}{\partial z}\Delta z\right)^2 dv_4 \\
& - \int_{S_{14}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z\right) \\
& \quad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, dS_{14} \\
& + \int_{S_{14}} \rho_4 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z\right) \\
& \quad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, dS_{14}.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette expression de la forme T va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

Lorsque le flotteur portant le fluide 4 est en équilibre stable, l'équilibre demeure stable si l'on vient à solidifier le fluide 4.

En effet, l'hypothèse de ce théorème revient à supposer que l'inégalité (1) est vérifiée pour tous les déplacements virtuels que l'on peut imposer au système. Or, parmi ces déplacements, figurent évidemment ceux où chaque point matériel du fluide 4 demeure invariablement lié au solide 3. Pour un tel déplacement, on a, en tout point du fluide 4,

$$\delta x = \Delta x \qquad \delta y = \Delta y, \qquad \delta z = \Delta z,$$

Δx, Δy, Δz étant données par les égalités (11); on a aussi

$$\delta\rho_4 = -\left(\frac{\partial\rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho_4}{\partial z}\Delta z\right).$$

En tout point de la surface S_{14}, on a

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z, \\
\varepsilon_4 &= -[\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]
\end{aligned}
$$

et l'on peut prendre

$$Dx = \Delta x, \qquad Dy = \Delta y, \qquad Dz = \Delta z.$$

Moyennant ces égalités et l'égalité (13), l'inégalité (1) devient identique à l'inégalité (8), ce qui démontre le théorème énoncé.

La réciproque de la proposition précédente n'est pas exacte; il peut se faire que le flotteur, chargé du corps 4 solidifié, soit en équilibre stable et que l'équilibre devienne instable si l'on rend la fluidité au corps 4.

Considérons, en effet, le déplacement le plus général du système où le fluide 4 est supposé solidifié. De ce déplacement, nous pourrons déduire un autre déplacement virtuel du système où le corps 4 a gardé sa fluidité en opérant de la manière suivante :

1° Les quantités δf, δg, δh, δl, δm, δn ont la même valeur en chacun des deux déplacements;

2° Les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ sont les mêmes dans les deux déplacements;

3° Les quantités Dx, Dy, Dz ont la même valeur, en chaque point de la surface S_{12}, en l'un et l'autre déplacement;

4° Les déplacements Dx, Dy, Dz aux divers points de la surface S_{14} vérifient l'égalité

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{S_{14}} [\cos(n_1, x)\,Dx + \cos(n_1, y)\,Dy + \cos(n_1, z)\,Dz]\,dS_{14} \\ &= \int_{S_{34}} [\cos(N, x)\,\Delta x + \cos(N, y)\,\Delta y + \cos(N, z)\,\Delta z]\,dS_{34}; \end{aligned} \right.$$

5° En tout point du fluide 4, on a

$$\delta\rho_4 = -\left[\frac{\partial\rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho_4}{\partial z}\Delta z\right].$$

Cherchons à écrire, pour le *second* déplacement virtuel, l'inégalité (1). Nous verrons sans peine que, pour former le premier membre de cette inégalité, il suffit de prendre le premier membre de l'inéga-

lité (12) relative au *second* déplacement virtuel et y ajouter la quantité

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{S_{14}} (\rho_1 - \rho_4)\left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \\ &\quad \times [\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz]\, dS_{14} \\ &- \int_{S_{14}} (\rho_1 - \rho_4)\left(\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z\right) \\ &\quad \times [\cos(n_1, x)\, \Delta x + \cos(n_1, y)\, \Delta y + \cos(n_1, z)\, \Delta z]\, dS_{14}. \end{aligned} \right.$$

Or, on peut aisément montrer que cette quantité (15) peut prendre des valeurs négatives alors que l'égalité (14) est vérifiée; en sorte que l'inégalité (12) peut être vérifiée sans que l'inégalité (1) le soit.

Supposons, en effet, que l'on ait, dans le premier déplacement virtuel,

$$\int_{14} [\cos(N, x)\, \Delta x + \cos(N, y)\, \Delta y + \cos(N, z)\, \Delta z] = 0,$$

égalité qui constitue une relation linéaire et homogène entre les six variables

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n.$$

On pourra alors satisfaire à la condition (14) en prenant, en tout point de la surface S_{14},

$$Dx = 0, \qquad Dy = 0, \qquad Dz = 0.$$

La quantité (15) se réduira à son second terme que l'on pourra écrire

$$\int_{S_{14}} (\rho_4 - \rho_1) \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\, \Delta x + \cos(n_1, y)\, \Delta y + \cos(n, z)\, \Delta z]^2\, dS_{14}.$$

Or, les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre des fluides 1 et 4, considérés comme seuls mobiles, nous enseignent que cette quantité est forcément négative.

La proposition énoncée est donc démontrée.

III. — Cas où les forces agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides sont homogènes.

Considérons maintenant le cas particulier où les forces extérieures agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides 1, 2, 4 sont sensiblement homogènes, soit qu'ils offrent, comme les liquides, une compressibilité négligeable, soit que leur faible densité varie très peu avec la hauteur, comme il arrive pour les gaz.

Prenons l'axe des z vertical et dirigé vers le haut.

Soient

S'_{12} la section que le plan S_{12} prolongé détermine dans l'espace clos occupé par les corps 1 et 4;
Σ, l'aire de cette section;
σ, l'aire de la surface S_{14};
$\mu = M_3 + M_4$, la masse de l'ensemble des corps 3 et 4;
ζ, la cote du centre de gravité de cette masse;
Z, la cote du centre de gravité de la masse des fluides 1 et 2 déplacés par les corps 3 et 4.

Des calculs semblables à ceux que nous avons développés dans notre Mémoire *Sur la stabilité des corps flottants* (Chap. III, § V) nous donneront aisément l'égalité suivante

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
R = {} & g(\rho_2 - \rho_1)\Sigma(\delta h)^2 \\
& + g\left[\mu(Z - \zeta) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y^2\, dS_{14}\right](\delta l)^2 \\
& + g\left[\mu(Z - \zeta) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} x^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} x^2\, dS_{14}\right](\delta m)^2 \\
& - 2g\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} xy\, dS_{14}\right]\delta l\,\delta m \\
& + 2g\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y\, dS_{14}\right]\delta h\,\delta l \\
& - 2g\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} x\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{1}} x\, dS_{14}\right]\delta h\,\delta m.
\end{aligned}
\right.
$$

Les conditions (7), (7 *bis*), (7 *ter*) prennent les formes suivantes :

$$(17)\quad (\Sigma-\sigma)\delta h+\left(\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}-\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right)\delta l-\left(\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}-\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right)\delta m=0,$$

$$(18)\quad \begin{cases} \Sigma\,\delta h+\delta l\displaystyle\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}-\delta m\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}=0,\\ \sigma\,\delta h+\delta l\displaystyle\int_{S_{14}} y\,dS_{14}-\delta m\int_{S_{14}} x\,dS_{14}=0. \end{cases}$$

L'égalité (17) est une conséquence des égalités (18), qui doivent seules être conservées.

L'inspection des égalités (16) et (18) montre immédiatement que l'on ne pourra pas, en général, raisonner dans le cas qui nous occupe comme nous l'avons fait pour traiter la stabilité d'un corps solide et pesant flottant à la surface de séparation de deux fluides pesants et homogènes. On ne pourra étendre ces raisonnements au cas qui nous occupe actuellement que dans le cas où il sera possible de choisir les axes coordonnés de telle façon que l'on ait à la fois

$$\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}=0,\qquad \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}=0,$$
$$\int_{S_{14}} x\,dS_{14}=0,\qquad \int_{S_{14}} y\,dS_{14}=0,$$

c'est-à-dire *dans le cas où le centre de gravité de l'aire de la section à fleur d'eau* S'_{12} *et le centre de gravité de l'aire de la surface* S_{14} *qui limite le fluide* 4 *sont sur une même verticale.*

Dans ce cas, *si nous prenons cette verticale pour axe des* z, la forme quadratique R deviendra

$$(19)\quad \begin{cases} \mathrm{R}= g(\rho_2-\rho_1)\Sigma(\delta h)^2\\ \quad +\ g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\displaystyle\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y^2\,dS_{14}\right](\delta l)^2\\ \quad +\ g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\displaystyle\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y^2\,dS_{14}\right](\delta m)^2\\ \quad -\ 2g\left[(\rho_2-\rho_1)\displaystyle\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} xy\,dS_{14}\right]\delta l\,\delta m, \end{cases}$$

tandis que les conditions (17) et (18) se réduiront à

$$(20) \qquad \delta h = 0.$$

Moyennant la condition indiquée en italiques, on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit : 1° que le fluide 1 soit moins dense que les fluides 2 et 4; 2° que la forme quadratique en δl, δm,

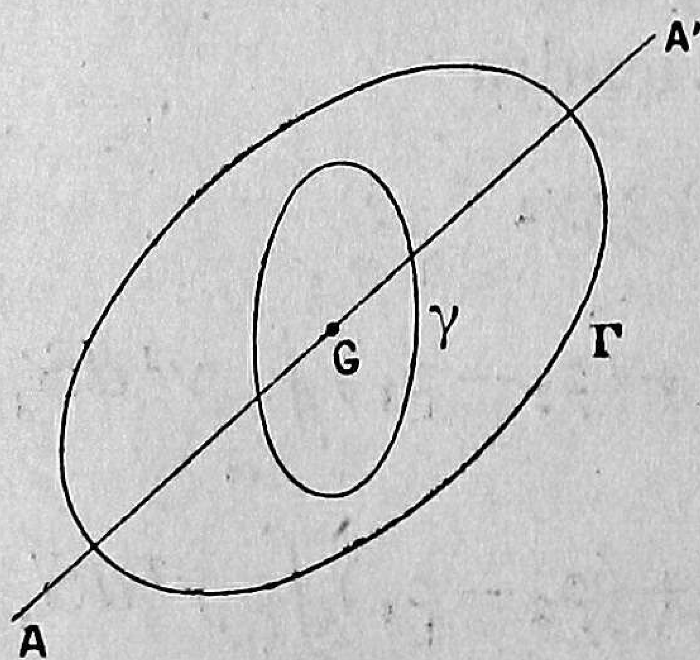
$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} = & \left[\mu(\mathrm{Z}-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{\mathrm{S}'_{12}} y^2\, d\mathrm{S}'_{12} - (\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} y^2\, d\mathrm{S}_{14}\right](\delta l)^2 \\ & + \left[\mu(\mathrm{Z}-\zeta)+(\rho_2-\rho_2)\int_{\mathrm{S}'_{12}} x^2\, d\mathrm{S}'_{12} - (\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} x^2\, d\mathrm{S}_{14}\right](\delta m)^2 \\ & - 2\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{\mathrm{S}'_{12}} xy\, d\mathrm{S}'_{12} - (\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} xy\, d\mathrm{S}_{14}\right]\delta l\, \delta m \end{aligned} \right.$$

soit une forme définie positive.

Dans le cas que nous venons de préciser, la solution du problème relatif à la stabilité d'un vaisseau qui porte du lest liquide est complète; mais on voit combien ce cas est particulier, si on le compare à la généralité de la solution obtenue depuis longtemps dans le cas où le flotteur ne porte pas de lest liquide.

La condition que nous venons d'obtenir peut s'interpréter géométriquement :

Fig. 3.



Sur le plan de flottaison traçons la ligne de flottaison Γ (*fig.* 3), entourant l'aire Σ; sur le même plan, projetons l'aire σ, dont la pro-

jection est circonscrite par la ligne γ. Les deux aires Σ, σ ont, par hypothèse, le même centre de gravité G.

Recouvrons l'aire Σ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *positive* $(\rho_2 - \rho_1)$; recouvrons l'aire σ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *négative* $(\rho_1 - \rho_4)$.

Cherchons le moment d'inertie de ce système fictif par rapport à un axe variable AA', situé dans le plan de flottaison et passant par le point G. Ce moment d'inertie a, pour une certaine orientation de l'axe AA', une valeur minima j.

La condition précédente équivaut à celle-ci

$$Z - \zeta + \frac{j}{\mu} > 0$$

ou

$$\zeta < Z + \frac{j}{\mu}. \tag{22}$$

Supposons que l'on solidifie le fluide 4. Soit i le plus petit moment d'inertie par rapport à l'axe variable AA' de la seule aire Σ recouverte du fluide fictif de densité positive $(\rho_2 - \rho_1)$. La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre du flotteur s'exprimerait par l'inégalité

$$\zeta < Z + \frac{i}{\mu}. \tag{23}$$

Or, on a évidemment

$$j < i.$$

Donc, pour que l'inégalité (22) soit vérifiée, il est nécessaire, mais non suffisant, que l'inégalité (23) le soit également; on a ici un exemple de la proposition générale énoncée au § II.

La proposition que nous venons de démontrer renferme comme cas particulier le théorème énoncé par M. Guyou.

La condition, indiquée en italiques, à laquelle le théorème précédent doit son exactitude, lui ôte tout intérêt au point de vue de la construction navale; cette condition, en effet, ne sera presque jamais remplie dans les divers cas qu'offre la pratique (navire dont un ou plusieurs compartiments étanches sont *partiellement* noyés, porteur de pétrole dont une ou plusieurs caisses sont *incomplètement* remplies, etc.). Cette lacune, toutefois, peut être en partie comblée si l'on

observe que l'architecture navale a surtout besoin de connaître une condition *suffisante,* qui l'assure de la stabilité d'un navire, la condition *nécessaire et suffisante* constituant un idéal dont elle peut, à la rigueur, se passer.

Nous savons qu'*il suffit,* pour la stabilité du navire, que la forme quadratique R soit une forme définie positive, *bien que cette condition ne soit peut-être pas nécessaire.*

Or l'expression de la forme R peut se simplifier.

Sur le plan de flottaison, traçons la ligne de flottaison Γ (*fig.* 3), entourant l'aire Σ; sur le même plan, projetons l'aire σ, dont la projection est circonscrite par la ligne γ. Recouvrons l'aire Σ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *positive* $(\rho_2 - \rho_1)$; recouvrons l'aire σ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *négative* $(\rho_1 - \rho_4)$.

Soit G *le centre de gravité du système fictif ainsi constitué;* nous porterons en G l'origine des coordonnées, ce qui, dans la forme R, fera disparaître les termes en $\delta h\, \delta l$ et $\delta h\, \delta m$.

Cherchons le moment d'inertie du système fictif par rapport à un axe variable AA', situé dans le plan de flottaison et passant par le point G. Ce moment d'inertie a, pour une certaine orientation de l'axe AA', une valeur maxima (positive ou négative) J et pour une autre orientation une valeur minima (positive ou négative) j. Prenons la première orientation pour axe des x, la seconde pour axe des y. Le terme en $\delta l\, \delta m$ disparaîtra dans l'expression de R qui se réduira à

$$\begin{aligned} V = {} & g(\rho_2 - \rho_1)\Sigma(\delta h)^2 \\ & + g[\mu(Z - \zeta) + J](\delta l)^2 + g[\mu(Z - \zeta) + j](\delta m)^2. \end{aligned}$$

Il est *suffisant,* pour la stabilité de l'équilibre du navire, que la forme V soit une forme définie positive. Pour que la forme V soit une forme définie positive, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on ait l'inégalité

$$Z + \frac{j}{\mu} - \zeta > 0.$$

Nous pourrons donc énoncer de la manière suivante une CONDITION QUI SUFFIT A ASSURER LA STABILITÉ D'UN NAVIRE PORTANT DU LEST LIQUIDE :

On considère le navire dans son assiette d'équilibre, en le supposant chargé du lest liquide;

On projette sur un même plan horizontal la surface de flottaison Σ *et la surface terminale* σ *du lest liquide;*

On recouvre la surface Σ *d'un fluide fictif de densité superficielle positive* $(\rho_2 - \rho_1)$ *et la surface* σ *d'un fluide fictif de densité superficielle négative* $(\rho_1 - \rho_4)$. *On cherche le centre de gravité* G *de ce système fictif, puis son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal variable passant par le point* G; *soit* j *la plus petite valeur, positive ou négative, de ce moment d'inertie. La cote du centre de gravité du navire et du lest liquide qu'il porte doit être inférieure à la cote du centre de gravité des fluides* 1 *et* 2 *déplacés, cette dernière cote étant augmentée du quotient* $\frac{j}{\mu}$ *de la quantité* j *par la masse totale du navire et du lest liquide.*

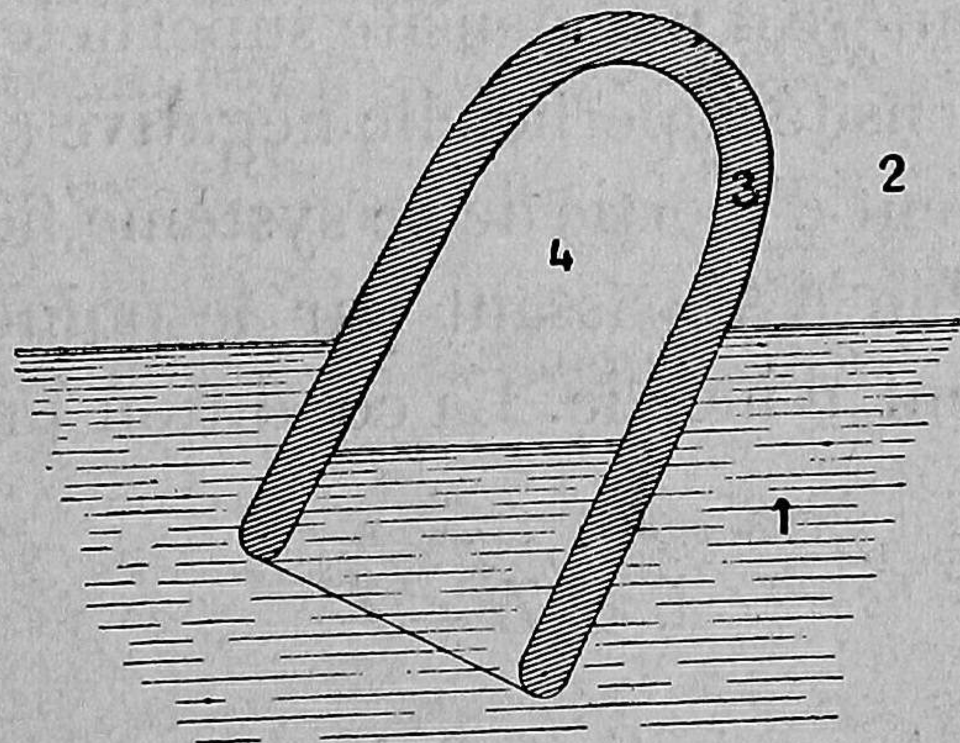
Cette règle s'étend sans peine au cas où le lest liquide forme plusieurs masses distinctes, de même densité ou de densités différentes.

IV. — Stabilité d'une cloche à plongeur. — Cas de la pesanteur.

A la surface de séparation d'un liquide 1 et d'un gaz 2, flotte une cloche renversée 3, qui renferme un fluide 4.

Nous pourrions traiter directement et complètement le problème de

Fig. 4.



la stabilité d'un pareil système. Mais nous nous bornerons à étudier le cas où les forces extérieures agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides sont supposés homogènes. Dans ce cas, on voit sans peine que le problème qui nous occupe actuellement se ramène au problème précédent, à la condition de changer z en $(-z)$ et g en

$(-g)$. Nous pouvons donc en donner immédiatement la solution, du moins lorsqu'il est possible de l'obtenir.

Pour qu'il soit possible de résoudre entièrement ce problème, *il faut que l'aire de la section à fleur d'eau et l'aire de la surface qui sépare les fluides* 1 *et* 4 *aient leurs centres de gravité sur la même verticale.*

Si cette condition est réalisée, on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit :

1° *Que le fluide* 1 *soit plus dense que les fluides* 2 *et* 4;

2° *Que la forme quadratique en* δl, δm,

$$
\begin{aligned}
W = & \left[\mu(\zeta - Z) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y^2\, dS_{14}\right](\delta l)^2 \\
& + \left[\mu(\zeta - Z) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} x^2\, dS_{14}\right](\delta m)^2 \\
& - 2\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} xy\, dS_{14}\right]\delta l\, \delta m,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

soit une forme définie négative.

On interprète aisément cette condition sous la forme que voici :

Projetons les deux aires Σ, σ sur un plan horizontal. Les deux projections ont même centre de gravité G.

Recouvrons la première d'une densité superficielle positive $(\rho_1 - \rho_2)$ et la seconde d'une densité superficielle négative $(\rho_4 - \rho_1)$.

Cherchons le moment d'inertie de ce système fictif par rapport à un axe horizontal variable AA' passant par le point G; soit j la valeur minima de ce moment d'inertie. La condition précédente équivaut à l'inégalité

$$\zeta < Z + \frac{j}{\mu}. \tag{25}$$

Si la condition indiquée en italiques n'est pas remplie, nous n'aurons plus, en général, de condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de la cloche; mais nous pourrons, comme dans le cas précédent, obtenir une condition simplement suffisante de même forme.

Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles ;

PAR M. P. DUHEM.

§ 1. — Sur les équations générales de l'équilibre des fluides.

Nous avons établi, dans un précédent Travail ([1]), les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une masse fluide soit en équilibre stable ; mais, dans cette étude, nous avons admis que toutes les forces exercées sur les divers éléments du fluide étaient des *forces extérieures ;* nous avons supposé, en outre, que ces forces dérivaient d'une fonction potentielle dépendant des coordonnées du point où se trouve l'élément fluide considéré, mais point des propriétés de cet élément.

C'est là un cas infiniment particulier de l'Hydrostatique. Nous avons étudié ailleurs ([2]) un cas beaucoup plus général : c'est celui où deux éléments fluides, de masses dm et dm', exercent l'un sur l'autre des actions dont le potentiel est de la forme

$$\Psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm',$$

r étant la distance des deux masses élémentaires et ρ, ρ' leurs densités.

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I. (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 108.)

([2]) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique.* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 183.)

Dans ce cas, les *actions* mutuelles des deux masses élémentaires comprennent non seulement une *force* répulsive réciproque, dont la grandeur est

$$-\frac{\partial\Psi(\rho,\rho',r)}{\partial r}\,dm\,dm',$$

mais encore une *influence;* cette influence, qui tend à accroître la densité de l'élément dm sans tendre à déplacer le centre de gravité de cet élément, a pour grandeur

$$-\frac{\partial\Psi(\rho,\rho',r)}{\partial\rho}\,dm\,dm'.$$

La masse dm' est soumise à une influence analogue.

Ce type d'actions mutuelles est très étendu. Il comprend, en particulier, les actions newtoniennes; dans ce cas, la fonction Ψ ne dépend que de r, et point de ρ et de ρ'; les *actions* mutuelles de deux particules se réduisent à des *forces* réciproques et les *influences* sont supprimées; il comprend aussi l'action répulsive, insensible entre corps denses, mais sensible lorsqu'un des corps agissants est très raréfié, par laquelle M. Faye explique les diverses apparences de la queue des comètes; les actions moléculaires qu'invoque la théorie de la capillarité appartiennent vraisemblablement aussi à la catégorie d'actions pour lesquelles la fonction Ψ dépend véritablement de ρ et de ρ'.

Moyennant certaines hypothèses indispensables sur la manière dont la fonction $\Psi(\rho,\rho',r)$ et ses dérivées partielles se comportent pour les valeurs infiniment petites de r, hypothèses que nous ne voulons pas rappeler ici, il est possible de donner les conditions d'équilibre d'un fluide soumis à de semblables actions. Rappelons brièvement quelles sont ces conditions.

Le système, dont la température est supposée uniforme et constante, admet un potentiel thermodynamique interne qui est de la forme suivante :

$$(1)\qquad \mathfrak{F}=\int\rho\zeta(\rho)\,dv+\frac{1}{2}\int\int\rho\rho'\Psi(\rho,\rho',r)\,dv\,dv',$$

chacune des intégrales s'étendant au volume entier du système. La

fonction $\zeta(\rho)$ n'est déterminée qu'à une constante près; au contraire, la fonction $\Psi(\rho, \rho', r)$ est entièrement déterminée si on lui impose la condition de s'annuler pour les valeurs infinies de r.

Posons

$$(2)\qquad V = \int \Psi(\rho, \rho', r)\,\rho'\,dv',$$

$$(3)\qquad \mathcal{A} = -\int \frac{\partial}{\partial\rho}\Psi(\rho, \rho', r)\,\rho'\,dv',$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X_i &= -\int \frac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\frac{\partial r}{\partial x}\rho'\,dv', \\ Y_i &= -\int \frac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\frac{\partial r}{\partial y}\rho'\,dv', \\ Z_i &= -\int \frac{\partial}{\partial r}\Psi(\rho, \rho', r)\frac{\partial r}{\partial z}\rho'\,dv'. \end{aligned}\right.$$

Ces cinq intégrales sont des fonctions finies de x, y, z; elles sont continues si les propriétés de la matière varient d'une manière continue au voisinage du point (x, y, z).

Les égalités (2), (3) et (4) donnent

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -X_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -Y_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -Z_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Quant aux forces extérieures, nous supposerons que la masse élémentaire dm est soumise à une force extérieure dont les composantes sont

$$X_e\,dm,\quad Y_e\,dm,\quad Z_e\,dm,$$

avec

$$(6)\qquad X_e = -\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Y_e = -\frac{\partial U}{\partial y},\qquad Z_e = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

la fonction U dépendant des coordonnées x, y, z d'un point de l'élément dm, mais ne dépendant pas de la densité ρ de cet élément; au

cas où l'action exercée par un corps extérieur ne vérifierait pas cette condition, on impliquerait ce corps à l'intérieur du système considéré : c'est d'ailleurs là un artifice dont le seul but est de simplifier les écritures; il serait aisé de s'en passer.

Les conditions d'équilibres du fluide sont les suivantes :

Il existe une fonction $\Pi(x, y, z)$, positive en tous les points de la masse fluide et variant d'une manière continue d'un point à l'autre, telle que l'on ait

$$(7) \qquad \rho[(X_i + X_e)\,dx + (Y_i + Y_e)\,dy + (Z_i + Z_e)\,dz] = d\Pi.$$

En chaque point de la surface qui termine le fluide est appliquée une pression normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et égale en grandeur à la valeur de Π en ce point.

En tout point pris à l'intérieur du fluide, on a l'égalité

$$(8) \qquad \rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = \Pi + \rho^2 \mathcal{A}.$$

De ces conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la masse fluide, déduisons immédiatement quelques conséquences.

L'égalité (8) nous montre que, dans le cas général que nous étudions, *la densité en un point n'est plus fonction de la seule pression au même point;* une proposition, admise en général comme évidente par les auteurs qui se sont occupés d'Hydrostatique, se trouve ainsi restreinte au cas où la fonction Ψ ne dépend ni de ρ, ni de ρ', cas que nous nommerons *cas des actions newtoniennes*.

Posons

$$(9) \qquad \Omega = V + U.$$

Ω sera la fonction potentielle totale tant des actions extérieures que des actions intérieures. En vertu des égalités (5) et (6), nous aurons

$$(X_i + X_e)\,dx + (Y_i + Y_e)\,dy + (Z_i + Z_e)\,dz + \mathcal{A}\,d\rho + d\Omega = 0$$

ou bien

$$(10) \qquad \rho\,d\Omega + \mathcal{A}\rho\,d\rho + d\Pi = 0.$$

Cette égalité (10), vérifiée en tous les points du fluide, nous montre que les surfaces d'égale pression sont définies par l'équation

$$d\Omega + \mathcal{A}\, d\rho = 0. \tag{11}$$

Les surfaces d'égale pression ne sont pas surfaces d'égal niveau potentiel.

Posons

$$\Theta(\rho) = \zeta(\rho) + \rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}. \tag{12}$$

Comme la fonction $\zeta(\rho)$, la fonction $\Theta(\rho)$ sera définie seulement à une constante près. Les équations (8) et (10) nous montrent que l'on a, à l'intérieur du fluide,

$$\Omega - \rho\mathcal{A} + \Theta(\rho) = \text{const.} \tag{13}$$

Les surfaces d'égale densité vérifient donc l'égalité

$$\Omega - \rho\mathcal{A} = \text{const.} \tag{14}$$

Elles ne coïncident pas avec les surfaces d'égal niveau potentiel.

L'égalité (8) nous montre d'ailleurs que *les surfaces d'égale densité ne coïncident pas avec les surfaces d'égale pression.*

Ainsi, les trois familles de surfaces

$$\Omega = \text{const.}, \qquad \Pi = \text{const.}, \qquad \rho = \text{const.}$$

ne coïncident pas en général; elles ne se réduisent à une même famille de surfaces que dans le cas des actions newtoniennes, cas où l'on a l'identité

$$\mathcal{A} = 0.$$

§ 2. — Généralisation des résultats précédents.

Bien que les résultats précédents aient été établis dans des hypothèses très générales, il y a lieu de les étendre encore, afin de pouvoir traiter complètement certains des problèmes qui vont suivre.

En premier lieu, nous avons supposé qu'au sein d'un fluide continu, de température uniforme, les éléments ne pouvaient différer les uns des autres que par leur densité; mais il est des cas où cette supposition n'est pas vérifiée; par exemple, au sein d'une dissolution saline ou d'un mélange gazeux, les éléments peuvent différer les uns des autres, non seulement par leur densité, mais encore par leur concentration ou leur composition; s'il s'agit d'une dissolution d'un seul sel dans un seul menstrue, ou du mélange de deux gaz, cette concentration ou cette composition s'exprime au moyen d'une seule variable; il en faut un plus grand nombre dans le cas où l'on considère un mélange de plus de deux corps; pour ne pas introduire d'interminables équations, nous supposerons simplement que l'état de chaque élément fluide peut être défini par sa densité et par une seule autre variable s.

En second lieu, nous avons étudié une masse fluide continue; mais on peut avoir affaire à une masse fluide dont la nature change brusquement au passage d'une surface de discontinuité.

Traitons d'abord le cas où le système se compose d'un seul fluide continu ; ce fluide continu, nous le supposerons formé de deux corps α, β; la masse élémentaire dm se composera d'une masse dm_α du corps α et d'une masse dm_β du corps β; nous poserons

$$s = \frac{dm_\beta}{dm_\alpha} \tag{15}$$

et nous dirons que s est la *concentration* en un point de la masse dm.

L'état de la masse dm dépend non seulement de sa densité ρ, mais encore de sa concentration s. Le système admet un potentiel thermodynamique interne de la forme

$$\mathcal{F} = \int \rho\zeta(\rho, s)\,dv + \frac{1}{2}\int\int \rho\rho'\Psi(\rho, \rho', s, s', r)\,dv\,dv'. \tag{16}$$

Les diverses masses élémentaires du système sont soumises à des forces extérieures qui admettent pour potentiel la quantité

$$\mathcal{G} = \int \rho \mathrm{U}\,dv, \tag{17}$$

où U désigne une fonction de x, y, z, finie, uniforme et continue dans tout l'espace occupé par le fluide.

Enfin, chaque élément dS de la surface déformable du fluide est soumis à une force dont les composantes sont

$$P_x dS, \quad P_y dS, \quad P_z dS.$$

Posons

$$(18) \qquad V = \int \rho' \Psi(\rho, \rho', s, s', r)\, dv',$$

$$(19) \qquad \begin{cases} X_i = -\int \rho' \dfrac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \dfrac{\partial r}{\partial x}\, dv', \\ Y_i = -\int \rho' \dfrac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \dfrac{\partial r}{\partial y}\, dv', \\ Z_i = -\int \rho' \dfrac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial r} \dfrac{\partial r}{\partial z}\, dv', \end{cases}$$

$$(20) \qquad \mathcal{A} = -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial \rho}\, dv',$$

$$(21) \qquad \mathcal{S} = -\int \rho' \frac{\partial \Psi(\rho, \rho', s, s', r)}{\partial s}\, dv',$$

$$(22) \qquad X_e = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_e = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_e = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Imaginons une modification infiniment petite du système; un point matériel ayant pour coordonnées x, y, z, au commencement de la modification, a pour coordonnées, à la fin de la modification,

$$x + Dy, \quad y + Dy, \quad z + Dz.$$

Sa densité, qui était ρ, est devenue $(\rho + D\rho)$; sa concentration, qui était s, est devenue $(s + Ds)$.

On en conclut sans peine qu'*au point fixe de l'espace* (x, y, z), la densité et la concentration, qui avaient pour valeurs ρ et s avant la modification, ont pour valeur, après la modification, $(\rho + \delta\rho)$ et

$(s+\delta s)$, $\delta\rho$ et δs étant donnés par les égalités

$$\delta\rho = \mathrm{D}\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{D}x - \frac{\partial\rho}{\partial y}\mathrm{D}y - \frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{D}z, \tag{23}$$

$$\delta s = \mathrm{D}s - \frac{\partial s}{\partial x}\mathrm{D}x - \frac{\partial s}{\partial y}\mathrm{D}y - \frac{\partial s}{\partial z}\mathrm{D}z. \tag{24}$$

Soient M_α, M_β les masses des corps α, β, que renferme le système; ces masses ont respectivement pour valeurs, en vertu de l'égalité (15) qui définit la concentration s,

$$\mathrm{M}_\alpha = \int \frac{1}{1+s}\rho\, dv, \tag{25}$$

$$\mathrm{M}_\beta = \int \frac{s}{1+s}\rho\, dv. \tag{26}$$

Ces masses doivent demeurer invariables par l'effet de la modification que le système éprouve, ce qu'expriment les deux égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{1}{1+s}\delta\rho - \frac{\rho}{(1+s)^2}\delta s\right]dv \\ &\quad + \mathbf{S}\frac{\rho}{1+s}[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S} = 0, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{s}{1+s}\delta\rho + \frac{\rho}{(1+s)^2}\delta s\right]dv \\ &\quad + \mathbf{S}\frac{\rho s}{1+s}[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S} = 0, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

n_e étant la normale à l'élément $d\mathrm{S}$ vers l'extérieur du fluide.

Ces relations lient les variations $\delta\rho$, δs, de la densité et de la concentration en chaque point de l'espace occupé par le fluide et les composantes $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ du déplacement aux limites du fluide; ce sont les seules conditions auxquelles ces variations soient assujetties.

Dans la modification considérée, les forces appliquées à la surface déformable S effectuent un travail

$$d\varpi = \mathbf{S}(\mathrm{P}_x\mathrm{D}x + \mathrm{P}_y\mathrm{D}y + \mathrm{P}_z\mathrm{D}z)\,d\mathrm{S}. \tag{29}$$

Le potentiel $\mathcal{G}$ des forces extérieures éprouve une variation

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{G} &= \int \mathrm{U}\,\delta\rho\, dv \\ &\quad + \mathbf{S}\,\rho\mathrm{U}[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}.\end{aligned}\right.$$

Le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ éprouve une variation

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= \int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} - \rho\mathcal{A}\right]\delta\rho\, dv + \int\rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \mathrm{s}\right)\delta s\, dv \\ &\quad + \mathbf{S}\,\rho(\mathrm{V}+\zeta)[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}.\end{aligned}\right.$$

Les conditions d'équilibre du système s'obtiendront en exprimant que l'on a

$$(32)\qquad \delta\mathcal{F} + \delta\mathcal{G} - d\mathfrak{C} = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu non pas quels que soient $\delta\rho$, δs, $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$, mais seulement lorsque ces quantités sont liées par les équations (27) et (28). Si donc on désigne par λ et μ deux constantes convenablement choisies, l'égalité suivante aura lieu, quels que soient $\delta\rho$, δs, $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} + \mathrm{U} - \rho\mathcal{A} + \frac{\lambda+\mu s}{1+s}\right]\delta\rho\, dv \\ &+ \int\rho\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \mathrm{s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]\delta s\, dv \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta + \frac{\lambda+\mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, x) - \mathrm{P}_x\right]\mathrm{D}x\, d\mathrm{S} \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta + \frac{\lambda+\mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, y) - \mathrm{P}_y\right]\mathrm{D}y\, d\mathrm{S} \\ &+ \mathbf{S}\left[\rho\left(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta + \frac{\lambda+\mu s}{1+s}\right)\cos(n_e, z) - \mathrm{P}_z\right]\mathrm{D}z\, d\mathrm{S} = 0.\end{aligned}\right.$$

Ce résultat peut encore s'énoncer de la manière suivante :

1° *On a, en tout point de la surface déformable qui limite le*

fluide,

$$(34)\quad \begin{cases} P_x = \rho\left(V + U + \zeta + \dfrac{\lambda + \mu s}{1 + s}\right)\cos(n_e, x), \\ P_y = \rho\left(V + U + \zeta + \dfrac{\lambda + \mu s}{1 + s}\right)\cos(n_e, y), \\ P_z = \rho\left(V + U + \zeta + \dfrac{\lambda + \mu s}{1 + s}\right)\cos(n_e, z). \end{cases}$$

2° *On a, en tout point de la masse fluide,*

$$(35)\quad \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\zeta) + V + U - \rho\mathcal{A} + \frac{\lambda + \mu s}{1 + s} = 0,$$

$$(36)\quad \frac{\partial \zeta}{\partial s} - s - \frac{\lambda - \mu}{(1 + s)^2} = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la masse fluide.

Les conditions (34) peuvent encore s'énoncer ainsi :

La surface déformable du fluide est soumise à une pression normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, dont la grandeur est donnée par la valeur que prend, à cette surface, la quantité

$$(37)\quad \Pi = -\rho\left(V + U + \zeta + \frac{\lambda + \mu s}{1 + s}\right).$$

Cette quantité prend le nom de *pression à l'intérieur du fluide.* Moyennant l'introduction de cette pression, l'égalité (35) peut encore s'écrire

$$(38)\quad \Pi + \rho^2\mathcal{A} - \rho^2\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0,$$

égalité dans laquelle on reconnaît l'égalité (8), qui avait été établie pour un cas plus particulier.

Les égalités (35), (36), (37), (38) conduisent aisément à la proposition suivante :

Les surfaces équipotentielles, les surfaces d'égale pression, les

surfaces d'égale densité et les surfaces d'égale concentration forment, en général, quatre familles de surfaces distinctes; ces quatre familles n'en forment plus qu'une dans le cas où l'on a identiquement

$$(39) \qquad \mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{S} = 0,$$

c'est-à-dire dans le cas où la fonction Ψ *est une simple fonction de* r *(cas des actions newtoniennes).*

Occupons-nous maintenant du cas où le fluide considéré est formé de deux masses continues 1 et 2 séparées par une surface de discontinuité Σ. Le fluide 1 est formé par le mélange de deux corps α_1, β_1; le fluide 2 par le mélange de deux autres corps α_2, β_2; les concentrations s_1, s_2 seront définies par des égalités analogues à l'égalité (15).

Les corps α_1, β_1, α_2, β_2 ont des masses M_{α_1}, M_{β_1}, M_{α_2}, M_{β_2} qui doivent demeurer invariables en toute modification du système, ce qu'expriment les conditions

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \left[\frac{1}{1+s_1} \delta\rho_1 - \frac{\rho_1}{(1+s_1)^2} \delta s_1 \right] dv \\ &+ \mathbf{S} \frac{\rho_1}{1+s_1} [\cos(n_e, x) \mathrm{D}x + \cos(n_e, y) \mathrm{D}y + \cos(n_e, z) \mathrm{D}z] \, dS_1 \\ &- \mathbf{S} \frac{\rho_1}{1+s_1} [\cos(n_1, x) \mathrm{D}x + \cos(n_1, y) \mathrm{D}y + \cos(n_1, z) \mathrm{D}z] \, d\Sigma = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \left[\frac{s_1}{1+s_1} \delta\rho_1 + \frac{\rho_1}{(1+s_1)^2} \delta s_1 \right] dv_1 \\ &+ \mathbf{S} \frac{\rho_1 s_1}{1+s_1} [\cos(n_e, x) \mathrm{D}x + \cos(n_e, y) \mathrm{D}y + \cos(n_e, z) \mathrm{D}z] \, dS_1 \\ &- \mathbf{S} \frac{\rho_1 s_1}{1+s_1} [\cos(n_1, x) \mathrm{D}x + \cos(n_1, y) \mathrm{D}y + \cos(n_1, z) \mathrm{D}z] \, d\Sigma = 0 \end{aligned} \right.$$

et deux autres égalités qui diffèrent des précédentes en ce que l'indice 2 y remplace l'indice 1; nous les nommerons (40 *bis*) et (41 *bis*). En un point de la surface Σ, n_1 désigne la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 1 et n_2 la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 2.

Le travail des forces appliquées à la surface déformable se compose de deux termes semblables au second membre de l'égalité (29); l'un

se rapporte à la surface S_1, l'autre à la surface S_2. Nous en désignerons l'expression par (29 *bis*).

La variation éprouvée par le potentiel des actions qui s'exercent sur les divers éléments de masse du fluide est donnée non plus par l'égalité (30), mais par l'égalité

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{G} = &\int U\delta\rho_1\,dv_1 + \int U\delta\rho_2\,dv_2 \\ &+ \mathrm{S}\,\rho_1 U[\cos(n_e,x)\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\mathrm{D}z]\,dS_1 \\ &+ \mathrm{S}\,\rho_2 U[\cos(n_e,x)\mathrm{D}x + \cos(n_e,y)\mathrm{D}y + \cos(n_e,z)\mathrm{D}z]\,dS_2 \\ &- \mathrm{S}\,\rho_1 U[\cos(n_1,x)\mathrm{D}x + \cos(n_1,y)\mathrm{D}y + \cos(n_1,z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma \\ &- \mathrm{S}\,\rho_2 U[\cos(n_2,x)\mathrm{D}x + \cos(n_2,y)\mathrm{D}y + \cos(n_2,z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma. \end{aligned}\right.$$

La transformation qui, de l'égalité (30), sert à déduire l'égalité (42), permettra, de l'égalité (31), de déduire l'expression de $\delta\mathcal{F}$ applicable au cas qui nous occupe; il suffira d'écrire successivement deux termes semblables au second membre de l'égalité (31), en les affectant, l'un de l'indice 1, l'autre de l'indice 2, et d'y ajouter

$$-\mathrm{S}\,\rho_1(V_1+\zeta_1)[\cos(n_1,x)\mathrm{D}x + \cos(n_1,y)\mathrm{D}y + \cos(n_1,z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma$$

$$-\mathrm{S}\,\rho_2(V_2+\zeta_2)[\cos(n_2,x)\mathrm{D}x + \cos(n_2,y)\mathrm{D}y + \cos(n_2,z)\mathrm{D}z]\,d\Sigma.$$

Nous désignerons par (31 *bis*) l'égalité ainsi obtenue.

Les conditions d'équilibre s'obtiendront en écrivant que l'on a

$$\partial\mathcal{F} + \partial\mathcal{G} - d\mathfrak{T} = 0,$$

pour toute variation du fluide compatible avec les conditions (40), (40 *bis*) et (41 *bis*). Ces conditions seront les suivantes :

1° *Il existe deux constantes convenablement choisies* λ_1, μ_1, *telles*

que l'on ait, en tout point du fluide 1,

$$(43)\qquad \frac{\partial}{\partial\rho_1}(\rho_1\zeta_1) + V_1 + U - \rho_1\mathcal{A}_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1} = 0,$$

$$(44)\qquad \frac{\partial\zeta_1}{\partial s_1} - s_1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{(1 + s_1)^2} = 0.$$

En tout point de la surface S_1 *est appliquée une force normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et dont la grandeur égale la valeur prise au point considéré par la fonction*

$$(45)\qquad \Pi_1 = -\rho_1\left(V_1 + U + \zeta_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1}\right).$$

2° *Il existe deux constantes convenablement choisies* λ_2, μ_2, *telles que l'on ait, en tout point du fluide* 2,

$$(43\ bis)\qquad \frac{\partial}{\partial\rho_2}(\rho_2\zeta_2) + V_2 + U - \rho_2\mathcal{A}_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2} = 0,$$

$$(44\ bis)\qquad \frac{\partial\zeta_2}{\partial s_2} - s_2 - \frac{\lambda_2 - \mu_2}{(1 + s_2)^2} = 0.$$

En tout point de la surface S_2 *est appliquée une force normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et dont la grandeur égale la valeur prise au point considéré par la fonction*

$$(45\ bis)\qquad \Pi_2 = -\rho_2\left(V_2 + U + \zeta_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2}\right).$$

3° *En tout point de la surface de discontinuité* Σ *qui sépare les fluides* 1 *et* 2, *on a*

$$(46)\qquad \rho_1\left(V_1 + U + \zeta_1 + \frac{\lambda_1 + \mu_1 s_1}{1 + s_1}\right) = \rho_2\left(V_2 + U + \zeta_2 + \frac{\lambda_2 + \mu_2 s_2}{1 + s_2}\right).$$

En vertu des égalités (45) et (45 *bis*), l'égalité (46) peut encore s'écrire

$$(47)\qquad \Pi_1 = \Pi_2.$$

Les pressions Π_1, Π_2 sont *deux fonctions analytiques différentes*, définies, l'une à l'intérieur du fluide 1, l'autre à l'intérieur du fluide 2. Mais ces fonctions se soudent l'une à l'autre *sans discontinuité* au passage de la surface Σ.

On verrait sans peine qu'on se tromperait, en général, en énonçant une des propositions suivantes :

Le long de la surface Σ, la pression garde une valeur constante;

Les densités ρ_1, ρ_2 gardent des valeurs constantes;

Les concentrations s_1, s_2 gardent des valeurs constantes;

Les fonctions potentielles $(V_1 + U)$, $(V_2 + U)$ gardent des valeurs constantes.

Toutes ces propositions, fausses en général, deviennent vraies à la fois, lorsque l'on a les identités

$$V_1 = V_2,$$

$$\mathcal{A}_1 = 0, \qquad \mathcal{S}_1 = 0, \qquad \mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{S}_2 = 0,$$

c'est-à-dire dans le cas des actions newtoniennes.

§ 3. — Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. Variation seconde du potentiel thermodynamique.

Supposons que les surfaces déformables des fluides 1 et 2 soient soumises à une même pression normale et uniforme P. Le travail de cette pression deviendra, en vertu de l'égalité (29 *bis*),

$$P \Big\{ \mathbf{S} [\cos(n_e, x) Dx + \cos(n_e, y) Dy + \cos(n_e, z) Dz] dS_1 + \mathbf{S} [\cos(n_e, x) Dx + \cos(n_e, y) Dy + \cos(n_e, z) Dz] dS_2 \Big\}$$

ou bien

$$-\, PDW,$$

en désignant par W le volume total du système, par DW l'accroissement que subit ce volume durant la modification du système.

Si la pression P *est maintenue constante*, ce travail dépend d'un potentiel

$$\mathfrak{H} = \mathrm{PW}, \tag{48}$$

et le système admet un potentiel thermodynamique total

$$\Phi = \mathfrak{F} + \mathfrak{G} + \mathfrak{H}. \tag{49}$$

Nous admettrons la proposition suivante, qui n'est qu'en partie démontrée :

Pour que le système soit en équilibre stable, il faut et il suffit que le potentiel thermodynamique total soit un minimum.

On exprimera donc que le système est en équilibre stable en écrivant que l'on a, à la fois,

$$\delta\Phi = 0, \tag{50}$$

$$\delta^2\Phi > 0, \tag{51}$$

pour toute modification du système compatible avec les liaisons.

Bornons-nous, pour le moment, à étudier le cas d'un *fluide continu*.

Dans ce cas, l'expression de $\delta\Phi$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\Phi = & \int \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + \mathrm{V} + \mathrm{U} - \rho\mathcal{A}\right]\delta\rho\, dv \\ & + \int \left[\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho\mathrm{S}\right]\delta s\, dv \\ & + \mathbf{S}[\rho(\mathrm{V} + \mathrm{U} + \zeta) + \mathrm{P}] \\ & \quad \times [\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\, d\mathrm{S}. \end{aligned} \right.$$

Il est très facile de voir que les équations d'équilibre, jointes aux conditions (27) et (28), rendent égal à 0 le second membre de cette égalité (52).

Soient, en un point (x, y, z) de l'espace, V la valeur au début de la modification de la fonction que désigne cette lettre, et $(V + \delta V)$ la valeur de cette fonction au même point à la fin de la modification.

En vertu des égalités (18), (20) et (21), nous pourrons écrire

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \delta V = &- \mathcal{A}\,\delta\rho - \mathcal{S}\,\delta s \\ &+ \int\left(\Psi + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' + \int\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial s'}\,\delta s'\,dv' \\ &+ \mathbf{S}\,\rho'\Psi[\cos(n'_e, x)\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\mathrm{D}y' + \cos(n'_c, z)\mathrm{D}z']\,d\mathrm{S}', \end{aligned}\right.$$

n'_e étant la normale à l'élément $d\mathrm{S}'$ de la surface S vers l'extérieur du fluide; ρ' la densité du fluide au voisinage de cet élément; $\mathrm{D}x'$, $\mathrm{D}y'$, $\mathrm{D}z'$ les composantes du déplacement d'un point de cet élément.

Nous aurons, de même,

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} \delta(\rho\mathcal{A}) = &\left(\mathcal{A} + \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}\,\delta s \\ &- \rho\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' - \rho\int\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial s'}\,\delta s'\,dv' \\ &- \rho\,\mathbf{S}\,\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}[\cos(n'_e, x)\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\mathrm{D}y' + \cos(n'_e, z)\mathrm{D}z']\,d\mathrm{S}', \end{aligned}\right.$$

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \delta(\rho\mathcal{S}) = &\left(\mathcal{S} + \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s}\,\delta s \\ &- \rho\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial\rho'}\right)\delta\rho'\,dv' - \rho\int\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'}\,\delta s'\,dv' \\ &- \rho\,\mathbf{S}\,\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial s}[\cos(n'_e, x)\mathrm{D}x' + \cos(n'_e, y)\mathrm{D}y' + \cos(n'_e, z)\mathrm{D}z']\,d\mathrm{S}'. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (53), (54) et (55) donnent une interprétation simple de la quantité

$$\begin{aligned} &\int[\delta V - \delta(\rho\mathcal{A})]\,\delta\rho\,dv - \int\delta(\rho\mathcal{S})\,\delta s\,dv \\ &\quad + \mathbf{S}\,\rho\,\delta V[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}. \end{aligned}$$

Considérons trois fluides fictifs a, b, c ayant tous trois, comme le

classique fluide électrique, la propriété de pouvoir offrir, tantôt une densité positive, tantôt une densité négative.

Le fluide a est distribué dans tout l'espace occupé par le fluide réel et sa densité en chaque point est $\delta\rho$.

Le fluide b est distribué en chaque point de l'espace occupé par le fluide réel avec la densité $\rho\,\delta s$.

Le fluide c est distribué seulement à la surface qui limite le fluide réel, et sa densité superficielle est

$$\rho[\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z].$$

A une modification déterminée du fluide réel correspond une distribution bien déterminée des trois fluides fictifs.

Soient deux points M, M', pris dans le fluide réel ou à sa surface; soit r la distance MM'; soient ρ, ρ', s, s' les densités et les concentrations du fluide réel aux points M et M'.

Supposons que deux quantités q_a, q'_a du fluide a soient concentrées aux points M, M'; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right)q_a q'_a.$$

Supposons que deux quantités q_b, q'_b du fluide b soient concentrées aux points M, M'; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'}q_b q'_b.$$

Concentrons au point M une quantité q_a du fluide a, au point M' une quantité q'_b du fluide b; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s'} + \rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial s'}\right)q_a q'_b.$$

Aux deux points M, M', concentrons deux quantités q_c, q'_c du

fluide c; nous imaginerons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\Psi q_c q'_c.$$

Au point M, concentrons une quantité q_c du fluide c et au point M′ une quantité q'_a du fluide a; nous admettrons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho' \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'}\right) q_c q'_a.$$

Au point M, concentrons une quantité q_c du fluide c, et au point M′ une quantité q'_b du fluide b; nous admettrons que ces deux quantités exercent des actions mutuelles ayant pour potentiel

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s'} q_c q'_b.$$

Supposons que les rapports

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial \rho'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial s} \Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial s'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2}{d\rho\, \partial \rho'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r), \qquad \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial s'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r),$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2}{\partial \rho\, \partial s'} \Psi(\rho, \rho', s, s', r)$$

ne croissent pas au delà de toutes limites lorsque r tend vers o; nous pourrons appliquer aux actions mutuelles que nous venons d'énumérer les théorèmes généraux que nous avons démontrés dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*.

Soit Y le potentiel de toutes ces actions mutuelles. Il est très facile

de voir que l'on a

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} &\int[\delta V - \delta(\rho\mathcal{A})]\delta\rho\, dv - \int\delta(\rho\mathcal{S})\delta s\, dv \\ &+ \mathbf{S}\,\rho\delta V[\cos(n_e,x)Dx + \cos(n_e,y)Dy + \cos(n_e,z)Dz]dS \\ &= -\int\left[\left(2\mathcal{A} + \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)(\delta\rho)^2 + \left(\mathcal{S} + \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}\right)\delta\rho\,\delta s + \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s}(\delta s)^2\right]dv \\ &- \mathbf{S}\,\rho(\mathcal{A}\,\delta\rho + \mathcal{S}\,\delta s)[\cos(n_e,x)Dx + \cos(n_e,y)Dy + \cos(n_e,z)Dz]dS \\ &+ 2Y. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons, désormais, former l'expression générale de $\delta^2\Phi$; remarquons que

$$\begin{aligned} D(\rho V + \rho U + \rho\zeta) &= \rho\delta V + \left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\delta\rho + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial s}\delta s \\ &+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathcal{A}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x} + \left(\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho\mathcal{S}\right)\frac{\partial s}{\partial x} - \rho(X_i + X_e)\right]Dx \\ &+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathcal{A}\right)\frac{d\rho}{\partial y} + \left(\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho\mathcal{S}\right)\frac{\partial s}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e)\right]Dy \\ &+ \left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathcal{A}\right)\frac{\partial\rho}{\partial z} + \left(\rho\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \rho\mathcal{S}\right)\frac{\partial s}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e)\right]Dz \end{aligned}$$

et nous aurons, en tenant compte des égalités (23) et (24)

$$(57)\quad \begin{aligned} \delta^2\Phi = &\int\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathcal{A}\right)\delta^2\rho\, dv && (1) \\ &+ \int\rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \mathcal{S}\right)\delta^2 s\, dv && (2) \\ &+ \mathbf{S}\left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathcal{A}\right)\delta\rho + \rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \mathcal{S}\right)\delta s\right] \\ &\qquad\times\quad [\cos(n_e,x)Dx + \cos(n_e,y)Dy + \cos(n_e,z)Dz]dS && (3) \\ &+ \mathbf{S}\left[\left(V + U + \zeta + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \rho\mathcal{A}\right)D\rho + \rho\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \mathcal{S}\right)Ds\right] \\ &\qquad\times\quad [\cos(n_e,x)Dx + \cos(n_e,y)Dy + \cos(n_e,z)Dz]dS && (4) \\ &+ \mathbf{S}\,[\rho(V + U + \zeta) + P] \\ &\qquad\times D\{[\cos(n_e,x)Dx + \cos(n_e,y)Dy + \cos(n_e,z)Dz]dS\} && (5) \end{aligned}$$

$$+\int\Big[\Big(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}-2\mathcal{A}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\Big)(\delta\rho)^2$$

$$+\Big(2\frac{\partial\zeta}{\partial s}+2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s}-2\mathcal{S}-\rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}\Big)\delta\rho\,\delta s$$

$$+\Big(\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}-\rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s}\Big)(\delta s)^2\Big]\,dv \qquad (6)$$

$$-\mathbf{S}\,\rho\,[(X_i+X_e)Dx+(Y_i+Y_e)Dy+(Z_i+Z_e)Dz]$$

$$\times[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS \qquad (7)$$

$$+2Y. \qquad (8)$$

Cette expression générale de $\delta^2\Phi$ se simplifie beaucoup lorsqu'on suppose que l'état initial du système est un état d'équilibre. Dans ce cas, en vertu des égalités (34), (35), (36), les termes (1), (2), (3), (4), (5), au second membre de l'égalité (57), peuvent s'écrire

$$(58)\left\{\begin{aligned}
&-\lambda\Big(\int\Big[\frac{\delta^2\rho}{1+s}-\frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\Big]dv\\
&\quad+\mathbf{S}\Big[\frac{\delta\rho}{1+s}-\frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\quad+\mathbf{S}\Big[\frac{D\rho}{1+s}-\frac{\rho\,Ds}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\quad+\mathbf{S}\qquad\frac{\rho}{1+s}D\{[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\}\Big),\\
&-\mu\Big(\int\Big[\frac{s\,\delta^2\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\Big]dv\\
&\quad+\mathbf{S}\Big[\frac{s\,\delta\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\quad+\mathbf{S}\Big[\frac{s\,D\rho}{1+s}+\frac{\rho\,Ds}{(1+s)^2}\Big][\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\\
&\quad+\mathbf{S}\qquad\frac{\rho s}{1+s}D\{[\cos(n_e,x)Dx+\cos(n_e,y)Dy+\cos(n_e,z)Dz]\,dS\}\Big).
\end{aligned}\right.$$

Mais, les égalités (27) et (28) devant être constamment vérifiées, les variations de leurs premiers membres doivent être égales à o, ce qui donne

$$(59)\left\{\begin{aligned}
&-\int\frac{2}{(1+s)^2}\left[\delta\rho\,\delta s-\frac{\rho}{1+s}(\delta s)^2\right]dv\\
&+\int\left[\frac{\delta^2\rho}{1+s}-\frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\right]dv\\
&+\mathbf{S}\left[\frac{\delta\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\right][\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x+\cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y+\cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\\
&+\mathbf{S}\left[\frac{\mathrm{D}\rho}{1+s}-\frac{\rho\,\mathrm{D}s}{(1+s)^2}\right][\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x+\cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y+\cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\\
&+\mathbf{S}\qquad\frac{\rho}{1+s}\mathrm{D}\{[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x+\cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y+\cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\}=0;
\end{aligned}\right.$$

$$(60)\left\{\begin{aligned}
&\int\frac{2}{(1+s)^2}\left[\delta\rho\,\delta s-\frac{\rho}{1+s}(\delta s)^2\right]dv\\
&+\int\left[\frac{s\,\delta^2\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta^2 s}{(1+s)^2}\right]dv\\
&+\mathbf{S}\left[\frac{s\,\delta\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\delta s}{(1+s)^2}\right][\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x+\cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y+\cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\\
&+\mathbf{S}\left[\frac{s\,\mathrm{D}\rho}{1+s}+\frac{\rho\,\mathrm{D}s}{(1+s)^2}\right][\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x+\cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y+\cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\\
&+\mathbf{S}\qquad\frac{\rho s}{1+s}\mathrm{D}\{[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x+\cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y+\cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\}=0.
\end{aligned}\right.$$

Moyennant ces égalités (59) et (60), l'expression (58) peut s'écrire

$$(61)\qquad \int\left[\frac{2(\mu-\lambda)}{(1+s)^2}\delta\rho\,\delta s+2\rho\frac{\lambda-\mu}{(1+s)^3}(\delta s)^2\right]dv.$$

Si dans l'égalité (57), nous remplaçons les cinq premiers termes du second membre par l'expression (61), nous aurons l'égalité

$$(62)\left\{\begin{aligned}
\delta^2\Phi=&\int\Big\{\Big(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}-2\mathcal{A}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\Big)(\delta\rho)^2\\
&\quad+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s}+2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s}-\mathcal{S}-\rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}-\frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]\delta\rho\,\delta s\\
&\qquad+\rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}-\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s}+\frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right](\delta s)^2\Big\}\,dv\quad(1)\\
&-\mathbf{S}\,\rho[(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e)\,\mathrm{D}x+(\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e)\,\mathrm{D}y+(\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e)\,\mathrm{D}z]\\
&\qquad\times[\cos(n_e,x)\,\mathrm{D}x+\cos(n_e,y)\,\mathrm{D}y+\cos(n_e,z)\,\mathrm{D}z]\,d\mathrm{S}\quad(2)\\
&+2\,\mathrm{Y},\qquad(3)
\end{aligned}\right.$$

qui représente la variation seconde du potentiel thermodynamique du système dans le cas où l'état initial du système est un état d'équilibre.

Le terme (2) peut se mettre sous une forme un peu différente.

L'équation (7), appliquée à la surface S, le long de laquelle la pression garde une valeur constante, nous apprend que le segment dont les composantes sont

$$(X_i + X_e), \quad (Y_i + Y_e), \quad (Z_i + Z_e)$$

est normal à la surface S. Soit N ce vecteur, compté positivement dans le sens qui pénètre vers l'intérieur du fluide. On aura

$$\begin{aligned} X_i + X_e &= -\, N\cos(n_e, x), \\ Y_i + Y_e &= -\, N\cos(n_e, y), \\ Z_i + Z_e &= -\, N\cos(n_e, z), \end{aligned}$$

et le terme (2), au second membre de l'égalité (62), pourra s'écrire

$$+ \int \rho N[\cos(n_e, x)Dx + \cos(n_e, y)Dy + \cos(n_e, z)Dz]^2 dS. \qquad (2\ bis)$$

Dans le cas où nous avons affaire non plus à un fluide continu, mais à deux fluides 1 et 2, séparés par une surface de discontinuité Σ, l'expression de $\delta^2\Phi$ prend une forme plus compliquée.

Il nous faut tout d'abord, dans ce cas, écrire les termes (1) et (2) en affectant de l'indice 1 les quantités qui y figurent, puis deux termes semblables où l'indice 2 remplace l'indice 1; ensuite, nous devons introduire un nouveau terme, qui va nous arrêter un instant.

Soient M_1, M_2 deux points infiniment voisins situés l'un au sein du fluide 1, l'autre au sein du fluide 2. Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les valeurs de $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ au point M_1; désignons par X_2, Y_2, Z_2 les valeurs des mêmes quantités au point M_2; le terme en question pourra s'écrire

$$\begin{aligned} + \int [(\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2)Dx + (\rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2)Dy + (\rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2)Dz] \\ \times [\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]\, dS. \qquad (4) \end{aligned}$$

Enfin le terme Y subira des modifications analogues à celles que nous venons d'indiquer; il est inutile de les étudier en détail.

Le terme (4) peut se transformer.

Le long de la surface Σ, on a

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

et, par conséquent, pour tout déplacement effectué sur la surface Σ,

$$d\Pi_1 - d\Pi_2 = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (7),

$$(\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2)\,dx + (\rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2)\,dy + (\rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2)\,dz = 0.$$

Cette égalité nous apprend que le segment qui a pour composantes

$$\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2,$$
$$\rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2,$$
$$\rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2,$$

est normal à la surface Σ.

Soit N_1 la projection, sur la normale n_1, du segment dont les composantes sont X_1, Y_1, Z_1; soit N_2 la projection, sur la normale n_2, du segment dont les composantes sont X_2, Y_2, Z_2; la projection du même segment sur la normale n_1 sera $-N_2$. Nous aurons donc

$$\rho_1 X_1 - \rho_2 X_2 = (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, x),$$
$$\rho_1 Y_1 - \rho_2 Y_2 = (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, y),$$
$$\rho_1 Z_1 - \rho_2 Z_2 = (\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)\cos(n_1, z)$$

et le terme (4) pourra s'écrire

$$+ \mathbf{S}(\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)[\cos(n_1, x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_1, y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_1, z)\,\mathrm{D}z]^2\,d\mathrm{S}. \qquad (4\ bis)$$

§ 4. — Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. — Conditions nécessaires.

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\delta^2\Phi > 0, \tag{51}$$

$\delta^2\Phi$ étant donné par l'égalité (62), pour toute modification du fluide qui satisfait aux conditions (40) et (41).

Nous nous contenterons d'indiquer certaines conditions qui doivent être nécessairement remplies pour qu'il en soit ainsi; quant à l'énumération de toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, elle se heurte à d'extrêmes difficultés; c'est seulement dans certains cas particuliers que ces difficultés peuvent être surmontées; nous rencontrerons plus loin un de ces cas.

Première condition nécessaire. — *La forme quadratique*

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} = {} & \left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - 2\mathcal{A} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)\mathrm{A}^2 \\ & + \left[2\frac{\partial\zeta}{\partial s} + 2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - 2\mathcal{S} - \rho\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s} - \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]\mathrm{AB} \\ & + \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} - \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right]\mathrm{B}^2 \end{aligned}\right.$$

ne doit, en aucun point M *du volume occupé par le fluide et pour aucun système de valeurs des variables* A *et* B, *prendre une valeur négative.*

Supposons, en effet, qu'au point M, pour un certain système de valeurs A, B des variables A et B, la forme (63) prenne une valeur négative et montrons qu'il sera possible alors de faire prendre à $\delta^2\Phi$ une valeur négative.

Entourons le point M d'une surface fermée σ entourant le volume ϖ.

Il est clair que l'on peut, d'une infinité de manières, déterminer une fonction u qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° La fonction u est uniforme, finie et continue à l'intérieur du domaine ϖ;

2° Elle est égale à 0 en tout point de la surface σ;

3° Elle vérifie les égalités

$$\int_w \left[\frac{1}{1+s} - \frac{\rho}{(1+s)^2}\right] u\,d\varpi = 0, \tag{64}$$

$$\int_w \left[\frac{s}{1+s} + \frac{\rho}{(1+s)^2}\right] u\,d\varpi = 0; \tag{65}$$

4° Lorsque la surface σ se contracte autour du point M par une suite déterminée de formes, le rapport

$$R = \frac{1}{\varpi}\int_w T u^2\,dv \tag{66}$$

tend vers une limite finie différente de 0.

A et B demeurant constants, T varie d'une manière continue d'un point à l'autre du fluide continu; T étant négatif au point M, par hypothèse, on peut prendre le volume ϖ assez petit pour que T soit négatif en tout point de ce volume; R sera alors assurément négatif.

A l'intérieur de l'espace ϖ, distribuons deux fluides fictifs, i et j, le premier, i, de densité Au, le second, j, de densité Bu.

Imaginons que les actions mutuelles de deux masses q_i, q'_i, du fluide i, admettent pour potentiel

$$\left(\Psi + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial\rho'}\right) q_i q'_i\,;$$

que les actions mutuelles de deux masses q_j, q'_j, du fluide j, admettent pour potentiel

$$\rho\rho'\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial s'} q_j q'_j;$$

qu'une masse q_i du fluide i et une masse q'_j, du fluide j, exercent l'une

sur l'autre des actions mutuelles admettant pour potentiel

$$\left(\rho' \frac{\partial \Psi}{\partial s'} + \rho\rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial s'}\right) q_i q'_j.$$

Soit $\mathfrak{J}$ le potentiel de toutes ces actions fictives.

En vertu des hypothèses faites sur la fonction Ψ et ses dérivées partielles, lorsque la surface σ se contracte autour du point M, le rapport $\frac{\mathfrak{J}}{\varpi^2}$ ne croît pas au delà de toute limite, en sorte que le rapport $\frac{\mathfrak{J}}{\varpi}$ tend vers zéro.

Cela posé, considérons la quantité

$$\varphi = \int_{\varpi} \mathrm{T} u^2\, d\varpi + 2\mathfrak{J}, \tag{67}$$

qui peut s'écrire, en vertu de l'égalité (66),

$$\varphi = \varpi\left(\mathrm{R} + \frac{2\mathfrak{J}}{\varpi}\right).$$

Lorsque le volume ϖ tend vers zéro par une suite de formes bien déterminées, R tend vers une limite finie et négative, tandis que $\frac{\mathfrak{J}}{\varpi}$ tend vers zéro. Nous pouvons donc assurément prendre le volume ϖ assez petit pour que φ soit négatif.

Cela posé, considérons une modification du fluide définie de la manière suivante :

1° En tout point de l'espace extérieur à la surface σ ou de cette surface même, on a

$$\mathrm{D}x = 0, \qquad \mathrm{D}y = 0, \qquad \mathrm{D}z = 0, \qquad \mathrm{D}s = 0, \qquad \mathrm{D}\rho = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta\rho = 0, \qquad \delta s = 0.$$

2° En tout point du domaine ϖ, on a

$$\delta\rho = u\,\delta t, \qquad \delta s = u\,\delta t,$$

δt étant une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z.

En vertu des conditions (64) et (65), cette modification vérifie les égalités (27) et (28); c'est donc une modification virtuelle acceptable. Dans une telle modification, on a évidemment

$$\delta^2\Phi = \varphi(\delta t)^2,$$

en sorte que $\delta^2\Phi$ est négatif. Par là, la proposition énoncée est démontrée.

Deuxième condition nécessaire. — *La quantité* N *n'est négative en aucun point de la surface* S *qui limite le fluide.*

Supposons, en effet, que la quantité N prenne une valeur négative en un point M de la surface déformable S du fluide; nous allons voir que l'on pourrait imposer au fluide une modification qui ferait prendre à $\delta^2\Phi$ une valeur négative.

Autour du point M, traçons sur la surface S une aire σ; déterminons une fonction u, variable d'un point à l'autre de l'aire σ, et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elle est uniforme, finie et continue en tout point de l'aire σ;

2° Elle s'annule tout le long du contour de l'aire σ;

3° Elle vérifie les conditions

$$\mathrm{S}_\sigma \frac{\rho}{1+s} u\, d\sigma = 0, \tag{68}$$

$$\mathrm{S}_\sigma \frac{\rho s}{1+s} u\, d\sigma = 0. \tag{69}$$

4° Lorsque le contour de l'aire σ se contracte pour venir s'évanouir au point M par une suite bien déterminée de formes, le rapport

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sigma} \mathrm{S}_\sigma \rho \mathrm{N} u^2 d\sigma \tag{70}$$

tend vers une limite finie différente de zéro.

La quantité N est, par hypothèse, négative au point M. Si la surface S a une courbure finie au voisinage du point M, la quantité N varie d'une manière continue au voisinage de ce point; on peut donc

prendre l'aire σ assez petite pour que N soit négatif en tout point de cette aire ; R sera alors assurément négatif.

Sur l'aire σ, distribuons un fluide fictif ayant pour densité *superficielle*, en chaque point de l'aire, la valeur correspondante de u; imaginons que deux quantités q, q' de ce fluide fictif exercent des actions mutuelles admettant pour potentiel

$$\Psi q q'.$$

Formons le potentiel $\mathfrak{J}$ des actions mutuelles de la distribution fictive répandue sur l'aire σ.

En vertu des hypothèses faites sur la fonction Ψ, lorsque la surface σ tend à s'évanouir au point M, le rapport $\frac{\mathfrak{J}}{\sigma^2}$ ne croît pas au delà de toute limite, en sorte que le rapport $\frac{\mathfrak{J}}{\sigma}$ tend vers zéro.

Cela posé, considérons la quantité

$$\varphi = \mathrm{S}_{\sigma} \rho N u^2 d\sigma + 2\mathfrak{J}, \tag{71}$$

que l'on peut écrire, en vertu de l'égalité (70),

$$\varphi = \sigma\left(R + 2\frac{\mathfrak{J}}{\sigma}\right).$$

Lorsque l'aire σ tend vers zéro par une suite de formes bien déterminées, R tend vers une limite finie et négative, tandis que $\frac{\mathfrak{J}}{\sigma}$ tend vers zéro ; on peut donc prendre l'aire σ assez petite pour que φ soit assurément négatif.

Prenons une telle aire σ et imposons au fluide la modification suivante :

1° En tout point intérieur à la masse fluide, on a

$$\delta\rho = 0, \qquad \delta s = 0;$$

2° En tout point de la surface S extérieur à σ ou situé sur le contour

de l'aire σ, on a

$$\mathrm{D}x = 0, \qquad \mathrm{D}y = 0, \qquad \mathrm{D}z = 0;$$

3° $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ varient d'une manière continue à l'intérieur de l'aire σ, et l'on a

$$\cos(n_e, x)\mathrm{D}x + \cos(n_e, y)\mathrm{D}y + \cos(n_e, z)\mathrm{D}z = u\delta t,$$

δt étant une quantité infiniment petite qui a la même valeur en tous les points de l'aire σ.

Nous aurons ainsi défini une modification virtuelle acceptable du fluide, car, en vertu des égalités (68) et (69), les conditions (27) et (28) seront remplies. Or, dans cette modification, on aura

$$\delta^2\Phi = \varphi(\delta t)^2,$$

en sorte que $\delta^2\Phi$ sera négatif, ce qui démontre la proposition énoncée.

TROISIÈME CONDITION NÉCESSAIRE. — *Si la masse fluide est formée de deux fluides distincts 1 et 2, séparés par une surface de discontinuité Σ, la quantité $(\rho_1 \mathrm{N}_1 + \rho_2 \mathrm{N}_2)$ ne doit être négative en aucun point de la surface.*

Cette proposition se démontre comme la précédente.

§ 5. — Conséquence de la première condition nécessaire.

Nous avons, en vertu des égalités (22),

$$d\mathrm{U} = -(\mathrm{X}_e dx + \mathrm{Y}_e dy + \mathrm{Z}_e dz).$$

Les égalités (18), (19), (20), (21) nous donnent

$$d\mathrm{V} = -(\mathrm{X}_i dx + \mathrm{Y}_i dy + \mathrm{Z}_i dz + \mathcal{A}\, d\rho + \mathrm{s}\, ds).$$

L'égalité (20) nous donne

$$d\mathcal{A} = -d\rho \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} dv' - ds \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial s} dv'$$
$$- dx \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dv' - dy \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial r} \frac{\partial r}{\partial y} dv' - dz \int \rho' \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho\, \partial r} \frac{\partial r}{\partial z} dv',$$

ou bien, en vertu des égalités (19), (20), (21),

$$d\mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} ds + \frac{\partial X_i}{\partial \rho} dx + \frac{\partial Y_i}{\partial \rho} dy + \frac{\partial Z_i}{\partial \rho} dz.$$

On trouverait de même

$$d\mathcal{S} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} ds + \frac{\partial X_i}{\partial s} dx + \frac{\partial Y_i}{\partial s} dy + \frac{\partial Z_i}{\partial s} ds.$$

Considérons l'égalité (35), vérifiée en tout point du fluide, et différentions-la en tenant compte des égalités précédentes et des identités

$$\frac{\partial X_e}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial Y_e}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial Z_e}{\partial \rho} = 0.$$

Nous trouvons

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(2\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} - 2\mathcal{A} - \rho \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \rho}\right) d\rho \\ & \quad + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial s} - \mathcal{S} - \rho \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} - \frac{\lambda - \mu}{(1+s)^2}\right) ds \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial \rho}[\rho(X_i + X_e)]\, dx \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial \rho}[\rho(Y_i + Y_e) dy] - \frac{\partial}{\partial \rho}[\rho(Z_i + Z_e) dz] = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplions par ρ les deux membres de l'égalité (36), vérifiée en tous les points du fluide, et différentions-la, en tenant compte des égalités précédentes et des identités

$$\frac{\partial X_e}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial Y_e}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial Z_e}{\partial s} = 0.$$

Nous trouvons

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s\, \partial \rho} - \mathcal{S} - \rho \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho} - \frac{\lambda - \mu}{(1+s)^2}\right) d\rho \\ & \quad + \left[\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} - \rho \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} + \frac{2\rho(\lambda - \mu)}{(1+s)^3}\right] ds - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(X_i + X_e)]\, dx \\ & \qquad - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(Y_i + Y_e) dy] - \frac{\partial}{\partial s}[\rho(Z_i + Z_e) dz] = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (72) par $d\rho$, les deux membres de l'égalité (73) par ds, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouverons une égalité que nous pourrons écrire

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}-2\mathcal{A}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)(d\rho)^2\\ &+\left[2\frac{\partial\zeta}{\partial s}+2\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s\,\partial\rho}-2\mathcal{S}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial s}-s\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}-\frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^2}\right]d\rho\,ds\\ &+\left[\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}-\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial s}+\frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right](ds)^2\\ =\;&\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(X_i+X_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(X_i+X_e))ds\right]dx\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Y_i+Y_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(Y_i+Y_e))ds\right]dy\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Z_i+Z_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(Z_i+Z_e))ds\right]dz. \end{aligned}\right.$$

La première condition nécessaire, démontrée au paragraphe précédent, nous montre alors que l'on aura, pour tout segment infiniment petit tracé à l'intérieur du fluide,

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(X_i+X_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(X_i+X_e))ds\right]dx\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Y_i+Y_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(Y_i+Y_e))ds\right]dy\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho(Z_i+Z_e))d\rho+\frac{\partial}{\partial s}(\rho(Z_i+Z_e))ds\right]dz \geqq 0. \end{aligned}\right.$$

Cette conséquence de notre première condition permettrait, on le voit sans peine, de retrouver la troisième condition en regardant les fluides 1 et 2, non plus comme séparés par une surface géométrique, mais comme reliés l'un à l'autre par une couche de passage continue et extrêmement mince.

§ 6. — Cas des actions newtoniennes.

Nous avons donné, dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, le nom d'*actions newtoniennes* aux actions pour lesquelles la fonction Ψ dépend de la seule variable r.

Pour de telles actions, on a

$$(76)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{A} = 0, & \mathcal{S} = 0, \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial X_i}{\partial s} = 0, \\ \dfrac{\partial Y_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial Y_i}{\partial s} = 0, \\ \dfrac{\partial Z_i}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial Z_i}{\partial s} = 0. \end{array}\right.$$

Voyons ce que deviennent, pour de telles actions, nos diverses conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre.

La deuxième condition, par laquelle nous commencerons, ne change pas de forme; *en aucun des points de la surface qui limite le fluide, la force, tant intérieure qu'extérieure, appliquée à un élément de masse du fluide, ne peut être dirigée vers l'extérieur du fluide.*

La troisième condition se simplifie si l'on observe que, dans le cas des actions newtoniennes, les quantités $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ varient d'une manière continue lorsque l'on traverse la surface de contact de deux fluides différents 1 et 2. On aura, dès lors,

$$N_1 + N_2 = 0,$$

et la troisième condition exigera que l'on ait, en tout point de la surface Σ,

$$(\rho_1 - \rho_2) N_1 \geqq 0.$$

A la surface de contact de deux fluides différents, la force, tant intérieure qu'extérieure, ne peut jamais être dirigée du fluide le plus dense vers le fluide le moins dense.

La première condition prendra simplement, en vertu des égalités (76), la forme suivante :

La forme quadratique en A, B

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\mathrm{A}^2 + 2\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]\mathrm{AB} \\ + \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right]\mathrm{B}^2 \end{aligned}\right.$$

ne peut jamais être négative en aucun point du fluide, et pour aucun système de valeurs de A, B.

De cette condition on peut déduire une série de conséquences.

L'une de ces conséquences est la forme particulière prise, dans ce cas, par la condition (75) qui devient, en vertu des égalités (76),

$$(78)\quad [(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e)dx + (\mathrm{Y}_i + \mathrm{Y}_e)dy + (\mathrm{Z}_i + \mathrm{Z}_e)dz]\,d\rho \geqq 0.$$

Cette inégalité (78), on le voit sans peine, peut s'énoncer ainsi : *Si la direction qui va du point* M *au point voisin* M' *fait un angle aigu avec la direction de la force, tant extérieure qu'intérieure, la densité ne peut être moindre au point* M' *qu'au point* M; *elle ne peut être plus grande au point* M' *qu'au point* M, *si la direction* MM' *fait un angle obtus avec la direction de la force.* On sait d'ailleurs qu'elle est la même au point M et au point M', si la direction MM' fait un angle droit avec la direction de la force.

On peut appliquer cet énoncé même au cas où les points M, M' sont séparés par une surface de discontinuité; il renferme alors la deuxième condition et la troisième condition, nécessaires pour la stabilité.

Pour que la forme (77) ne puisse devenir négative pour aucun système de valeurs de A et de B, il faut que l'on ait les inégalités

$$(79)\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right) \geqq 0,$$

$$(80)\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3} \geqq 0,$$

$$(81)\quad \Delta = \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\right]\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right] - \left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]^2 \geqq 0.$$

Ces diverses inégalités conduisent à des propositions intéressantes.

On a, en effet, en tout point de la masse fluide, en vertu des égalités (38) et (76),

$$\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = \Pi. \tag{82}$$

Cette égalité détermine la densité ρ en un point du fluide lorsqu'on connaît en ce point la pression Π et la concentration s. Supposons que la concentration s demeurant constante, la pression Π augmente de $d\Pi$; l'égalité (82), différentiée, donne

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right) d\rho = d\Pi.$$

Jointe à la condition (79), cette égalité nous apprend que, *lorsque la pression croît en un point du fluide sans que la concentration en ce point éprouve aucun changement, la densité en ce point ne peut diminuer*.

Supposons maintenant que, Π étant maintenu constant, s varie de ds; l'égalité (82) nous donne

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right) d\rho + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial s} ds = 0.$$

Lorsque la pression en un point d'un fluide est maintenue constante, un accroissement de la concentration en ce point produit une variation de la densité dont le signe est celui de $-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial s}$.

En tout point d'un fluide, on a les égalités

$$\zeta + \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + V + U + \frac{\lambda + \mu s}{1 + s} = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} - \frac{\lambda - \mu}{(1 + s)^2} = 0. \tag{36}$$

Ces égalités, différentiées, donnent

$$\left(2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right) d\rho + \left[\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial s} - \frac{\lambda - \mu}{(1 + s)^2}\right] ds = X dx + Y dy + Z dz,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s\, \partial \rho} d\rho + \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda - \mu)}{(1 + s)^3}\right] ds = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$X = X_i + X_e, \qquad Y = Y_i + Y_e, \qquad Z = Z_i + Z_e.$$

Résolvons ces équations par rapport à $d\rho$, ds, en tenant compte de l'égalité (36); nous trouvons sans peine

$$(83) \qquad d\rho = \frac{\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} + \dfrac{2(\lambda - \mu)}{(1+s)^3}}{\Delta}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

$$(84) \qquad ds = -\frac{\rho\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial s\,\partial \rho}}{\Delta}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

En tenant compte de la condition (80), l'égalité (83) nous redonne cette proposition, que nous avons déjà trouvée autrement :

Le long d'un chemin élémentaire faisant un angle aigu avec la direction de la force, la densité ne peut être décroissante.

L'égalité (84), jointe à la proposition que nous avions précédemment obtenue, conduit à une nouvelle proposition :

Si, sous pression constante, un accroissement de concentration du fluide entraîne une augmentation de densité, la concentration ne peut être que croissante le long d'un chemin élémentaire faisant un angle aigu avec la direction de la force; l'inverse a lieu si, sous pression constante, un accroissement de concentration du fluide est accompagné d'une diminution de densité.

§ 7. — Fluides dont les divers éléments se repoussent ou s'attirent en raison inverse du carré de leur distance mutuelle.

Considérons maintenant un fluide dont les divers éléments *se repoussent* en raison inverse du carré de leur mutuelle distance; nous aurons alors

$$(85) \qquad \Psi = \frac{\varepsilon}{r},$$

ε étant une constante positive. Cette détermination de la fonction Ψ entraîne, en vertu de théorèmes connus, la conséquence suivante : Dans l'expression de $\delta^2\Phi$, donnée par l'égalité (62), *la quantité que nous avons désignée par* Y *est essentiellement positive*. De là, on déduit sans peine cette proposition :

Les conditions que nous avons indiquées comme nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un fluide deviennent en même temps suffisantes dans le cas où les actions mutuelles de deux éléments quelconques du fluide se réduisent à une force répulsive inversement proportionnelle au carré de la distance des éléments.

Il n'en est plus de même lorsque l'action inverse au carré de la distance mutuelle qui s'exerce entre deux éléments fluides est une action *attractive*. On a, dans ce cas,

$$\Psi = -\frac{f}{r}, \tag{86}$$

f étant une constante positive. Un théorème connu nous apprend que, dans ce cas, *la quantité que nous avons désignée par* Y *est essentiellement négative*.

Ce caractère de la quantité Y ne nous fournit pas les conditions qui suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre du fluide; mais il nous permet de compléter les conditions nécessaires déjà trouvées par les additions suivantes :

1° *Il ne peut exister deux fonctions continues* $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, *dont l'une au moins diffère de zéro, telles que l'expression*

$$\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)[A(x,y,z)]^2 + \rho\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{2(\lambda-\mu)}{(1+s)^3}\right][B(x,y,z)]^2 + 2\left[\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial s} - \frac{\lambda-\mu}{(1+s)^2}\right]A(x,y,z)\,B(x,y,z)$$

soit égale à zéro en tous les points d'un volume fini faisant partie de la masse fluide.

2° *La quantité* N *ne peut être égale à zéro en tous les points d'une aire d'étendue finie tracée à la surface qui limite le fluide.*

3° *La quantité* $(\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2)$ *ne peut être égale à zéro en tous les points d'une aire d'étendue finie tracée à la surface de séparation de deux fluides* 1 *et* 2.

Entre les deux cas que nous venons de traiter se trouve le cas où les éléments qui composent le fluide n'exercent l'un sur l'autre *aucune action;* dans ce cas, *la quantité* Y *est égale à zéro* et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Lorsque les éléments qui composent le fluide sont sans action les uns sur les autres, les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre doivent être complétées comme nous venons de l'indiquer pour le cas où les éléments s'attirent en raison inverse du carré de leur distance mutuelle, et elles deviennent alors conditions suffisantes.

C'est le résultat auquel nous étions parvenus directement en d'autres publications [1].

Traçons une surface fermée σ, enfermant un volume ϖ contenant tout ou partie du fluide. Soit ν la normale à la surface σ vers l'extérieur du volume ϖ; on sait que l'on a identiquement

$$(87) \qquad \mathrm{S}_\sigma \frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial\nu} d\sigma = \int_\varpi \Delta(\mathrm{U}+\mathrm{V})\, d\varpi.$$

Appliquons d'abord cette égalité au cas d'un fluide dont les divers éléments se repoussent les uns les autres en raison inverse du carré de leur distance mutuelle et sont attirés ou repoussés en raison inverse du carré de la distance par des masses extérieures. L'égalité (85) nous donnera

$$\Delta\mathrm{U} = 0, \qquad \Delta\mathrm{V} = -4\pi\varepsilon\rho.$$

L'égalité (87) deviendra

$$\mathrm{S}_\sigma \frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial\nu} d\sigma = -4\pi\varepsilon \int_\varpi \rho\, d\varpi.$$

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 91). — *Dissolutions et mélanges;* 1er Mémoire : *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. III.B).

Le second membre étant à coup sûr négatif, il en est de même du premier; il y a donc assurément des points de la surface σ où $\frac{\partial(U+V)}{\partial\nu}$ est négatif. En ces points, on a

$$(X_i + X_e)\cos(\nu, x) + (Y_i + Y_e)\cos(\nu, y) + (Z_i + Z_e)\cos(\nu, z) > 0;$$

en ces points, la force tant extérieure qu'intérieure fait un angle aigu avec la normale ν. Dès lors, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Un fluide dont les divers éléments se repoussent en raison inverse du carré de la distance est soumis à l'action de masses extérieures qui attirent ou repoussent ces mêmes éléments en raison inverse du carré de la distance; ce fluide est en équilibre stable; traçons une surface fermée renfermant ce fluide en totalité ou en partie. Il existe sur cette surface des points tels que si l'on s'éloigne d'un tel point suivant la normale à la surface et vers l'extérieur de la surface, on rencontre, après un trajet infiniment petit, un fluide au moins aussi dense que celui qui se trouvait au point que l'on a quitté.

De cette proposition se déduisent les conséquences suivantes :

Si, dans un tel fluide, on trace une surface d'égale densité σ qui soit fermée, toute surface d'égale densité σ', tracée à l'intérieur de la surface σ, correspond à une densité au plus égale à celle que l'on rencontre sur la surface σ; toute surface d'égale densité σ'', contenant à son intérieur la surface σ, correspond à une densité au moins égale à celle que l'on rencontre sur la surface σ.

Le fluide que nous étudions ne peut être en équilibre stable s'il est limité par une surface libre fermée.

Considérons, maintenant, *un fluide dont les divers éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance et sont attirés ou repoussés en raison inverse du carré de la distance par des masses*

extérieures. Nous aurons, en vertu de l'égalité (86),

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta V = 4\pi f \rho,$$

et l'égalité (87) deviendra

$$S_\sigma \frac{\partial(V+U)}{\partial\nu} d\sigma = 4\pi f \int_w \rho \, d\varpi.$$

Le second membre étant assurément positif, il en sera de même du premier, et nous obtiendrons des *résultats inverses de ceux que nous venons d'énoncer*.

§ 8. — Masse fluide, animée d'un mouvement de rotation uniforme et dont les divers éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance.

Imaginons une masse fluide dont les éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance mutuelle, et sont attirés suivant la même loi par des masses fixes; supposons en outre que cette masse fluide soit animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe donné. On sait combien il est difficile de déterminer la figure d'équilibre de cette masse et d'établir les conditions dans lesquelles cet équilibre est stable. Nous ne prétendons pas ici résoudre ce problème dans des cas nouveaux; nous voulons seulement apporter la démonstration de quelques propositions que l'on a toujours regardées comme certaines.

Prenons l'axe de rotation pour axe des z. Soit ω la vitesse angulaire de rotation. On sait que, pour obtenir l'équilibre relatif de la masse fluide, il suffit de chercher l'état d'équilibre absolu qu'elle prendrait sous l'action des forces qui la sollicitent réellement et de forces fictives (forces centrifuges) admettant pour fonction potentielle

$$W = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{88}$$

Les considérations précédemment exposées touchant l'équilibre des fluides s'appliquent donc à ce cas.

Touchant la *stabilité* de cet équilibre relatif, nous nous bornerons à rappeler le résultat suivant, dû à MM. W. Thomson et Tait :

Soit un système soumis à des forces ayant pour potentiel Ω; *ce système est en équilibre relatif, et sa force vive est* $\mathfrak{T}$. SI L'ON SUPPOSE EN CE SYSTÈME DES RÉSISTANCES PASSIVES, *pour que l'équilibre relatif soit stable, il faut et il suffit que la quantité* $(\Omega + \mathfrak{T})$ *soit un minimum.*

Dans le cas général, où nous nous sommes placés, où le système renferme des fluides compressibles, ce n'est plus à la Mécanique, mais à la Thermodynamique qu'il faut faire appel pour traiter de l'équilibre et du mouvement de ce système. La proposition de MM. Thomson et Tait devra alors être remplacée par la suivante :

Pour que l'équilibre relatif d'un système QUI OFFRE DES RÉSISTANCES PASSIVES *soit stable, il faut et il suffit que la somme* $(\Phi + \mathfrak{T})$ *de son potentiel thermodynamique et de sa force vive soit minimum.*

On démontrera sans peine que cette condition est suffisante en s'appuyant sur les principes que nous avons posés ailleurs ([1]) et en imitant les raisonnements donnés par Lejeune-Dirichlet dans le cas de l'équilibre absolu. Quant à la nécessité de la condition, *pour un système qui ne dépend que d'un nombre limité de paramètres variables,* elle se déduira de l'étude des petits mouvements du système, selon la méthode appliquée par Lagrange à l'équilibre absolu et par MM. Thomson et Tait à l'équilibre relatif. La démonstration ne pourra s'étendre au cas de systèmes dépendant d'un nombre illimité de paramètres variables sans postulat spécial; on pourra répéter à cet égard ce que nous avons dit au sujet de l'équilibre absolu, au début de notre Mémoire *sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant.*

Admettons dorénavant que le minimum de $(\Phi + \mathfrak{T})$ soit la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre relatif d'un

---

([1]) *Commentaires aux principes de la Thermodynamique,* 3e partie, Chapitre IV, § 2 (*Journal de Mathématiques,* 4e série, t. X, p. 263).

système qui offre des résistances passives, ou, selon la dénomination adoptée par M. Poincaré [1], pour la *stabilité séculaire* du système.

M. Poincaré, en étudiant la stabilité relative des figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation, n'a pas cherché d'une manière absolument générale les conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme $(\Omega + \mathfrak{T})$ soit minimum ; au § 9 de son Mémoire, il traite seulement le cas où le mouvement troublé du système est encore un mouvement uniforme de rotation, de *même vitesse angulaire* ω, *autour du même axe* OZ ; au § 10, le cas où le mouvement troublé correspond à un *même moment de quantité de mouvement par rapport à l'axe* OZ que le mouvement initial, ce qui suppose que les forces perturbatrices avaient un moment nul par rapport à l'axe OZ. C'est dans le premier de ces deux cas que nous nous supposerons placé ; cette restriction est sans inconvénient pour l'objet que nous nous proposons ; les conditions qui, dans ce cas restreint, sont nécessaires pour le minimum de $(\Phi + \mathfrak{T})$, demeurent nécessaires dans le cas général.

Dès lors, *les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre absolu d'une masse fluide dont les éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance* (conditions énoncées au § 7) *demeurent nécessaires pour la stabilité séculaire de la même masse animée d'un mouvement de rotation uniforme, pourvu que l'on ajoute aux quantités* $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ *les composantes* X_c, Y_c, Z_c *de la force centrifuge*.

D'après l'égalité (88), on a

$$X_c = \omega^2 x, \qquad Y_c = \omega^2 y, \qquad Z_c = 0. \tag{89}$$

L'identité (87), appliquée au cas actuel, devient

$$\mathbf{S}\, \frac{\partial(U + V + W)}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_w \Delta(U + V + W)\, d\varpi. \tag{90}$$

---

[1] H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, p. 259; 1885).

En vertu des égalités (86) et (88), on a

$$\Delta U = 0, \quad \Delta V = 4\pi f \rho, \quad \Delta W = -2\omega^2.$$

Soient $\mu = \int \rho \, d\varpi$ la masse contenue dans la surface σ et $\varpi = \int_\varpi d\varpi$ le volume qu'enferme cette surface. L'égalité (90) deviendra

$$(91) \qquad \mathrm{S}_\sigma \frac{\partial(U + V + W)}{\partial \nu} d\sigma = 2(2\pi f \mu - \varpi \omega^2).$$

En raisonnant sur cette égalité comme nous l'avons fait au § 7 sur des égalités analogues, nous arrivons aux conséquences suivantes :

Traçons une surface fermée σ englobant un volume ϖ et contenant une masse μ du fluide.

Si l'on a $\omega^2 < \frac{2\pi f \mu}{\varpi}$, il est des points M *sur la surface σ tels que si l'on s'éloigne de l'un de ces points en pénétrant à l'intérieur du volume ϖ, on ne rencontre pas de masse fluide moins dense que celle qui se trouvait au point* M.

Si l'on a $\omega^2 > \frac{2\pi f \mu}{\varpi}$, il est des points M *sur la surface σ tels que si l'on s'éloigne de l'un de ces points en pénétrant à l'intérieur du volume ϖ, on ne rencontre pas de masse fluide plus dense que celle qui se trouvait au point* M.

Appliquons cette proposition à une surface entourant la surface limite du fluide et infiniment voisine de celle-ci ; nous en conclurons qu'*une masse fluide terminée par une surface libre ne peut posséder la stabilité séculaire si l'on a*

$$\omega^2 > \frac{2\pi f \mathfrak{M}}{\mathfrak{W}},$$

$\mathfrak{M}$ étant la masse totale du fluide et $\mathfrak{W}$ son volume.

M. Poincaré avait montré [1] que, dans ce cas, la résultante des

---

[1] H. Poincaré, *Bulletin astronomique*, t. II, p. 117. — Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 108.

forces intérieure, extérieure et centrifuge est, en certains points de la surface limite du fluide, dirigée vers l'extérieur; il en avait conclu que la masse ne pouvait être en équilibre stable; notre analyse démontre un intermédiaire que M. Poincaré regardait comme évident.

Supposons la vitesse angulaire de rotation ω assez faible pour que l'on ait assurément, en tout point de la masse fluide,

$$\omega^2 < 2\pi f \rho. \tag{92}$$

On aura alors, quelle que soit la surface σ,

$$\omega^2 < \frac{2\pi f \mu}{w}$$

et l'on pourra énoncer les théorèmes suivants :

Si l'on trace, dans une région continue de la masse fluide, une surface fermée en tous les points de laquelle la densité du fluide ait la même valeur, en tous les points intérieurs à cette surface la densité a une valeur au moins égale à celle qu'elle prend sur la surface.

Si une surface fermée sépare deux fluides continus différents, le fluide le plus dense est intérieur à la surface.

Ces propositions ont toujours été regardées comme certaines par les auteurs qui, depuis Clairaut, ont traité de la figure des planètes, bien qu'elles n'aient, à notre connaissance, reçu aucune démonstration.



Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible;

PAR M. P. DUHEM.

Dans un précédent Mémoire (¹), nous avons étudié la stabilité de l'équilibre d'un corps solide flottant à la surface de séparation de deux fluides compressibles, soumis à des forces extérieures quelconques dépendant d'une fonction potentielle. Nous n'avons pas obtenu la solution complète de cette question très générale ; nous avons obtenu seulement :

1° Des conditions nécessaires, mais peut-être pas suffisantes pour la stabilité de l'équilibre ;

2° Des conditions suffisantes, mais peut-être pas nécessaires.

C'est seulement dans le cas où les deux fluides, à la séparation desquels flotte le solide, confinent par une surface illimitée que nous avons pu donner les conditions qui sont à la fois nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre du flotteur.

Nous nous proposons, aujourd'hui, de résoudre la question, sinon dans son entière généralité, du moins dans des cas très étendus.

Les résultats que nous nous proposons d'établir sont les suivants :

1° Si le solide flotte à la surface qui sépare un fluide compressible d'un espace vide, quelle que soit la force extérieure, dépendant d'une

---

(¹) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. I, p. 91 ; 1895).

fonction potentielle, à laquelle le fluide est soumis, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre du flotteur soit stable.

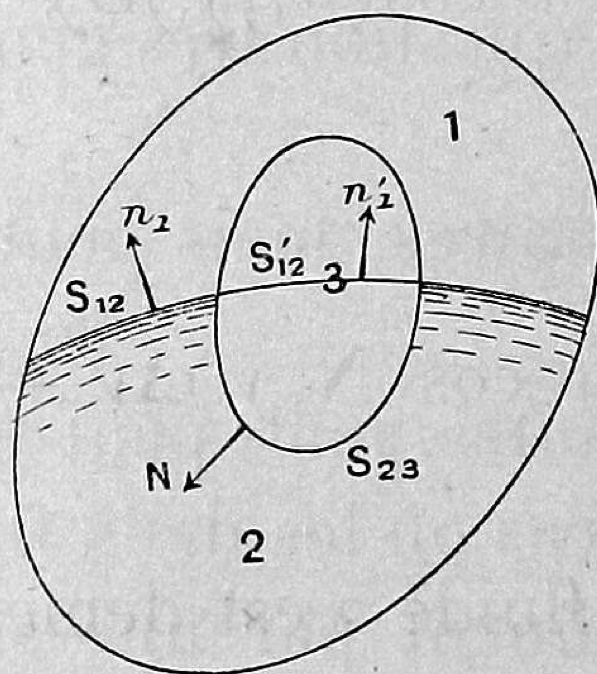
2° La méthode qui fournit ces résultats ne s'applique pas, en général, au cas où le solide flotte à la surface de séparation de deux fluides; toutefois, dans le cas particulier où les deux fluides sont homogènes et incompressibles, elle s'applique et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre du flotteur.

3° Cette méthode s'étend, dans le premier cas, à un flotteur portant un lest fluide, compressible suivant une loi quelconque; dans le second cas, à un navire chargé d'un lest liquide incompressible.

I.

Un fluide 2 (*fig.* 1), compressible suivant une loi quelconque, porte un solide 3; au-dessus du fluide 2, se trouve un espace vide 1.

Fig. 1.



Soient: S_{12} la surface de contact des fluides 1 et 2;

n_1 la normale à cette surface vers l'intérieur de l'espace 1;

S_{23} la surface de séparation du solide et du fluide;

N la normale à cette surface vers l'intérieur du fluide;

Dx, Dy, Dz les composantes du déplacement d'un point du fluide;

Δx, Δy, Δz les composantes du déplacement d'un point du solide;

δf, δg, δh, δl, δm, δn les trois composantes de la translation élémentaire et les trois composantes de la rotation élémentaire en lesquelles se décompose le déplacement virtuel le plus général de ce corps;

ρ_2 la densité du fluide;

$\delta\rho_2$ la variation de cette densité en un point fixe de l'espace;

V la fonction potentielle des forces extérieures qui sollicitent le fluide.

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, en tout déplacement virtuel du système,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ &+\rho_2\int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1,x)Dx+\cos(n_1,y)Dy+\cos(n_1,z)Dz]^2\,dS_{12} \\ &+Q>0, \end{aligned}\right.$$

Q étant une forme quadratique en δf, δg, δh, δl, δm, δn dont nous avons formé les coefficients dans notre Mémoire : *Sur la stabilité des corps flottants.*

D'ailleurs, un déplacement virtuel est assujetti à la seule condition

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_2\int_{S_{12}} [\cos(n_1,x)Dx+\cos(n_1,y)Dy+\cos(n_1,z)Dz]\,dS_{12} \\ &+\int_{v_2}\delta\rho_2\,dv_2 \\ &-\int_{S_{23}}\rho_2[\cos(N,x)\Delta x+\cos(N,y)\Delta y+\cos(N,z)\Delta z]\,dS_{23}=0, \end{aligned}\right.$$

qui exprime que la masse du fluide 2 est demeurée invariable.

Dans cette égalité, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y &= \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z &= \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m, \end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées du point du solide qui subit le déplacement infiniment petit Δx, Δy, Δz.

On obtiendra des conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre en écrivant que l'inégalité (1) est vérifiée en de certains dépla-

cements soumis à l'égalité (2). Nous allons, de la sorte, obtenir certaines conditions nécessaires, que nous démontrerons ensuite être suffisantes.

1° *La quantité* $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}$ *n'est négative en aucun point du fluide; elle n'est pas nulle en tous les points d'un volume fini, si petit soit-il.*

Si cette quantité était négative en un point du fluide, par raison de continuité, elle serait négative en tous les points d'un volume fini entourant ce point. Si donc l'hypothèse précédente était inexacte, on pourrait, à l'intérieur du volume v_2, tracer un volume fini u_2 tel que $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}$ ne serait positif en aucun point du volume u_2.

Dès lors, donnons au système un déplacement virtuel défini de la manière suivante :

1° Le solide 3 demeure immobile;

2° La surface S_{12} demeure indéformable;

3° La densité du fluide 2 demeure invariable en tous les points qui se trouvent à l'extérieur du volume u_2 et à sa surface;

4° En tout point intérieur au volume u_2, la densité éprouve une variation $\delta\rho_2$ différente de o, mais vérifiant l'égalité

$$\int_{u_2} \delta\rho_2 \, dv_2 = 0.$$

Il est aisé de voir qu'en un semblable déplacement, l'égalité (2) est vérifiée. Mais le premier membre de l'inégalité (1) se réduit à

$$\int_{u_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (\delta\rho_2)^2 \, du_2,$$

quantité qui ne peut être que nulle ou négative.

On trouve donc cette première condition nécessaire :

1. *On doit avoir, en tout point du fluide,*

$$(4) \qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} \geqq 0,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu en tous les points d'un volume fini, si petit soit-il.

2. *On doit avoir, en tout point de la surface* S_{12},

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} \geqq 0, \tag{5}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu en tous les points d'une aire finie, si petite soit-elle.

Si, en effet, cette condition n'était pas remplie, on pourrait, sur la surface S_{12}, tracer une aire a_{12} telle qu'en aucun point de cette aire, $\frac{\partial V}{\partial n_1}$ n'aurait une valeur positive.

Cela étant, imposons au système un déplacement virtuel défini de la manière suivante :

1° Le solide 3 demeure immobile ;

2° La densité ρ_2 demeure invariable en tout point du volume v_2 ;

3° La partie de la surface S_{12}, qui est extérieure à l'aire a_{12}, et le contour de cette aire demeurent invariables ;

4° L'aire a_{12} se déforme de telle sorte que

$$\int_{a_{12}} [\cos(n_1, x)\mathrm{D}x + \cos(n_1, y)\mathrm{D}y + \cos(n_1, z)\mathrm{D}z]\, da_{12} = 0.$$

Il est aisé de voir qu'en un semblable déplacement, l'égalité (2) serait vérifiée. Mais, d'autre part, le premier membre de l'inégalité (1) se réduirait à

$$\rho_2 \int_{a_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\mathrm{D}x + \cos(n_1, y)\mathrm{D}y + \cos(n_1, z)\mathrm{D}z]^2\, da_{12},$$

quantité qui ne pourrait être que nulle ou négative, en sorte que l'inégalité (1) ne pourrait être vérifiée.

3. Donnons au solide un déplacement virtuel arbitraire δf, δg, δh, δl, δm, δn, et associons-lui un déplacement du fluide défini de la manière suivante :

1° En tout point de la surface S_{12}, le fluide éprouve un déplace-

ment dont les composantes dx, dy, dz vérifient l'égalité

$$(6)\qquad \cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz = \frac{\theta}{\frac{\partial V}{\partial n_1}},$$

θ étant une quantité infiniment petite dont la valeur est indépendante de x, y, z;

2° En tout point du volume v_2, la densité éprouve une variation

$$(7)\qquad \delta\rho_2 = \frac{\theta}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}.$$

Ce déplacement virtuel vérifiera la condition (2), si l'on détermine la valeur de θ par l'égalité

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta\left[\rho_2\int_{S_{12}}\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}dS_{12} + \int_{v_2}\frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}dv_2\right] \\ &= \int_{S_{23}}\rho_2[\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z]dS_{23}.\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir qu'en vertu des égalités (3) et (8) on peut écrire

$$(9)\qquad \theta = \alpha_1\delta f + \alpha_2\delta g + \alpha_3\delta h + \beta_1\delta l + \beta_2\delta m + \beta_3\delta n,$$

égalité dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont six constantes.

Les constantes α_1, β_1 sont données par les égalités :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\int_{S_{23}}\rho_2\cos(N, x)dS_{23}}{\rho_2\int_{S_{12}}\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}dS_{12} + \int_{v_2}\frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}dv_2}, \\ \beta_1 &= \frac{\int_{S_{23}}\rho_2[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]dS_{23}}{\rho_2\int_{S_{12}}\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}dS_{12} + \int_{v_2}\frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}dv_2}.\end{aligned}\right.$$

Les quantités α_2, α_3 se déduisent de α_1 en imposant une permutation circulaire aux lettres x, y, z; les quantités β_2, β_3 se déduisent de même de β_1.

Nous dirons que le déplacement virtuel du fluide défini par les égalités (6), (7), (9) et (10) constitue le *déplacement associé* au déplacement

$$\delta f,\ \delta g,\ \delta h,\ \delta l,\ \delta m,\ \delta n$$

du solide.

Nous obtiendrons évidemment une condition nécessaire pour la stabilité du système en écrivant que l'inégalité (1) est vérifiée lorsqu'on donne au flotteur un déplacement virtuel quelconque et, au fluide, le déplacement associé.

Or, dans ce cas, en vertu des égalités (6) et (7), on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} &= \int_{v_2} \frac{d^2\varphi(\rho_2)}{d\rho_2^2}(d\rho_2)^2\,dv_2 \\ &\quad + \rho_2\int_{\mathrm{S}_{12}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}[\cos(n_1, x)\,dx + \cos(n_1, y)\,dy + \cos(n_1, z)\,dz]^2\,d\mathrm{S}_{12} \\ &= \theta^2\left[\int_{v_2} \frac{1}{\dfrac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}\,dv_2 + \rho_2\int_{\mathrm{S}_{12}} \frac{1}{\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}}\,d\mathrm{S}_{12}\right]. \end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (9) et (10) cette égalité devient

$$(12)\qquad \mathrm{T} = \frac{(a_1\delta f + a_2\delta g + a_3\delta h + b_1\delta l + b_2\delta m + b_3\delta n)^2}{\displaystyle\int_{v_2} \frac{1}{\dfrac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}\,dv_2 + \rho_2\int_{\mathrm{S}_{12}} \frac{1}{\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}}\,d\mathrm{S}_{12}}.$$

Dans cette égalité, a_1, b_1 sont donnés par les égalités

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \int_{\mathrm{S}_{23}} \rho_2\cos(\mathrm{N}, x)\,d\mathrm{S}_{23}, \\ b_1 &= \int_{\mathrm{S}_{23}} \rho_2[y\cos(\mathrm{N}, z) - z\cos(\mathrm{N}, y)]\,d\mathrm{S}_{23}; \end{aligned}\right.$$

a_2, a_3 se déduisent de a_1 en imposant aux lettres x, y, z une permutation tournante; b_2, b_3 se déduisent de même de b_1.

La quantité T est, comme Q, une forme quadratique en δf, δg, δh, δl, δm, δn. Nous sommes donc amenés à énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il est nécessaire que la forme quadratique $(T + Q)$ *soit une forme définie positive :*

$$T + Q > 0. \tag{14}$$

Nous allons maintenant démontrer que *les trois conditions énoncées sont suffisantes pour assurer la stabilité de l'équilibre du système.*

Considérons, en effet, un déplacement virtuel quelconque du système; il vérifie l'égalité (2).

Imposons ensuite au solide le même déplacement virtuel, et au fluide le *déplacement associé;* l'égalité (2) sera encore vérifiée dans ce dernier cas; de plus, dans les deux cas, le troisième terme du premier membre de l'égalité (2) aura même valeur.

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz]\, dS_{12} \\
&- \rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]\, dS_{12} \\
&+ \int_{v_2} \delta\rho_2\, dv_2 - \int_{v_2} d\rho_2\, dv_2 = 0,
\end{aligned}$$

égalité qui peut encore s'écrire, en multipliant toutes les quantités sous les signes $\int$ par la constante θ, et en tenant compte des égalités (6) et (7),

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]^2\, dS_{12} \\
&- \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz] \\
&\qquad \times [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]\, dS_{12} \\
&+ \int_{v_2} \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (d\rho_2)^2\, dv_2 - \int_{v_2} \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\, d\rho_2\, \delta\rho_2\, dv_2 = 0.
\end{aligned}$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (11), transforme l'inégalité (1) en celle-ci :

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (\delta\rho_2 - d\rho_2)^2 \, dv_2 \\ & + \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\ \cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz \\ & \qquad\qquad - \cos(n_1, x)\, dx - \cos(n_1, y)\, dy - \cos(n_1, z)\, dz]^2 \, dS_{12} \\ & + T + Q > 0. \end{aligned} \right.$$

Or, il est clair que cette inégalité résulte des trois conditions précédemment énoncées et exprimées par les inégalités (4), (5) et (14). Nous avons donc obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre du système soit stable.

Quelques remarques au sujet de ces conditions.

En vertu des conditions nécessaires (4) et (5), la forme T, donnée par l'égalité (12), ne peut jamais être négative; on obtient donc, comme nous l'avons reconnu ailleurs par une autre voie, des conditions suffisantes pour la stabilité de l'équilibre en associant aux conditions (4) et (5) celle-ci :

La forme quadratique Q *est une forme définie positive.*

Mais cette dernière condition n'est pas, en général, nécessaire; elle ne devient nécessaire que lorsque T est identiquement nul. C'est ce qui a lieu assurément dans le cas où le fluide est illimité et où l'une au moins des deux quantités $\frac{\partial V}{\partial n_1}$, $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}$ ne croît pas au delà de toute limite lorsqu'on s'éloigne indéfiniment du lieu où se trouve le corps flottant.

Toutes ces conclusions sont d'accord avec celles que nous avons obtenues directement dans notre Mémoire *Sur la stabilité des corps flottants*.

II.

La méthode précédente ne s'applique pas à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre d'un solide qui flotte à la surface de séparation de deux fluides compressibles. Il est aisé de voir, en effet, que la possibilité de déterminer la quantité θ, qui définit le déplacement du fluide *associé* à un déplacement virtuel du solide, repose essentiellement sur ce fait qu'*une seule* condition (2) est imposée aux divers déplacements virtuels du fluide. Or, dans le cas où l'espace 1, au lieu d'être vide, est rempli par un fluide compressible, il faut associer à la condition (2) une deuxième condition analogue, exprimant que la masse du fluide 1 ne varie pas et la méthode exposée au paragraphe précédent ne peut plus servir.

Il est, toutefois, un cas important où la méthode précédente demeure applicable à un corps solide qui flotte à la surface de séparation de deux fluides; c'est le cas où ces deux fluides sont homogènes et incompressibles; dans ce cas, en effet, la condition (2) revient à exprimer que les divers déplacements virtuels ne font pas varier le volume occupé par le fluide 2; mais l'invariabilité de ce volume assure l'invariabilité du volume occupé par le fluide 1 et, partant, l'invariabilité de la masse de ce fluide. Une seule condition est donc imposée aux déplacements virtuels de la masse fluide et le déplacement *associé* à un déplacement virtuel du solide peut être déterminé comme dans le cas précédent.

L'égalité (12) est remplacée, ici, par

$$(16) \qquad \mathrm{T}' = \frac{(a'_1\,\delta f + a'_2\,\delta g + a'_3\,\delta h + b'_1\,\delta l + b'_2\,\delta m + b'_3\,\delta n)^2}{\displaystyle\int_{\mathrm{S}_{12}} \frac{1}{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}}\, d\mathrm{S}_{12}},$$

avec

$$(17) \quad \begin{cases} a'_1 = \displaystyle\int_{\mathrm{S}_{23}} \cos(\mathrm{N}, x)\, d\mathrm{S}_{23}, & a'_2 = \ldots, \quad a'_3 = \ldots, \\ b'_1 = \displaystyle\int_{\mathrm{S}_{23}} [y\cos(\mathrm{N}, z) - z\cos(\mathrm{N}, y)]\, d\mathrm{S}_{23}, & b'_2 = \ldots, \quad b'_3 = \ldots. \end{cases}$$

Dans ces expressions, les deux surfaces S_{23}, S_{13} ne jouent pas un rôle symétrique. On peut faire disparaître cet inconvénient. Soit S'_{12} la flottaison, c'est-à-dire le prolongement analytique de la surface S_{12} à l'intérieur du solide; soit n'_1 la normale à cette surface dirigée dans le même sens que n_1; nous pourrons écrire

$$(17\ bis)\quad \begin{cases} a'_1 = -\int_{S'_{12}} \cos(n'_1, x)\, dS'_{12}, & a'_2 = \ldots, \quad a'_3 = \ldots, \\ b'_1 = -\int_{S'_{12}} [y\cos(n'_1, z) - z\cos(n'_1, y)]\, dS'_{12}, & b'_2 = \ldots, \quad b'_3 = \ldots. \end{cases}$$

Pour que l'équilibre d'un corps solide flottant à la surface de séparation de deux fluides incompressibles 1 *et* 2 *soit un équilibre stable, il faut et il suffit :*

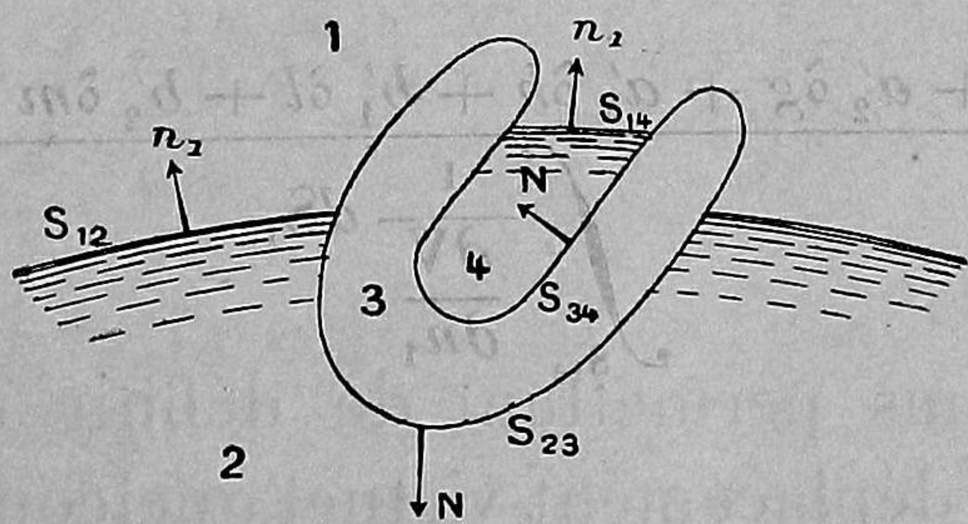
1° *Qu'en tout point de la surface de séparation, la direction de la force passe du fluide moins dense au fluide plus dense;*

2° *Que la forme quadratique en* $\delta f, \delta g, \delta h, \delta l, \delta m, \delta n$ $\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} T' + Q\right)$ *soit une forme définie positive.*

III.

La méthode exposée au § I s'étend au cas où le solide 3 qui flotte à la surface de séparation du fluide compressible 2 et du vide 1 porte

Fig. 2.



un chargement liquide 4, compressible suivant une loi quelconque (*fig.* 2).

Dans ce cas, pour que l'équilibre du système soit stable il faut et il

suffit que l'on ait ([1]), pour tout déplacement virtuel,

$$
(18)\left\{
\begin{aligned}
&\int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2 dv_2 + \int \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}(\delta\rho_4)^2 dv_4 \\
&+ \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]^2 dS_{12} \\
&+ \rho_4 \int_{S_{14}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]^2 dS_{14} + R > 0,
\end{aligned}
\right.
$$

R étant une forme quadratique en

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n.$$

Les modifications virtuelles du système sont assujetties aux deux conditions

$$
(19)\left\{
\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1 x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]dS_{12} \\
&- \int_{S_{23}} \rho_2[\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z]dS_{23} \\
&\qquad\qquad + \int_{v_2} \delta\rho_2 dv_2 = 0, \\
&\rho_4 \int_{S_{14}} [\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]dS_{14} \\
&- \int_{S_{34}} \rho_4[\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z]dS_{34} \\
&\qquad\qquad + \int_{v_4} \delta\rho_4 dv_4 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux conditions permettent de définir un déplacement des fluides *associés* à un déplacement virtuel quelconque du solide.

([1]) *Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. II, p. 23; 1896).

Posons, en tout point du fluide 2,

$$\delta\rho_2 = d\rho_2 = \frac{\theta}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}; \tag{20}$$

en tout point de la surface S_{12},

$$\cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz = \frac{\theta}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}; \tag{21}$$

en tout point du fluide 4,

$$\delta\rho_4 = d\rho_4 = \frac{\eta}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}}; \tag{22}$$

en tout point de la surface S_{14},

$$\cos(x_1, x)dx + \cos(x_1, y)dy + \cos(x_1, z)dz = \frac{\eta}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}, \tag{23}$$

θ, η étant deux fonctions de δf, δg, δh, δl, δm, δn linéaires, homogènes, à coefficients constants, que déterminent les égalités (19).

θ est donné par les égalités (9) et (10); η s'exprime d'une manière analogue par les égalités

$$\eta = \gamma_1\delta f + \gamma_2\delta g + \gamma_3\delta h + \lambda_1\delta l + \lambda_2\delta m + \lambda_3\delta n, \tag{9 bis}$$

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\int_{S_{34}} \rho_4 \cos(N, x)\, dS_{34}}{\rho_4 \int_{S_{14}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{14} + \int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}} dv_4}, \\ \lambda_1 &= \frac{\int_{S_{34}} \rho_4 [y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{34}}{\rho_4 \int_{S_{14}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{14} + \int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}} dv_4}; \end{aligned}\right. \tag{10 bis}$$

γ_2, γ_3, λ_2, λ_3 s'expriment par des égalités analogues.

Pour un tel déplacement, on a

$$(24)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = \displaystyle\int_{v_4} \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}(d\rho_4)^2 dv_4 \\ \qquad + \rho_4 \displaystyle\int_{\mathrm{S}_{14}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}[\cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz]^2 d\mathrm{S}_{14} \\ \quad = \dfrac{(c_1\delta f + c_2\delta g + c_3\delta h + d_1\delta l + d_2\delta m + d_3\delta n)^2}{\displaystyle\int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}} dv_4 + \rho_4 \int_{\mathrm{S}_{14}} \frac{1}{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}} d\mathrm{S}_{14}}, \end{cases}$$

avec

$$(25)\quad \begin{cases} c_1 = \displaystyle\int_{\mathrm{S}_{34}} \rho_4 \cos(\mathrm{N}, x)\, d\mathrm{S}_{34}, \qquad c_2 = \ldots, \qquad c_3 = \ldots, \\ d_1 = \displaystyle\int_{\mathrm{S}_{34}} \rho_4[y\cos(\mathrm{N}, z) - z\cos(\mathrm{N}, y)]\, d\mathrm{S}_{34}, \qquad d_2 = \ldots, \qquad d_3 = \ldots. \end{cases}$$

On peut énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit :

1° *Que l'on ait, en tout point du fluide* 2,

$$\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'un volume fini;

2° *Que l'on ait, en tout point du fluide* 4,

$$\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'un volume fini;

3° *Que l'on ait, en tout point des surfaces* S_{12}, S_{14},

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'une aire finie;

4° *Que la forme quadratique en* δf, δg, δh, δl, δm, δn,

$$T + U + R$$

soit une forme définie positive.

Cette méthode s'étend sans peine au cas où l'espace 1, au lieu d'être vide, est rempli par un fluide, à la condition que les trois fluides 1, 2 et 4 soient incompressibles.

On peut ainsi déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un navire, flottant sur un liquide pesant et portant un chargement liquide pesant, soit en équilibre stable. Une règle [1], résolvant ce problème, était usitée depuis plusieurs années en architecture navale; le raisonnement dont on faisait usage pour établir cette règle en justifiait la nécessité, mais non la suffisance. La méthode précédente démontre que cette règle est, pour la stabilité d'équilibre d'un navire, condition à la fois nécessaire et suffisante, ainsi que nous l'avons indiqué ailleurs [2].

---

[1] E. Guyou, *Théorie du Navire*, p. 120. — Pollard et Dudebout, *Théorie du Navire*, t. II, p. 54.

[2] *Bulletin de l'Association technique maritime*, n° 7, session de 1896, p. 43.

DE L'INFLUENCE QU'UN CHARGEMENT LIQUIDE

EXERCE

SUR LA STABILITÉ D'UN NAVIRE,

PAR M. P. DUHEM,

Professeur de Physique théorique à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité d'un corps flottant ont longtemps exercé la sagacité des géomètres. Pour les découvrir, Bouguer avait limité les déplacements imposés au navire et au liquide qui le porte, par les conditions suivantes :

1° Le déplacement du navire est *isocarène*, c'est-à-dire que le volume immergé demeure invariable;

2° La surface du liquide demeure invariable.

Donnant alors au navire une petite inclinaison, il calculait le couple de redressement et cherchait à quelle condition ce couple tendait, en effet, à s'opposer au chavirement. Il parvint ainsi à la célèbre règle du métacentre.

La démonstration de Bouguer fut vivement et justement critiquée; mais des démonstrations rigoureuses prouvèrent que la règle du métacentre était réellement la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité d'un navire.

Un problème analogue à celui qu'avait traité Bouguer se pose aujourd'hui en architecture navale : le problème dont il s'agit consiste à chercher les *conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre d'un navire qui porte un compartiment partiellement rempli de liquide soit en équilibre stable.*

Pour résoudre ce problème, on a suivi la marche qu'avait employée Bouguer. On a fait prendre au navire une petite inclinaison sous les conditions suivantes :

1° Le déplacement du navire est *isocarène*;

2° La surface du liquide sur lequel flotte le navire est invariable;

3° La surface libre du chargement liquide demeure horizontale.

Puis on a calculé le couple développé et l'on a cherché à quelle condition ce couple déterminait le relèvement et non le chavirement du navire.

Cette méthode a été appliquée tout d'abord par M. Guyou [1], dans un cas particulier, puis généralisée par MM. Pollard et Dudebout [2],

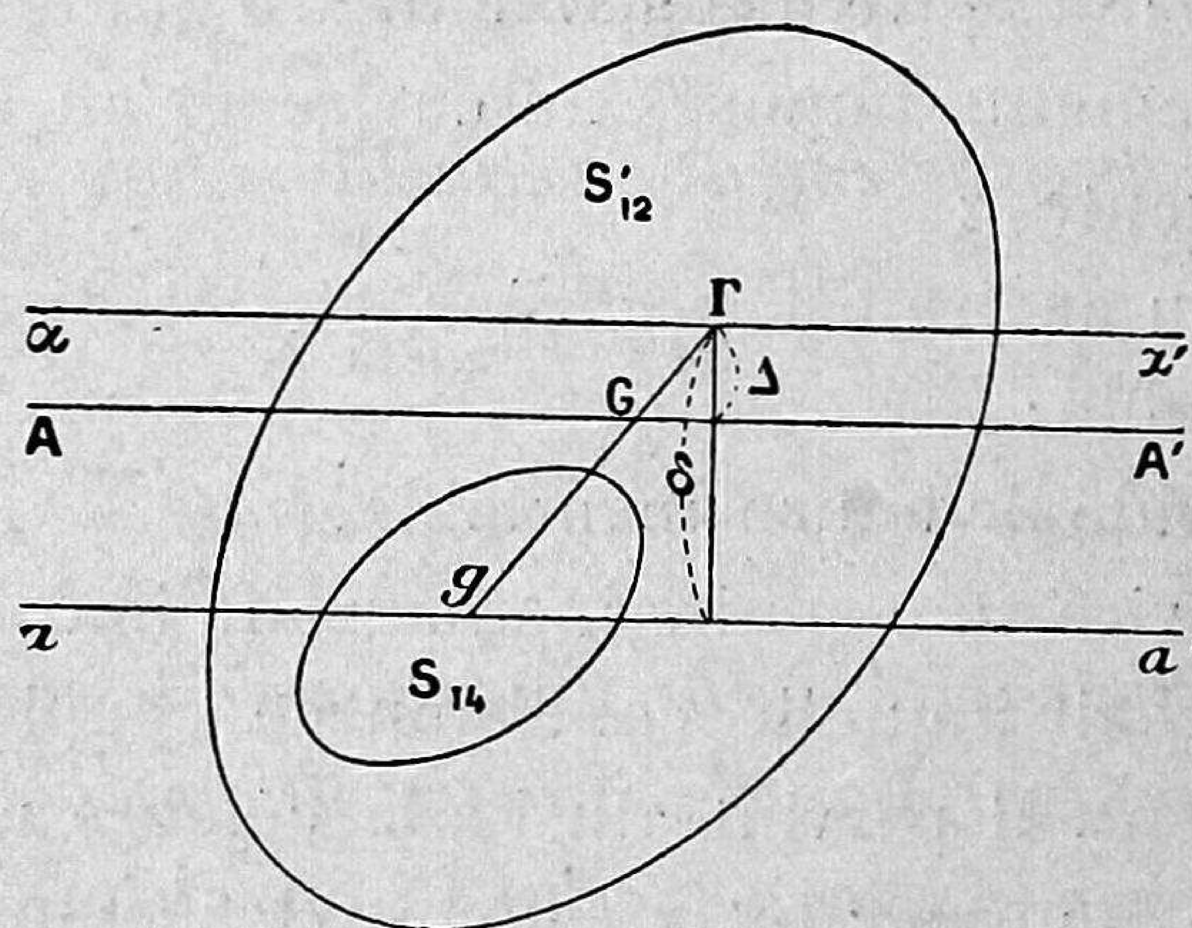
Voici la règle ainsi obtenue :

Soient :

1 l'air atmosphérique;
2 le liquide qui porte le navire;
3 le navire;
4 le lest liquide;
μ la masse des corps 3 et 4;
ζ la cote du centre de gravité de cette masse;
Z la cote du centre de carène;
ρ_1, ρ_2, ρ_4 les densités des fluides 1, 2, 4;
S_{14} la surface libre du chargement liquide;
S'_{12} la flottaison.

Projetons ces deux surfaces sur un même plan horizontal. Soient g, G les centres de gravité respectifs des deux aires (*fig.* 1). Recouvrons la projection de l'aire S_{14} d'une couche superficielle fictive de densité $(\rho_4 - \rho_1)$ et l'aire S'_{12}

Fig. 1.



d'une couche superficielle fictive de densité $(\rho_2 - \rho_1)$. Par les points g, G, menons deux axes horizontaux, parallèles, de direction arbitraire, aa', AA'. Soient i, I les moments d'inertie respectifs des deux distributions superficielles considérées par rapport aux axes aa', AA'.

Pour que l'équilibre du navire soit stable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu(Z - \zeta) + I - i > 0, \tag{1}$$

quelle que soit la commune orientation des deux lignes aa', AA'.

La démonstration de M. Guyou, de MM. Pollard et Dudebout, prête évi-

---

[1] E. Guyou, *Théorie du Navire*, p. 118; Paris, 1887.
[2] Pollard et Dudebout, *Théorie du Navire*, t. II, p. 55; Paris, 1891.

demment aux critiques qui ont été autrefois adressées à la démonstration de Bouguer. On voit sans peine que la condition qu'elles fournissent est nécessaire pour la stabilité du navire; on n'est pas assuré qu'elle soit suffisante.

Nous avons cherché à établir une condition assurément suffisante pour la stabilité de l'équilibre du navire; dans ce but, nous avons formé le potentiel du système composé des fluides 1, 2, 4 et du solide 3; puis, conformément au théorème connu de Lejeune-Dirichlet, nous avons cherché à quelle condition ce potentiel était minimum. Nous avons ainsi obtenu [1] la condition suivante, *condition suffisante, mais peut-être pas nécessaire* pour la stabilité de l'équilibre :

Soit Γ le centre de gravité des masses

$$(\rho_2-\rho_1)S'_{12} \quad \text{et} \quad -(\rho_4-\rho_1)S_{14},$$

respectivement répandues sur les surfaces S'_{12}, S_{14}.

Soit $\alpha\alpha'$ un axe parallèle à aa', AA', mené par le point Γ. Soient J, j les moments d'inertie, par rapport à l'axe $\alpha\alpha'$, des masses

$$(\rho_2-\rho_1)S'_{12} \quad \text{et} \quad (\rho_4-\rho_1)S_{14}$$

respectivement répandues sur les surfaces S'_{12}, S_{14}.

Pour que le navire soit assurément en équilibre stable, il suffit que l'on ait

$$\mu(Z-\zeta)+J-j>0, \tag{2}$$

quelle que soit l'orientation de l'axe horizontal $\alpha\alpha'$.

Lorsque *le centre de gravité de la flottaison et le centre de gravité de la surface libre du chargement liquide sont sur une même verticale,* les points G, g coïncident entre eux et avec le point Γ; on a alors

$$J=I, \qquad j=i,$$

l'inégalité (2) devient identique à l'inégalité (1), et la règle de M. Guyou, de MM. Pollard et Dudebout est complètement justifiée.

Mais, hors ce cas, les inégalités (1) et (2) ne sont plus identiques et, circonstance inquiétante, dans le cas, toujours réalisé dans la pratique, où l'on a l'inégalité

$$(\rho_2-\rho_1)S'_{12}-(\rho_4-\rho_1)S_{14}>0, \tag{3}$$

l'inégalité (1) peut être vérifiée sans que l'inégalité (2) le soit.

---

[1] *Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide* (*Journal de Mathématiques* 5e série, t. II, p. 23).

En effet, en vertu de l'inégalité (3), le point Γ sera au delà du point G sur la ligne gG et l'on aura

$$(\rho_2 - \rho_1) S'_{12} \times \overline{G\Gamma} - (\rho_4 - \rho_1) S_{14} \times \overline{g\Gamma} = 0.$$

Soient δ, Δ les distances des droites aa', AA' à la droite $\alpha\alpha'$. On aura évidemment

$$\frac{\delta}{g\Gamma} = \frac{\Delta}{G\Gamma},$$

en sorte que l'on pourra écrire

1° (4) $$\delta - \Delta > 0,$$

2° (5) $$(\rho_2 - \rho_1) S'_{12} \times \Delta - (\rho_4 - \rho_1) S_{14} \times \delta = 0.$$

Or, on sait que

$$J = I + (\rho_2 - \rho_1) S'_{12} \times \Delta^2,$$
$$j = i + (\rho_4 - \rho_1) S_{14} \times \delta^2.$$

Ces égalités, jointes à l'égalité (5), donnent

$$J - j = I - i + (\rho_2 - \rho_1) S'_{12} \Delta(\Delta - \delta).$$

Cette égalité, jointe à l'inégalité (4), donne l'inégalité

$$J - j < I - i,$$

qui démontre la proposition énoncée.

C'est donc une question fort importante pour la pratique que de trouver, pour la stabilité de l'équilibre d'un navire chargé de liquide, une condition *suffisante* qui soit en même temps *nécessaire*. C'est l'objet du présent travail.

Nous partirons de l'expression de la variation seconde $\delta^2\Phi$ du potentiel du système.

L'axe des z étant pris vertical et dirigé vers le zénith, nous supposerons que le déplacement infiniment petit du solide soit décomposé en trois translations δf, δg, δh, parallèlement aux axes Ox, Oy, Oz, et en trois rotations autour de ces mêmes axes. Si Δx, Δy, Δz sont les composantes du déplacement d'un point, de coordonnées x, y, z, invariablement lié au corps solide, on aura

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta x = \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y = \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z = \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m \end{cases}$$

Soient g, l'intensité de la pesanteur;

Dz, l'élévation de l'une des surfaces S_{12}, S_{14}, en un de ses points.

D'après les formules contenues dans notre Mémoire *Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide,* on aura

$$(7) \quad \delta^2\Phi = g(\rho_2 - \rho_1)\int_{S_{12}} (Dz)^2 dS_{12} + g(\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} (Dz)^2 dS_{14} + R,$$

R étant donné par l'égalité

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
R = {} & g(\rho_2-\rho_1)\,S'_{12}(\delta h)^2 \\
& + g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y^2\,dS_{14}\right](\delta l)^2 \\
& + g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} x^2\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} x^2\,dS_{14}\right](\delta m)^2 \\
& - 2g\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} xy\,dS_{14}\right]\delta l\,\delta m \\
& + 2g\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right]\delta h\,\delta l \\
& - 2g\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} x\,dS_{14}\right]\delta h\,\delta m
\end{aligned}
\right.
$$

Les déplacements Dz ne sont point quelconques; le volume de chacun des fluides 2 et 4 doit demeurer invariable. Ces conditions s'expriment par les égalités suivantes, où N désigne la normale extérieure au solide

$$(9)\quad \int_{S_{12}} Dz\,dS_{12}-\int_{S_{23}}[\cos(N,x)\Delta x+\cos(N,y)\Delta y+\cos(N,z)\Delta z]\,dS_{23}=0,$$

$$(10)\quad \int_{S_{14}} Dz\,dS_{14}-\int_{S_{34}}[\cos(N,x)\Delta x+\cos(N,y)\Delta y+\cos(N,z)\Delta z]\,dS_{34}=0.$$

L'égalité (9) peut se transformer.

En vertu des égalités (6), elle devient

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \int_{S_{12}} Dz\,dS_{12}-\delta f\int_{S_{23}}\cos(N,x)\,dS_{23}-\delta g\int_{S_{23}}\cos(N,y)\,dS_{23}-\delta h\int_{S_{23}}\cos(N,z)\,dS_{23} \\
& \qquad -\delta l\int_{S_{23}}[y\cos(N,z)-z\cos(N,y)]\,dS_{23} \\
& \qquad -\delta m\int_{S_{23}}[z\cos(N,x)-x\cos(N,z)]\,dS_{23} \\
& \qquad -\delta n\int_{S_{23}}[x\cos(N,y)-y\cos(N,x)]\,dS_{23}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais on a

$$\int_{S_{23}}\cos(N,x)\,dS_{23}=0,\qquad \int_{S_{23}}\cos(N,y)\,dS_{23}=0,$$

$$\int_{S_{23}}\cos(N,z)\,dS_{23}=-S'_{12},$$

$$\int_{S_{23}}[y\cos(N,z)-z\cos(N,y)]\,dS_{23}=-\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12},$$

$$\int_{S_{23}}[z\cos(N,x)-x\cos(N,z)]\,dS_{23}=\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12},$$

$$\int_{S_{23}}[x\cos(N,y)-y\cos(N,x)]\,dS_{23}=0.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (11) devient

$$(12) \qquad \int_{S_{12}} Dz\, dS_{12} = - S'_{12}\, \delta h - \delta l \int_{S'_{12}} y\, dS'_{12} + \delta m \int_{S'_{12}} x\, dS'_{12}.$$

L'égalité (10) devient de même

$$(13) \qquad \int_{S_{14}} Dz\, dS_{14} = S_{14}\, \delta h + \delta l \int_{S_{14}} y\, dS_{14} - \delta m \int_{S_{14}} x\, dS_{14}.$$

On peut, en particulier, imposer aux deux surfaces S_{12}, S_{14}, de demeurer horizontales; tout point de la première s'élèvera de δH et tout point de la seconde de $\delta\eta$, δH, $\delta\eta$ étant donnés par les égalités

$$(12\ bis) \qquad S_{12}\, \delta H = - S'_{12}\, \delta h - \delta l \int_{S'_{12}} y\, dS'_{12} + \delta m \int_{S'_{12}} x\, dS'_{12},$$

$$(13\ bis) \qquad S_{14}\, \delta\eta = \quad S_{14}\, \delta h + \delta l \int_{S_{14}} y\, dS_{14} - \delta m \int_{S_{14}} x\, dS_{14}.$$

Les égalités (12) et (12 *bis*) d'une part, les égalités (13) et (13 *bis*) d'autre part, donnent les égalités

$$S_{12}\, \delta H - \int_{S_{12}} Dz\, dS_{12} = 0,$$

$$S_{14}\, \delta\eta - \int_{S_{14}} Dz\, dS_{14} = 0,$$

qui peuvent encore s'écrire

$$(14) \qquad S_{12}(\delta H)^2 - \int_{S_{12}} \delta H\, Dz\, dS_{12} = 0,$$

$$(15) \qquad S_{14}(\delta\eta)^2 - \int_{S_{14}} \delta\eta\, Dz\, dS_{14} = 0.$$

Les égalités (14) et (15) permettent, sans peine, de remplacer l'égalité (7) par la suivante :

$$(16) \qquad \begin{cases} \delta^2\Phi = g(\rho_2 - \rho_1) \displaystyle\int_{S_{12}} (Dz - \delta H)^2\, dS_{12} + g(\rho_4 - \rho_1) \int_{S_{14}} (Dz - \delta\eta)^2\, dS_{14} \\ \qquad + g(\rho_2 - \rho_1)\, S_{12}(\delta H)^2 + g(\rho_4 - \rho_1)\, S_{14}(\delta\eta)^2 + R. \end{cases}$$

Si les deux surfaces S_{12}, S_{14} sont assujetties à demeurer horizontales, on aura, en tout point,

$$Dz - \delta H = 0, \qquad Dz - \delta\eta = 0.$$

Sinon, ces égalités seront en général remplacées par des inégalités. Dès lors, l'égalité (16) entraîne la conséquence suivante :

Pour que la quantité $\delta^2\Phi$ soit positive en tout déplacement virtuel du sys-

tème, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout déplacement virtuel du solide,

$$g(\rho_2-\rho_1)S_{12}(\delta H)^2+g(\rho_4-\rho_1)S_{14}(\delta\eta)^2+R>0. \tag{17}$$

Mais les égalités (12 *bis*) et (13 *bis*) donnent

$$\left\{\begin{aligned}
&g(\rho_2-\rho_1)S_{12}(\delta H)^2+g(\rho_4-\rho_1)S_{14}(\delta\eta)^2\\
&= g\left[(\rho_2-\rho_1)\frac{S'^2_{12}}{S_{12}}+(\rho_4-\rho_1)S_{14}\right](\delta h)^2\\
&+ g\left[\frac{\rho_2-\rho_1}{S_{12}}\left(\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}\right)^2+\frac{\rho_4-\rho_1}{S_{14}}\left(\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right)^2\right](\delta l)^2\\
&+ g\left[\frac{\rho_2-\rho_1}{S_{12}}\left(\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}\right)^2+\frac{\rho_4-\rho_1}{S_{14}}\left(\int_{S_{14}} x\,dS_{14}\right)^2\right](\delta m)^2\\
&-2g\left[\frac{\rho_2-\rho_1}{S_{12}}\left(\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}\right)\left(\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\rho_4-\rho_1}{S_{14}}\left(\int_{S_{14}} x\,dS_{14}\right)\left(\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right)\right]\delta l\,\delta m\\
&+2g\left[\frac{\rho_2-\rho_1}{S_{12}}S'_{12}\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}+(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right]\delta h\,\delta l\\
&-2g\left[\frac{\rho_2-\rho_1}{S_{12}}S'_{12}\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}+(\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} x\,dS_{14}\right]\delta h\,\delta m.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

En vertu des égalités (8) et (18), le premier membre de l'inégalité (17) devient une forme quadratique en

$$\delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,$$

forme qui doit être *définie positive*.

Un choix particulier d'axes de coordonnées permet de donner de cette forme une expression plus simple.

Prenons pour origine des coordonnées le centre de gravité G de la surface de flottaison S'_{12}; pour axe des x, un axe AA' parallèle à l'axe autour duquel s'effectue la rotation instantanée du navire. Nous aurons

$$\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}=0,\qquad \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}=0,$$

$$\delta m=0.$$

Les coordonnées du centre de gravité g de la projection, sur le plan des x, y, de l'aire S_{14} seront

$$a=\frac{1}{S_{14}}\int x\,dS_{14},$$

$$b=\frac{1}{S_{14}}\int y\,dS_{14}.$$

Dès lors l'égalité (8) deviendra

$$
\begin{aligned}
R &= g(\rho_2-\rho_1)S'_{12}(\delta h)^2 \\
&+ g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y^2 dS'_{12} - (\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y^2 dS_{14}\right](\delta l)^2 \\
&- 2g(\rho_4-\rho_1)S_{14}\, b\,\delta h\,\delta l,
\end{aligned}
$$

tandis que l'égalité (18) deviendra

$$
\begin{aligned}
& g(\rho_2-\rho_1)S_{12}(\delta H)^2 + g(\rho_4-\rho_1)S_{14}(\delta\eta)^2 \\
&= g\left[(\rho_2-\rho_1)\frac{S'^2_{12}}{S_{12}} + (\rho_4-\rho_1)S_{14}\right](\delta h)^2 \\
&+ g(\rho_4-\rho_1)b^2 S_{14}(\delta l)^2 \\
&+ 2g(\rho_4-\rho_1)b S_{14}\,\delta h\,\delta l.
\end{aligned}
$$

L'inégalité (17) devient alors

$$
\begin{aligned}
& g\left[(\rho_2-\rho_1)\frac{S'_{12}(S_{12}+S'_{12})}{S_{12}} + (\rho_4-\rho_1)S_{14}\right](\delta h)^2 \\
&+ g\left[\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y^2 dS'_{12} + (\rho_4-\rho_1)\left(b^2 S_{14} - \int_{S_{14}} y^2 dS_{14}\right)\right](\delta l)^2 > 0.
\end{aligned}
$$

Pour que cette inégalité ait lieu, il faut et il suffit évidemment que l'on ait

$$
\mu(Z-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y^2 dS'_{12} + (\rho_4-\rho_1)\left(b^2 S_{14} - \int_{S_{14}} y^2 dS_{14}\right) > 0.
$$

Mais on a évidemment

$$
\begin{aligned}
I &= (\rho_2-\rho_1)\int_{S'_{12}} y^2 dS'_{12}, \\
i &= (\rho_4-\rho_1)\int_{S_{14}} y^2 dS_{14} - (\rho_4-\rho_1)S_{14} b^2.
\end{aligned}
$$

L'inégalité précédente devient donc l'inégalité

$$
\mu(Z-\zeta)+I-i>0. \tag{1}
$$

Ainsi, *pour qu'un navire, portant un chargement liquide, soit en équilibre stable en un bassin limité, il faut et il suffit que la condition indiquée par MM. Pollard et Dudebout soit vérifiée.*

Cette proposition, étant vraie quelles que soient les dimensions du bassin, *s'applique à un navire flottant sur une mer illimitée.*

(Extrait du *Bulletin de l'Association technique maritime*, n° 7; session de 1896.)

24914 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

LE

POTENTIEL THERMODYNAMIQUE

ET LA

PRESSION HYDROSTATIQUE,

PAR P. DUHEM.

INTRODUCTION.

Nous avons indiqué ailleurs (1) de quelle manière on pouvait déterminer la forme générale du potentiel thermodynamique interne d'un système dont la nature varie d'un point à l'autre d'une manière continue. Mais, préoccupé surtout des applications à l'électricité et au magnétisme, nous avons dû glisser rapidement sur quelques questions qui auraient nécessité une discussion rigoureuse; d'ailleurs cette discussion exigeait l'examen préalable d'un grand nombre de difficultés relatives aux principes de la Thermodynamique, et cet examen n'était pas à sa place dans un Ouvrage qui n'était pas consacré à cette branche de science.

Depuis l'époque où a paru l'Ouvrage dont nous parlons, nous avons repris l'étude détaillée de la Thermodynamique (2); les résultats obtenus dans cette étude nous permettent aujourd'hui d'aborder avec toute la rigueur et toute la généralité désirables la détermination du potentiel thermodynamique interne d'un système hétérogène.

Moyennant certaines hypothèses, que nous avons cherché à mettre

(1) *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme,* t. I, Liv. III, Chap. II.

(2) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. VIII et t. IX).

clairement en évidence, on trouve que la forme générale de ce potentiel est la suivante :

$$\mathcal{F} = \int G\, dV + \frac{E}{2} \int\int F\, dV\, dV'.$$

Chacune des intégrations s'étend au volume entier du système; G dépend des variables, telles que la température, la densité, etc., qui définissent les propriétés du système en un point de l'élément dV; F dépend des propriétés de la matière en un point de l'élément dV et en un point de l'élément dV'; toutefois, les températures T et T' en ces deux points n'y figurent pas.

Ce théorème domine l'étude de la Capillarité, de l'Électrostatique, du Magnétisme; nous en avons déjà fait de nombreuses applications et nous espérons en donner d'autres encore dans de prochains Mémoires. Dans ce Mémoire-ci, nous en faisons l'application à l'étude de l'équilibre des fluides.

Le cas le plus simple de l'Hydrostatique est celui où l'on suppose nulle la fonction F. Si l'on désigne par ρ la densité du fluide en un point de l'élément dV, la fonction G devient une simple fonction de ρ et de T, $\varphi(\rho, T)$ et le potentiel thermodynamique interne prend la forme

$$\mathcal{F} = \int \varphi(\rho, T)\, dV.$$

Dans ce cas, les divers éléments du fluide n'exercent les uns sur les autres aucune action. La plupart des propositions relatives à ce cas simple sont bien connues; nous en avons donné ailleurs ([1]) un exposé complet et rigoureux.

Un autre cas, plus général que le précédent, est celui où l'on a

$$EF = \rho\rho' \psi(r),$$

ρ et ρ' étant les densités des deux éléments dV, dV' et r leur distance. Dans ce cas, deux éléments, de masses dm et dm', pris au sein du fluide, exercent l'un sur l'autre une action répulsive, soumise à la loi

---

([1]) *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique.* Cours professé à la Faculté des Sciences de Lille en 1890 1891. T. I, Liv. II.

de l'égalité entre l'action et la réaction, et ayant pour grandeur

$$dm\, dm'\, f(r) \qquad \left[f(r) = -\frac{d\psi(r)}{dr}\right].$$

C'est à ce cas que se rapporte, en particulier, la théorie de la figure des planètes. La plupart des théorèmes généraux, vrais pour le premier cas, le sont également pour ce cas plus général.

Mais ce cas n'est pas le plus général qui se puisse concevoir; dans le cas le plus général, on a

$$\mathrm{EF} = \rho\rho'\,\psi(\rho, \rho', r).$$

Dans ce cas, la force qu'exercent l'une sur l'autre deux particules de masses dm et dm' ne s'obtient plus en multipliant le produit de leurs masses par une fonction de leur seule distance; cette force est de la forme

$$dm\, dm'\, f(\rho, \rho', r) \qquad \left[f(\rho, \rho', r) = -\frac{\partial}{\partial r}\psi(\rho, \rho', r)\right].$$

On sait que M. Faye attribue précisément à une force de ce genre la formation de la queue des comètes.

Mais, et c'est là ce qui distingue le cas général des cas particuliers précédents, cette force ne représente pas, à elle seule, l'action totale de la particule dm' sur la particule dm : il faut y joindre une autre action qui est non plus une force, mais qui est ce que nous avons appelé ailleurs (1) une *influence;* cette influence, qui tend à accroître la densité de l'élément dm, sans tendre à déplacer le centre de gravité de cet élément, a pour grandeur $-\frac{\partial}{\partial\rho}\psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'$.

La masse dm exerce une influence analogue sur la masse dm', en sorte que, pour avoir le travail total des *actions mutuelles* de ces deux masses, il faut ajouter au travail $-\frac{\partial}{\partial r}\psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'\,\delta r$ de la *force mutuelle* le travail $-\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\psi(\rho, \rho', r)\,\delta\rho + \frac{\partial}{\partial\rho'}\psi(\rho, \rho', r)\,\delta\rho'\right] dm\, dm'$ des *influences réciproques*.

(1) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, Ire Partie, Chap. III.

L'introduction de ce nouvel élément, que ne connaît pas la Mécanique rationnelle, montre que le problème de l'Hydrostatique, ainsi généralisé, échappe aux prises de la Statique classique; en revanche, il peut être abordé par la Thermodynamique, et l'étude de ce problème se montre féconde en résultats imprévus.

Le plus important de ces résultats, que nous avions déjà entrevu ailleurs ([1]), est celui-ci :

Dans le cas général, la densité du fluide en un point n'est pas déterminée par la seule connaissance de la pression au même point.

Cette proposition fondamentale : *A une température donnée, la densité est une fonction déterminée de la pression*, proposition que les Traités d'Hydrostatique présentent comme une hypothèse première et universelle, n'est vraie que pour les deux cas particuliers que nous avons signalés tout d'abord.

Le résultat précédent peut encore se mettre sous la forme que voici :

Les surfaces d'égale pression ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale densité.

A ce résultat, on peut en joindre deux autres :

Les surfaces équipotentielles ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale pression.

Les surfaces équipotentielles ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale densité.

Deux de ces trois familles de surfaces : surfaces d'égale pression, surfaces d'égale densité, surfaces équipotentielles, ne coïncident que dans les deux cas particuliers énumérés tout d'abord, et alors elles coïncident toutes trois.

Des théorèmes fondamentaux de l'Hydrostatique classique, un seul demeure vrai pour le cas général; c'est celui-ci :

Une surface d'égale pression est normale en chaque point à la force, tant intérieure qu'extérieure, qui agit en ce point.

([1]) *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. I, pp. 355-359.



CHAPITRE I.

LE POTENTIEL THERMODYNAMIQUE INTERNE D'UN SYSTÈME CONTINU.

Considérons un corps, dont les propriétés varient d'un point à l'autre d'une manière continue ou discontinue, les discontinuités se produisant le long de certaines surfaces. Divisons ce corps en n parties, de telle façon que la nature de chacune de ces parties varie d'un point à l'autre d'une manière continue, les surfaces de discontinuité se trouvant au nombre des surfaces de division qui découpent le corps en ces n parties. Imaginons, en outre, que chacune de ces n parties ait une température uniforme, cette température n'étant pas forcément la même pour les diverses parties $1, 2, \ldots, n$.

Nous supposerons que ces n parties puissent être considérées isolément et que chacune d'elles soit divisible à l'infini en parties qui puissent, elles aussi, être considérées isolément.

Considérons isolément la partie 1. Supposons qu'elle admette un potentiel thermodynamique interne. Ce potentiel est susceptible d'une infinité de déterminations; soit $\mathcal{F}_1$ une de ces déterminations; c'est une quantité dont la valeur est donnée lorsque l'état de la partie 1 est donné. L'énergie interne et l'entropie de cette partie 1 seront déterminées par les égalités

$$E\Upsilon_1 = \mathcal{F}_1 - T\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T}, \tag{1}$$

$$E\Sigma_1 = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T}. \tag{2}$$

Au sujet des parties $2, \ldots, n$, nous pouvons répéter des considérations analogues.

Considérons simultanément les parties $1, 2, \ldots, n$, en ne les supposant pas en contact. Leur ensemble admet pour potentiel thermodyna-

mique interne, pour énergie interne et pour entropie les quantités $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$, déterminées par les égalités

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \ldots + \mathcal{F}_n + E\Psi, \tag{3}$$

$$\mathcal{U} = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \ldots + \Upsilon_n + \Psi, \tag{4}$$

$$\mathcal{S} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_n, \tag{5}$$

dans lesquelles Ψ est une quantité dont la valeur est donnée lorsque l'état des diverses parties 1, 2, ..., n et leur position relative sont donnés; cette quantité Ψ tend vers zéro lorsque les diverses parties 1, 2, ..., n s'éloignent indéfiniment les unes des autres.

Lorsque les diverses parties 1, 2, ..., n sont au contact, le potentiel thermodynamique interne, l'énergie interne et l'entropie ont des valeurs qui sont les limites respectives vers lesquelles tendent les quantités $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$, déterminées par les égalités (3), (4), (5), lorsque les parties 1, 2, ..., n, primitivement isolées, tendent à se mettre en contact.

Ce que nous venons de dire est très général; nous allons maintenant particulariser davantage, en introduisant quelques hypothèses.

La PREMIÈRE HYPOTHÈSE que nous ferons est une hypothèse sur la nature de laquelle nous avons déjà appelé l'attention dans un autre travail ([1]); elle consiste à supposer que l'on a

$$\begin{aligned}\Psi = \Psi_{12} + \Psi_{13} + \ldots + \Psi_{1n} \\ + \Psi_{23} + \ldots + \Psi_{2n} \\ + \ldots + \ldots \\ + \Psi_{n-1,n},\end{aligned} \tag{6}$$

Ψ_{ij} étant la fonction, analogue à Ψ, qui se rapporte au système que composeraient les deux parties i et j, si on les prenait seules; en sorte que le potentiel thermodynamique interne de ce dernier système aurait pour valeur

$$\mathcal{F}_i + \mathcal{F}_j + E\Psi_{ij}.$$

L'égalité (6) peut encore se mettre sous la forme suivante, dont nous

---

([1]) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, Ire Partie (*Journal de Mathématiques* de C. Jordan, t. VIII, p. 315; 1892).

aurons à faire un fréquent usage

$$(6\ bis)\qquad \begin{aligned} 2\Psi = \ & \Psi_{12} + \Psi_{13} + \ldots + \Psi_{1n} \\ & + \Psi_{21} + \Psi_{23} + \ldots + \Psi_{2n} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \Psi_{n1} + \Psi_{n2} + \ldots + \Psi_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Dans cette égalité, Ψ_{ij} et Ψ_{ji} ont identiquement le même sens.

Le système ayant été décomposé en un certain nombre de parties, divisons celles-ci en parties plus petites, ces dernières en nouvelles parties, et ainsi de suite, de telle sorte que le système se trouve divisé en parcelles dont toutes les dimensions tendent vers zéro; admettons qu'à aucun moment ces diverses parties ne cessent de remplir les conditions qui permettent d'attribuer à chacune d'elles un potentiel thermodynamique interne.

Soit i une de ces parties dont le volume V_i tend vers zéro; soit M_i le point vers lequel tendent tous les points de la surface qui la limite; nous admettrons, et c'est la DEUXIÈME HYPOTHÈSE que nous ferons, que *l'on peut toujours choisir la fonction $\mathcal{F}_i$ de telle manière que le rapport $\frac{\mathcal{F}_i}{V_i}$ demeure fini et tende vers une limite déterminée lorsque la partie i tend vers zéro par un mode déterminé de subdivision du système.* La valeur limite du rapport $\frac{\mathcal{F}_i}{V_i}$ demeure-t-elle la même lorsque la particule i tend à se réduire au point M_i *par des modes différents de subdivision du système?* Ce dernier point sera l'objet non d'une hypothèse, mais d'une démonstration.

Cette hypothèse peut n'être pas réalisée dans certains systèmes; ainsi, dans un système électrisé, si l'on considère une partie i terminée partiellement par une surface qui porte une distribution électrique superficielle, lorsque cette partie i décroîtra, on verra tendre vers une limite déterminée et finie le rapport $\frac{\mathcal{F}_i}{S_i}$, S_i étant l'aire de la surface électrisée qui termine cette partie; en sorte que, dans ce cas, le rapport $\frac{\mathcal{F}_i}{V_i}$ pourra croître au delà de toute limite. Nous laisserons de côté ce cas et d'autres du même genre; d'ailleurs tous ceux d'entre eux

qu'il est intéressant de considérer donneraient lieu à des raisonnements semblables à ceux que nous allons développer.

La fonction $\mathcal{F}_i$ étant déterminée, quel que soit i, de manière à satisfaire à l'hypothèse précédente, nous admettrons que la fonction Ψ_{ij} satisfait à une TROISIÈME HYPOTHÈSE que voici :

Soient, autour de deux points déterminés M_i, M_j *du système, deux particules i et j qui tendent à se réduire à zéro. Le rapport* $\frac{\Psi_{ij}}{V_i V_j}$ *demeure fini et, de plus, il tend vers une limite déterminée lorsque les deux volumes* V_i, V_j *sont obtenus par un mode déterminé de subdivision du système.* Nous laisserons en suspens, pour le moment, la question de savoir si cette limite est la même quel que soit le mode de subdivision du système.

Enfin, nous ferons une QUATRIÈME HYPOTHÈSE.

Soit M_i un point du système; soit S une surface qui entoure le point M_i; prenons un volume quelconque intérieur à cette surface et contenant le point M_i; divisons ce volume d'une manière quelconque en un nombre quelconque de parties $i, a, b, \ldots l$, dont l'une, i, renferme le point M_i. *On peut toujours prendre la surface* S *assez voisine en tous ses points du point* M_i *pour que l'on soit assuré d'avoir*

$$|\Psi_{ia} + \Psi_{ib} + \ldots + \Psi_{il}| \leqq \varepsilon V_i, \tag{7}$$

ε *étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.*

Voyons quelles sont les conséquences de ces quatre hypothèses.

Nous allons prouver en premier lieu que *le rapport* $\frac{\mathcal{F}_i}{V_i}$ *tend toujours vers la même limite, quel que soit le mode de division du système qui fait tendre vers zéro la particule entourant le point* M_i.

Imaginons d'abord que l'on divise le système en cubes infiniment petits, qui ont leurs arêtes respectivement parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, et dont la longueur d'arête décroît suivant une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Le rapport $\frac{\mathcal{F}_i}{V_i}$ tendra alors vers une limite finie et déterminée, qui dépendra uniquement de la position du point M_i. Si donc nous désignons par f_i et u les valeurs de $\mathcal{F}_i$

et V_i relatives à un tel petit cube, nous aurons

$$\lim \frac{f_i}{u} = G(x_i, y_i, z_i) = G_i,$$

G étant une fonction uniforme et continue des coordonnées x_i, y_i, z_i du point M_i, si, au voisinage de ce point, les propriétés de la matière varient d'une manière continue.

En vertu de notre quatrième hypothèse, autour de tout point M_j d'un certain domaine D dont fait partie le point M_i, on peut tracer une sphère qui jouisse de la propriété suivante :

Si, à l'intérieur de cette sphère, on prend un volume contenant le point M_j, et si on le divise en diverses parties j, a, b, ..., l, dont l'une, j, contient le point M_j, on sera assuré que l'on a

$$|\Psi_{ja} + \Psi_{jb} + \ldots + \Psi_{jl}| \leqq \varepsilon V_j.$$

Le rayon de cette sphère dépend, en général, du point M_j que l'on choisit dans le domaine D; mais, pour les divers points du domaine D, il admet une limite inférieure R, différente de zéro.

Du point M_i comme centre, décrivons une sphère de rayon inférieur à $\frac{R}{2}$. A l'intérieur de cette sphère, prenons un volume quelconque V_i, renfermant le point M_i, et divisons ce volume en parties quelconques α, β, ..., λ. Nous serons assuré d'avoir

$$\begin{aligned}
&|\Psi_{\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\gamma} + \ldots + \Psi_{\alpha\lambda}| \leqq \varepsilon V_\alpha,\\
&|\Psi_{\beta\alpha} + \Psi_{\beta\gamma} + \ldots + \Psi_{\beta\lambda}| \leqq \varepsilon V_\beta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&|\Psi_{\lambda\alpha} + \Psi_{\lambda\beta} + \ldots + \Psi_{\lambda\varkappa}| \leqq \varepsilon V_\lambda,
\end{aligned}$$

et, en remarquant que

$$V_\alpha + V_\beta + \ldots + V_\lambda = V_i,$$

$$\begin{aligned}
|\quad &\Psi_{\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\gamma} + \ldots + \Psi_{\alpha\lambda}\\
+ &\Psi_{\beta\alpha} + \Psi_{\beta\gamma} + \ldots + \Psi_{\beta\gamma}\\
+ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ &\Psi_{\lambda\alpha} + \Psi_{\lambda\beta} + \ldots + \Psi_{\lambda\varkappa}| \leqq \varepsilon V_i.
\end{aligned}$$

Ainsi, *quelle que soit la forme du volume* V_i *qui entoure le point* M_i *et*

quelle que soit la manière dont on l'a subdivisé en parties $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, *on peut toujours prendre le volume* V_i *assez petit pour que l'on ait*

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \Psi_{\alpha\beta}+\Psi_{\alpha\gamma}+\ldots+\Psi_{\alpha\lambda} \\ +\Psi_{\beta\gamma}+\ldots+\Psi_{\beta\lambda} \\ +\ldots\ldots\ldots \\ +\Psi_{\kappa\lambda} \end{vmatrix} \leqq \frac{\varepsilon}{2} V_i,$$

ε *étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, donnée d'avance.*

Prenons un tel volume V_i. Soit $\mathfrak{F}_i$ son potentiel thermodynamique interne. Si nous traçons les petits cubes considérés, il renfermera certains de ces petits cubes $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et, en outre, des parties résiduelles, $\mu, \nu, \ldots$. Nous aurons, d'après l'égalité (3),

$$(9)\qquad \mathfrak{F}_i = f_\alpha + f_\beta + \ldots + f_\lambda + \mathfrak{F}_\mu + \mathfrak{F}_\nu + \ldots + E\Psi.$$

Le volume V_i ayant été pris assez petit pour que l'inégalité (8) soit satisfaite, nous sommes assurés d'avoir

$$(10)\qquad |E\Psi| \leqq \eta V_i,$$

η étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, donnée d'avance.

En vertu de la deuxième hypothèse, on aura

$$|\mathfrak{F}_\mu + \mathfrak{F}_\nu + \ldots| = K(V_\mu + V_\gamma + \ldots),$$

K étant un rapport qui demeure fini lorsque les volumes V_μ, V_ν, ... tendent vers zéro; mais on peut pousser assez loin la division en cubes pour que le volume de la partie résiduelle $(V_\mu + V_\nu + \ldots)$ soit une fraction, aussi petite que l'on voudra, du volume V_i. On peut donc prendre les éléments cubiques assez petits pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(11)\qquad |\mathfrak{F}_\mu + \mathfrak{F}_\nu + \ldots| \leqq \eta V_i.$$

En vertu de la deuxième hypothèse, on peut prendre les cubes α,

$\beta, \ldots, \lambda$ assez petits pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(12)\qquad \begin{cases} |f_\alpha - u\mathrm{G}_\alpha| \leqq \eta u, \\ |f_\beta - u\mathrm{G}_\beta| \leqq \eta u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |f_\lambda - u\mathrm{G}_\lambda| \leqq \eta u, \end{cases}$$

$\mathrm{G}_\alpha, \mathrm{G}_\beta, \ldots, \mathrm{G}_\lambda$ étant les valeurs de la fonction $\mathrm{G}(x, y, z)$, en des points $\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{M}_\beta, \ldots, \mathrm{M}_\lambda$ des cubes $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

La fonction $\mathrm{G}(x, y, z)$ étant continue et les points $\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_\alpha, \mathrm{M}_\beta, \mathrm{M}_\lambda$ étant tous intérieurs au volume V_i, on pourra toujours prendre celui-ci assez petit pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(13)\qquad \begin{cases} |\mathrm{G}_\alpha - \mathrm{G}_i| \leqq \eta, \\ |\mathrm{G}_\beta - \mathrm{G}_i| \leqq \eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |\mathrm{G}_\lambda - \mathrm{G}_i| \leqq \eta. \end{cases}$$

Les inégalités (12) et (13) permettent d'écrire l'inégalité

$$|f_\alpha + f_\beta + \ldots + f_\lambda - \mathrm{N}u\mathrm{G}(x_i, y_i, z_i)| \leqq 2\eta \mathrm{N}u,$$

N étant le nombre des volumes cubiques que contient le volume V_i.

Mais la somme $\mathrm{N}u$ des volumes cubiques que renferme le volume V_i ne pouvant surpasser ce volume V_i, l'inégalité précédente entraîne l'inégalité

$$(14)\qquad |f_\alpha + f_\beta + \ldots + f_\lambda - \mathrm{N}u\mathrm{G}(x_i, y_i, z_i)| \leqq 2\eta \mathrm{V}_i.$$

L'égalité (9), jointe aux inégalités (10), (11) et (14), nous montre que l'on peut toujours prendre le volume V_i assez petit et pousser assez loin la subdivision en cubes pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(15)\qquad |\mathfrak{F}_i - \mathrm{N}u\mathrm{G}(x_i, y_i, z_i)| \leqq 4\eta \mathrm{V}_i.$$

On peut toujours aussi pousser la subdivision en cubes assez loin pour que le volume résiduel $\mathrm{V}_\mu + \mathrm{V}_\nu + \ldots = \mathrm{V}_i - \mathrm{N}u$ soit une fraction aussi petite que l'on voudra du volume V_i; assez loin, par conséquent, pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(16)\qquad \frac{\mathrm{V}_i - \mathrm{N}u}{\mathrm{V}_i} \leqq \frac{\eta}{|\mathrm{G}(x_i, y_i, z_i)|}.$$

Les inégalités (15) et (16) nous montrent que l'on peut toujours prendre le volume V_i assez petit et pousser la subdivision en cubes assez loin pour que l'on soit assuré d'avoir

$$|\mathfrak{F}_i - V_i G(x_i, y_i, z_i)| \leqq 5\eta V_i. \tag{17}$$

Mais la valeur des deux membres de cette inégalité ne dépend plus que du volume V_i et nullement du degré auquel a été poussée la division en cubes. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Quelle que soit la forme du volume V_i, qui entoure le point $M_i(x_i, y_i, z_i)$, nous pouvons toujours assigner à ce volume une limite supérieure telle que, pour tout volume inférieur à cette limite, nous soyons assuré d'avoir

$$\left|\frac{\mathfrak{F}_i}{V_i} - G(x_i, y_i, z_i)\right| \leqq 5\eta, \tag{17 bis}$$

η étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Cette proposition entraîne, à titre de conséquence, le théorème que nous voulions démontrer :

Lorsque le volume V_i *tend à s'évanouir au point* M_i *en passant* PAR UNE SUITE QUELCONQUE DE FORMES, *le rapport* $\frac{\mathfrak{F}_i}{V_i}$ *tend vers une limite finie et déterminée, qui dépend d'une manière uniforme des coordonnées du point* M_i, *et qui varie d'une manière continue avec ces coordonnées, lorsque le point* M_i *se déplace dans une région où les propriétés de la matière varient d'une manière continue.*

Ce théorème entraîne immédiatement cet autre :

Lorsque l'on augmente indéfiniment le nombre des parties en lesquelles le système est divisé, de manière que les dimensions de chacune de ces parties tendent vers zéro, la somme $(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n)$ *tend vers une limite finie, dont la valeur est indépendante de la loi de subdivision adoptée, et l'on a*

$$\lim(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n) = \int G(x, y, z)\, dV, \tag{18}$$

dV *étant un élément de volume du système,* (x, y, z) *un point de cet élément, et l'intégrale s'étendant au volume entier du système.*

Nous allons maintenant, par une analyse semblable, prouver que, si deux volumes V_i, V_j tendent à s'évanouir l'un au point M_i, l'autre au point M_j, le rapport $\frac{\Psi_{ij}}{V_i V_j}$ tend vers une limite dont la valeur dépend de la position des deux points M_i, M_j, mais ne dépend pas des formes par lesquelles passent les volumes V_i, V_j, en se contractant.

Supposons, tout d'abord, que l'on ait adopté un mode particulier de subdivision du système, par exemple la subdivision en cubes déjà considérée. Deux de ces divisions cubiques, toutes deux de volume u, enferment l'une le point M_i, l'autre le point M_j. Soit ψ_{ij} la valeur de la quantité analogue à Ψ_{ij} pour ces deux cubes. En vertu de la troisième hypothèse, lorsque ces deux cubes tendront à s'évanouir l'un au point M_i, l'autre au point M_j, le rapport $\frac{\psi_{ij}}{u^2}$ tendra vers une limite finie et déterminée, et l'on pourra écrire

$$\lim \frac{\psi_{ij}}{u^2} = F(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j) = F_{ij}, \tag{19}$$

F étant une fonction uniforme des coordonnées x_i, y_i, z_i du point M_i et des coordonnées x_j, y_j, z_j du point M_j; de plus, si les propriétés de la matière varient d'une manière continue autour du point M_i, F est une fonction continue de x_i, y_i, z_i; si les propriétés de la matière varient d'une manière continue autour du point M_j, F est une fonction continue de x_j, y_j, z_j.

Cela posé, prenons, autour des points M_i, M_j, deux volumes quelconques V_i, V_j, auxquels correspond la fonction Ψ_{ij}. Divisons-les en cubes de volume u. Le volume V_i renferme les cubes $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et les volumes résiduels $V_\mu, V_\nu, \ldots, V_\varpi$. Le volume V_j renferme les cubes $a, b, \ldots, l$, et les volumes résiduels $V_m, V_n, \ldots, V_p$. Nous aurons évidemment

$$\begin{aligned}
\Psi_{ij} = {} & \psi_{\alpha a} + \psi_{\alpha b} + \ldots + \psi_{\alpha l} + \Psi_{\alpha m} + \Psi_{\alpha n} + \ldots + \Psi_{\alpha p} \\
& + \psi_{\beta a} + \psi_{\beta b} + \ldots + \psi_{\beta l} + \Psi_{\beta m} + \Psi_{\beta n} + \ldots + \Psi_{\beta p} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \psi_{\lambda a} + \psi_{\lambda b} + \ldots + \psi_{\lambda l} + \Psi_{\lambda m} + \Psi_{\lambda n} + \ldots + \Psi_{\lambda p} \\
& + \Psi_{\mu a} + \Psi_{\mu b} + \ldots + \Psi_{\mu l} + \Psi_{\mu m} + \Psi_{\mu n} + \ldots + \Psi_{\mu p} \\
& + \Psi_{\nu a} + \Psi_{\nu b} + \ldots + \Psi_{\nu l} + \Psi_{\nu n} + \Psi_{\nu n} + \ldots + \Psi_{\nu p} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \Psi_{\varpi a} + \Psi_{\varpi b} + \ldots + \Psi_{\varpi l} + \Psi_{\varpi m} + \Psi_{\varpi n} + \ldots + \Psi_{\varpi p}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Chacune des quantités $\frac{\Psi_{\alpha m}}{u V_m}, \ldots, \frac{\Psi_{\lambda p}}{u V_p}$ tend vers une limite finie lorsque les volumes $u_\alpha, \ldots, u_\lambda, V_m, \ldots, V_p$ tendent vers zéro, la valeur de cette limite dépendant *peut-être* de la manière dont ces volumes tendent vers zéro. On peut donc poser

$$\Psi_{\alpha m} + \ldots + \Psi_{\lambda p} = \text{KN}\, u (V_m + \ldots + V_p),$$

N étant le nombre des cubes que renferme le volume V_i, et K un rapport qui demeure fini quelque loin que l'on pousse la division du système.

De même, on pourra poser

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu a} + \ldots + \Psi_{\varpi l} &= \text{K}'\text{N}' u (V_\mu + \ldots + V_\varpi), \\ \Psi_{\mu m} + \ldots + \Psi_{\varpi p} &= \text{K}'' (V_\mu + \ldots + V_\varpi)(V_m + \ldots + V_p), \end{aligned}$$

N' étant le nombre des cubes que renferme le volume V_j, et K', K'' étant des rapports analogues à K.

Mais $\frac{\text{N}u}{V_i}, \frac{\text{N}'u}{V_j}$ sont des rapports dont la valeur ne peut surpasser 1; on peut, d'autre part, pousser assez loin la division en cubes pour que les deux rapports

$$\frac{V_\mu + V_\nu + \ldots + V_\varpi}{V_i},$$

$$\frac{V_m + V_n + \ldots + V_p}{V_j}$$

soient aussi voisins de zéro que l'on voudra.

Donc, les deux volumes V_i, V_j étant donnés d'une manière quelconque, on pourra pousser la division en cubes assez loin pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} |\Psi_{\alpha m} + \ldots + \Psi_{\lambda p}| &\leqq \eta V_i V_j, \\ |\Psi_{\mu a} + \ldots + \Psi_{\mu l}| &\leqq \eta V_i V_j, \\ |\Psi_{\mu m} + \ldots + \Psi_{\varpi p}| &\leqq \eta V_i V_j, \end{aligned} \right.$$

η étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

D'autre part, en vertu de l'égalité (19), on peut toujours pousser

la division en cubes assez loin, pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(22)\qquad \begin{cases} |\psi_{\alpha a} - F_{\alpha a} u^2| \leqq \eta u^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ |\psi_{\lambda l} - F_{\lambda l} u^2| \leqq \eta u^2. \end{cases}$$

Mais la fonction $F(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j)$ est une fonction continue de x_i, y_i, z_i et de x_j, y_j, z_j. Comme les points $M_\alpha, \ldots, M_\lambda, M_i$ sont tous intérieurs au volume V_i et que les points $M_a, \ldots, M_l, M_j$ sont tous intérieurs au volume V_j, on pourra toujours supposer que, avant toute division en cubes, on ait pris les volumes V_i, V_j assez petits pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(23)\qquad \begin{cases} |F_{\alpha a} - F_{ij}| \leqq \eta, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ |F_{\lambda l} - F_{ij}| \leqq \eta. \end{cases}$$

Les inégalités (22) et (23) donnent l'inégalité

$$|\psi_{\alpha a} + \ldots + \psi_{\lambda l} - NN' u^2 F_{ij}| \leqq 2\eta NN' u^2.$$

Comme on a d'ailleurs

$$N u \leqq V_i, \qquad N' u \leqq V_j,$$

cette inégalité entraînera cette autre

$$(24)\qquad |\psi_{\alpha a} + \ldots + \psi_{\lambda l} - NN' u^2 F_{ij}| \leqq 2\eta V_i V_j.$$

Cette inégalité, jointe à l'égalité (20) et à l'inégalité (21), entraîne le résultat suivant:

On peut toujours prendre les deux volumes V_i, V_j assez petits, puis, une fois ceux-ci choisis, pousser la subdivision en cubes assez loin, pour que l'on soit assuré d'avoir l'inégalité

$$(25)\qquad |\Psi_{ij} - NN' u^2 F_{ij}| \leqq 5\eta V_i V_j.$$

D'ailleurs, les volumes V_i, V_j étant donnés, on peut toujours pousser la division en cubes assez loin pour que l'on soit assuré d'avoir

$$\frac{V_i - N u}{V_i} \leqq \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{|F_{ij}|}}, \qquad \frac{V_j - N' u}{V_j} \leqq \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{|F_{ij}|}}$$

et, par conséquent,

$$(26)\qquad |V_i V_j F_{ij} - NN' u^2 F_{ij}| \leqq \eta V_i V_j,$$

inégalité qui, jointe à l'inégalité (25). donnera

$$(27) \qquad |\Psi_{ij} - V_i V_j F_{ij}| \leqq 6\eta V_i V_j.$$

Ainsi, on peut toujours, autour des deux points M_i, M_j, tracer deux volumes V_i, V_j assez petits, puis, une fois ces volumes choisis, les découper en cubes assez petits pour que l'inégalité (27) soit assurément satisfaite.

Mais la division du système en cubes infiniment petits et le degré auquel cette division est poussée n'influent en aucune façon sur la valeur des deux membres de l'inégalité (27); nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Quelle que soit la forme des volumes V_i, V_j qui entourent respectivement deux points donnés M_i, M_j, nous pouvons toujours assigner à ces volumes une limite supérieure telle que, pour tous les volumes V_i, V_j, inférieurs à cette limite, nous soyons assurés d'avoir l'inégalité

$$(27\ bis) \qquad \left| \frac{\Psi_{ij}}{V_i V_j} - F(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j) \right| \leqq 6\eta,$$

η étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

De ce théorème découle la proposition que nous voulions démontrer.

Lorsque les deux volumes V_i, V_j *tendent respectivement à s'évanouir aux points donnés* M_i, M_j, *en passant* PAR UNE SUITE QUELCONQUE DE FORMES, *le rapport* $\frac{\Psi_{ij}}{V_i V_j}$ *tend vers une limite finie et déterminée; cette limite dépend d'une manière uniforme des coordonnées du point* M_i *et des coordonnées du point* M_j; *elle varie d'une manière continue avec ces coordonnées, pourvu que les propriétés de la matière varient d'une manière continue dans le domaine du point* M_i *et dans le domaine du point* M_j.

Ce théorème établi, nous allons nous proposer de démontrer la proposition suivante :

La fonction $F(x, y, z; x', y', z')$ *est d'une nature telle que l'intégrale*

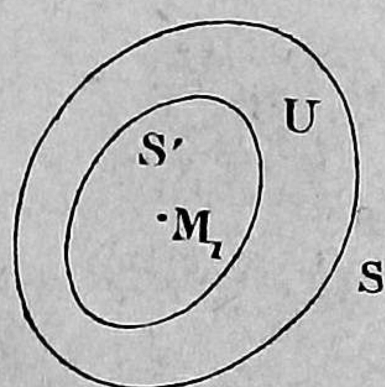
$$\int F(x, y, z; x', y', z')\, dV'$$

ait un sens même lorsque le point (x, y, z) *fait partie du volume auquel s'étend l'intégration.*

Cette proposition n'est nullement évidente de soi, car, si nous savons que la fonction $F(x, y, z; x', y', z')$ est finie et déterminée pour tout couple de points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, il n'est nullement démontré ni assuré que cette fonction tende vers une limite finie et déterminée lorsque le point M′ tend vers le point M par un trajet quelconque.

Autour du point $M_1(x, y, z)$ (*fig.* 1), on peut toujours, en vertu de

Fig. 1.



notre quatrième hypothèse, tracer une surface S assez petite pour que l'on ait

$$(7\ bis) \qquad |\Psi_{1\alpha}+\Psi_{1\beta}+\ldots+\Psi_{1\lambda}| \leqq \varepsilon V_1,$$

V_1 étant un volume intérieur à la surface S et contenant le point M_1; V_α, V_β, ..., V_λ des volumes connexes avec le volume V_1, qui, avec le volume V_1, remplissent en tout ou en partie l'espace intérieur à la surface S, et ε une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

A l'intérieur de la surface S, traçons une autre surface quelconque S′. Nous pourrons toujours prendre le volume V_1 assez petit pour qu'il soit en entier contenu dans la surface S′. Soient V_α, ..., V_λ d'autres volumes qui, avec le volume V_1, achèvent de remplir la surface S′. Soient V_μ, ..., V_ϖ des volumes qui remplissent l'espace U compris entre les surfaces S et S′. L'inégalité précédente nous donnera

$$\Psi_{1\alpha}+\ldots+\Psi_{1\lambda}+\Psi_{1\mu}+\ldots+\Psi_{1\varpi} | \leqq \varepsilon V_1$$

et aussi

$$|\Psi_{1\alpha}+\ldots+\Psi_{1\lambda}| \leqq \varepsilon V_1.$$

Ces deux inégalités nous permettent d'écrire

$$(28) \qquad |\Psi_{1\mu} + \ldots + \Psi_{1\varpi}| \leqq 2\varepsilon V_1.$$

Mais, en vertu de la proposition exprimée par l'inégalité (27), et en désignant par θ la quantité positive $\frac{\varepsilon}{U}$, nous pourrons toujours prendre les volumes V_1, V_μ, ..., V_ϖ assez petits pour que nous soyons assuré des inégalités

$$|\Psi_{1\mu} - F_{1\mu} V_1 V_\mu| \leqq \theta V_1 V_\mu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$|\Psi_{1\varpi} - F_{1\varpi} V_1 V_\varpi| \leqq \theta V_1 V_\varpi.$$

De ces inégalités, nous déduisons

$$|\Psi_{1\mu} + \ldots + \Psi_{1\varpi} - V_1(F_{1\mu} V_\mu + \ldots + F_{1\varpi} V_\varpi)| \leqq \theta U V_1,$$

ou bien, puisque θ est égal à $\frac{\varepsilon}{U}$,

$$(29) \qquad |\Psi_{1\mu} + \ldots + \Psi_{1\varpi} - V_1(F_{1\mu} V_\mu + \ldots + F_{1\varpi} V_\varpi)| \leqq \varepsilon V_1.$$

Mais le point M_1 ne fait pas partie de l'espace U; quelle que soit la position du point (x', y', z') dans l'espace U, la fonction

$$F(x_1, y_1, z_1; x', y', z')$$

demeure finie et continue. Lors donc que les dimensions des volumes V_μ, ..., V_ϖ tendent toutes vers zéro, la somme $(F_{1\mu} V_\mu + \ldots + F_{1\varpi} V_\varpi)$ tend vers l'intégrale

$$\int_U F(x_1, y_1, z_1; x', y', z')\, dV'.$$

En d'autres termes, une fois les deux surfaces S et S′ choisies, on peut toujours prendre les volumes V_μ, ..., V_ϖ, assez petits pour que l'on ait l'inégalité

$$(30) \qquad \left| F_{1\mu} V_\mu + \ldots + F_{1\varpi} V_\varpi - \int_U F(x_1, y_1, z_1; x', y', z')\, dV' \right| \leqq \varepsilon.$$

Les inégalités (28), (29) et (30) donnent l'inégalité

$$(31) \qquad \left| V_1 \int_U F(x_1, y_1, z_1; x', y', z')\, dV' \right| \leqq 4\varepsilon V_1,$$

Ainsi, autour du point M_1, on peut toujours tracer une surface fermée S assez petite pour que la propriété suivante soit vérifiée :

Quelle que soit la surface S′, intérieure à la surface S, dont on entoure le point M_1, on pourra toujours prendre les volumes $V_1, V_\mu, \ldots, V_\varpi$ assez petits pour que l'on ait

$$(31 \textit{ bis}) \qquad \left|\int F(x_1, y_1, z_1, x', y', z')\, dV'\right| \leqq 4\varepsilon,$$

l'intégrale s'étendant à l'espace U compris entre les surfaces S et S′, et ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Mais rien, dans la valeur du premier membre de l'inégalité (31 *bis*), ne dépend des dimensions des volumes $V_1, V_\mu, \ldots, V_\varpi$; nous pourrons donc remplacer l'énoncé précédent par celui-ci :

Autour du point M_1, *on peut toujours tracer une surface fermée* S *assez petite pour que l'on ait l'inégalité* (31 *bis*), ε *étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance, et l'intégrale s'étendant à l'espace compris entre la surface* S *et n'importe quelle autre surface* S′, *intérieure à la surface* S *et enveloppant le point* M_1.

C'est le caractère général, indiqué par M. du Bois-Reymond, pour reconnaître que l'intégrale

$$\int F(x, y, z, x', y', z')\, dV'$$

a un sens, même dans le cas où, le point (x, y, z) faisant partie du domaine auquel s'étend l'intégration, la fonction F pourrait cesser d'être, en ce point, déterminée, finie et continue. La proposition énoncée est donc démontrée.

Proposons-nous maintenant d'évaluer la limite vers laquelle tend la somme

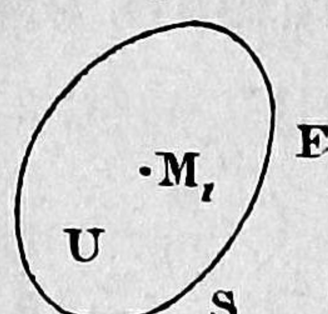
$$\Psi_{12} + \Psi_{13} + \ldots + \Psi_{1n},$$

lorsque le nombre des parties en lesquelles le système a été divisé augmente au delà de toute limite, les dimensions de chacune de ces parties tendant vers zéro.

Soit $M_1(x_1, y_1, z_1)$ le point où le volume V_1 tend à s'évanouir. En-

tourons le point M_1 d'une surface fermée S (*fig.* 2). Soient $V_1, V_2, \ldots, V_l$ les parties qui composent l'espace U intérieur à la surface S; soient

Fig. 2.



$V_m, \ldots, V_n$ les parties en lesquelles est divisé l'espace E extérieur à la surface S. Nous aurons

$$\Psi_{12} + \Psi_{13} + \ldots + \Psi_{1n} = \Psi_{12} + \ldots + \Psi_{1l} + \Psi_{1m} + \ldots + \Psi_{1n}. \tag{32}$$

En vertu de la quatrième hypothèse, nous pourrons toujours prendre la surface S assez petite pour avoir

$$|\Psi_{12} + \ldots + \Psi_{1l}| \leqq \varepsilon V_1, \tag{33}$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance; et cela, quelles que soient les parties $V_1, V_2, \ldots, V_l$, en lesquelles le volume U a été divisé.

D'autre part, nous pourrons toujours rendre les volumes $V_1, V_m, \ldots, V_n$ assez petits pour avoir

$$|\Psi_{1m} - F_{1m} V_1 V_m| \leqq \frac{\varepsilon}{E} V_1 V_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|\Psi_{1n} - F_{1n} V_1 V_n| \leqq \frac{\varepsilon}{E} V_1 V_n,$$

$E = (V_m + \ldots + V_n)$ étant le volume occupé par le système en dehors de la surface S. Ces inégalités donnent

$$|\Psi_{1m} + \ldots + \Psi_{1n} - V_1(F_{1m} V_m + \ldots + F_{1n} V_n)| \leqq \varepsilon V_1. \tag{34}$$

On peut aussi rendre les volumes $V_m, \ldots, V_n$ assez petits pour avoir

$$\left| F_{1m} V_m + \ldots + F_{1n} V_n - \int_E F(x_1, y_1, z_1, x', y', z')\, dV' \right| \leqq \varepsilon, \tag{35}$$

l'intégrale s'étendant à la partie E du système qui est extérieure à la surface S.

Mais, d'après le théorème que nous venons de démontrer, lorsque la surface S tend, par une suite quelconque de formes, à s'évanouir au point M_1, l'intégrale

$$\int_E F(x_1, y_1, z_1, x', y', z')\, dV'$$

tend vers une limite finie et déterminée qui est, par définition, l'intégrale

$$\int_{(E+U)} F(x_1, y_1, z_1, x', y', z')\, dV',$$

étendue au volume entier du système. Cette intégrale est une fonction des coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point M_1, variable d'une manière continue avec x_1, y_1, z_1, si les propriétés de la matière varient d'une manière continue au voisinage du point M_1. Si donc nous posons

$$W(x_1, y_1, z_1) = \int F(x_1, y_1, z_1, x', y', z')\, dV', \tag{36}$$

l'intégrale s'étendant au volume entier du système, nous serons assuré que l'on peut prendre la surface S assez petite pour avoir

$$\left| W(x_1, y_1, z_1) - \int_E F(x_1, y_1, z_1, x', y', z')\, dV' \right| \leqq \varepsilon. \tag{37}$$

L'ensemble des égalités et inégalités (32), (33), (34), (35) et (37) conduit au résultat suivant :

On peut toujours prendre assez petites, d'une part, la surface S qui entoure le point M_1 et, d'autre part, les dimensions des parties en lesquelles le système est divisé pour avoir

$$|\Psi_{12} + \Psi_{13} + \ldots + \Psi_{1n} - V_1 W(x_1, y_1, z_1)| \leqq 4\varepsilon V_1, \tag{38}$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Mais les valeurs des deux membres de l'inégalité (38) sont entièrement indépendantes des dimensions attribuées à la surface S. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Il est toujours possible de pousser assez loin la division du système pour que l'inégalité (38) *soit vérifiée.*

Ce théorème équivaut à celui-ci :

Lorsque l'on divise le système indéfiniment, suivant une loi quelconque, le rapport $\frac{\Psi_{12}+\Psi_{13}+\ldots+\Psi_{1n}}{V_1}$ *tend vers la valeur limite* $W(x_1, y_1, z_1)$.

Il nous est maintenant facile de calculer la valeur limite vers laquelle tend la somme

$$\begin{aligned}\Sigma = \;& \Psi_{12}+\Psi_{13}+\ldots+\Psi_{1n}\\ &+\Psi_{21}+\Psi_{23}+\ldots+\Psi_{2n}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\Psi_{n1}+\Psi_{n2}+\ldots+\Psi_{n,n-1}\end{aligned}$$

lorsque l'on pousse à l'infini la division du système.

Soit ε une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance; soit $U = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ le volume total du système.

On pourra toujours pousser assez loin la division du système pour avoir

$$(38\,bis)\quad \left\{\begin{array}{l} |\Psi_{12}+\Psi_{13}+\ldots+\Psi_{1n} \quad - V_1 W(x_1, y_1, z_1)| \leqq \frac{\varepsilon}{U} V_1,\\ |\Psi_{21}+\Psi_{23}+\ldots+\Psi_{2n} \quad - V_2 W(x_2, y_2, z_2)| \leqq \frac{\varepsilon}{U} V_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ |\Psi_{n1}+\Psi_{n2}+\ldots+\Psi_{n,n-1} - V_n W(x_n, y_n, z_n)| \leqq \frac{\varepsilon}{U} V_n,\end{array}\right.$$

qui donnent

$$(39)\qquad |\Sigma - W(x_1, y_1, z_1)V_1 - \ldots - W(x_n, y_n, z_n)V_n| \leqq \varepsilon.$$

Mais on peut aussi pousser la division du système assez loin pour être assuré d'avoir

$$(40)\quad |W(x_1, y_1, z_1)V_1 + \ldots + W(x_n, y_n, z_n)V_n - \int W(x, y, z)\,dV| \leqq \varepsilon,$$

l'intégrale s'étendant au système entier.

Les inégalités (39) et (40) nous montrent que l'on peut toujours pousser la division du système assez loin pour avoir

$$(41)\qquad |\Sigma - \int W(x, y, z)\,dV| \leqq 2\varepsilon,$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Cette inégalité (40) nous montre que, *lorsqu'on pousse à l'infini la division du système, on a*

$$(42)\quad \lim\begin{pmatrix} \Psi_{12}+\Psi_{13}+\ldots+\Psi_{1n} \\ +\Psi_{21}+\Psi_{23}+\ldots+\Psi_{2n} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\Psi_{n1}+\Psi_{n2}+\ldots+\Psi_{n,n-1}\end{pmatrix} = \int W(x, y, z)\,dV.$$

Les égalités (3), (6 *bis*), 18 et (42) conduisent alors au théorème suivant.

Le potentiel thermodynamique interne d'un système continu peut se mettre sous la forme suivante

$$(43)\quad \mathfrak{F} = \int G(x, y, z)\,dV + \frac{E}{2}\int W(x, y, z)\,dV;$$

E *est l'équivalent mécanique de la chaleur;* G *et* W, *deux fonctions finies, qui varient d'une manière continue avec* x, y *et* z, *si les propriétés de la matière varient d'une manière continue dans le domaine du point* (x, y, z).

En vertu de l'égalité (36), cette égalité (43 *bis*) peut encore s'écrire

$$(43\,bis)\quad \mathfrak{F} = \int G(x, y, z)\,dV + \frac{E}{2}\int\int F(x, y, z, x', y', z')\,dV\,dV';$$

F *est une fonction symétrique de* x, y, z *et de* x', y', z'; *si les deux points* (x, y, z) *et* (x', y', z') *demeurent à distance finie, elle demeure finie et déterminée; elle varie d'une manière continue avec* x, y, z, *si les propriétés de la matière sont continues dans le domaine du point* (x, y, z).

Ces résultats sont déduits de l'égalité (3). Des considérations analogues, appliquées aux égalités (4) et (5), fourniront les expressions suivantes pour l'énergie interne et pour l'entropie d'un système continu

$$(44)\quad EU = \int K(x, y, z)\,dV + \frac{E}{2}\int\int F(x, y, z, x', y', z')\,dV\,dV',$$

$$(45)\quad ES = \int H(x, y, z)\,dV.$$

K et H sont des fonctions analogues à G; elles ont avec G des relations que nous allons approfondir.



CHAPITRE II.

EXPRESSION DU POTENTIEL THERMODYNAMIQUE EN FONCTION DES PROPRIÉTÉS DE LA MATIÈRE EN CHAQUE POINT.

La matière qui forme un système peut être *isotrope* ou *non isotrope*.

En tout point M d'une matière non isotrope, un trièdre trirectangle $(M\xi, M\eta, M\zeta)$ est donné, qui définit l'*orientation* de la matière en ce point; cette orientation peut d'ailleurs varier d'un point à l'autre soit d'une manière continue, soit, le long de certaines surfaces, d'une manière discontinue. Si une portion de matière se déplace de manière que ses divers points gardent des positions relatives invariables, et que ses propriétés demeurent invariables, le trièdre qui marque l'orientation de la matière en chaque point est entraîné dans ce mouvement.

L'état de la matière au point M est défini par un certain nombre, que nous supposerons fini, de variables algébriques et de grandeurs géométriques; chacune de ces dernières intervient, dans la définition de cet état, non seulement par sa valeur, mais encore par sa direction par rapport au trièdre $(M\xi, M\eta, M\zeta)$; en d'autres termes, chacune d'elles intervient par ses trois composantes suivant $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$.

Lorsqu'on aura affaire à une substance isotrope, on pourra attribuer à chaque point un trièdre d'orientation; mais le choix de ce trièdre sera arbitraire et, parmi les conséquences auxquelles on parviendra, on ne devra retenir que ceux qui sont indépendantes de l'orientation attribuée en chaque point à ce trièdre.

Imaginons une portion de matière. L'état de cette portion de la matière est défini par son orientation en chaque point et par la valeur qu'ont, en chaque point, un certain nombre de variables parmi lesquelles est la température absolue T. Les autres variables seront dites *normales* [1] si elles possèdent la propriété suivante : la portion considérée de la matière ayant la même température en tous ses points, et

[1] P. DUHEM, *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, IIIe Partie (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX).

étant placée en présence de corps étrangers quelconques, une variation infiniment petite de température que n'accompagne ni changement de forme de la portion considérée, ni changement des variables, autres que la température, qui définissent son état en chaque point, n'entraîne aucun travail des actions extérieures. Nous admettons que l'on peut toujours définir l'état de la matière au moyen de variables normales et nous supposons que l'on ait toujours fait choix de telles variables; c'est à cette condition seulement que les équations (1) et (2) sont exactes.

Ces principes brièvement posés, nous allons énoncer deux hypothèses qui se présentent pour ainsi dire d'elles-mêmes.

Première hypothèse. — M_1 est un point donné du système, situé dans une région de température uniforme; V_1 est un volume qui enferme le point M_1; ce volume, considéré isolément, admettrait un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}_1$; si on le supposait rempli d'une matière *homogène* ayant en chaque point l'orientation et les propriétés qu'a la matière considérée au point M_1, il admettrait un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}'_1$; *on peut toujours prendre le volume* V_1 *assez petit pour que l'on ait*

$$|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}'_1| \leqq \varepsilon V_1, \tag{46}$$

ε *étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.*

Deuxième hypothèse. — M_1, M_2 sont deux points donnés du système; chacun d'eux est situé dans une région de température uniforme; V_1 est un volume qui entoure le point M_1 et V_2 un volume qui entoure le point M_2; à l'ensemble de ces deux volumes correspond une fonction Ψ_{12}. Si l'on supposait le volume V_1 rempli d'une matière *homogène* ayant, en chaque point, l'orientation et les propriétés qu'a, au point M_1, la matière qui remplit réellement le volume V_1; si l'on supposait le volume V_2 rempli d'une matière homogène ayant, en chaque point, l'orientation et les propriétés qu'a, au point M_2, la matière qui remplit réellement le volume V_2, la fonction Ψ_{12} prendrait une valeur nouvelle Ψ'_{12}. *On peut toujours prendre les deux volumes* V_1, V_2 *assez petits pour que l'on ait*

$$|\Psi_{12} - \Psi'_{12}| \leqq \varepsilon V_1 V_2, \tag{47}$$

ε *étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.*

Pour déduire les conséquences de la première hypothèse, donnons au volume V_1 la forme d'un cube ayant son centre au point M_1 et ses arêtes parallèles aux arêtes $M_1\xi_1$, $M_1\eta_1$, $M_1\zeta_1$, qui marquent l'orientation de la matière au point M_1; supposons ce cube homogène; le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}'_1$ de ce cube, considéré isolément, doit être indépendant de la position de ce cube dans l'espace; il ne peut donc dépendre que des variables qui, avec la position qu'il occupe dans l'espace, achèvent de le faire connaître entièrement. Or il est évident que ces variables sont :

1° Le volume V_1;

2° La grandeur des paramètres algébriques $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, T_1$ qui définissent l'état de la matière au point M_1;

3° La grandeur des trois composantes $a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}; \ldots; l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}$ de chacune des grandeurs géométriques $a_1, \ldots, l_1$, qui définissent l'état de la matière au point M_1.

On doit donc avoir

$$\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}'_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, T_1, a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}, \ldots, l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}, V_1).$$

Mais on peut prendre le volume V_1 assez petit pour que l'on soit assuré d'avoir

$$|\mathcal{F}_1 - G_1 V_1| \leqq \varepsilon V_1, \tag{17}$$

et, partant, en vertu des inégalités (17) et (46),

$$\left|\frac{\mathcal{F}'_1}{V_1} - G_1\right| \leqq 2\varepsilon.$$

G_1 ne dépendant pas du volume V_1, cette inégalité montre que, lorsque le volume V_1 tend vers zéro, $\frac{\mathcal{F}'_1}{V_1}$ tend vers une limite qui ne dépend pas de V_1 et qui ne peut dès lors dépendre que des variables $\alpha_1, \ldots, \lambda_1$, $T_1, a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}, \ldots, l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}$.

Par conséquent, *la fonction* G_1 *dépend seulement : 1° des grandeurs des paramètres algébriques qui entrent dans la définition de l'état de la matière au point* M_1; *et 2° des trois composantes (suivant les axes qui*

indiquent l'orientation de la matière au point M_1) *des grandeurs géométriques qui définissent l'état de la matière en ce point.*

Dans le cas particulier où la matière est isotrope, le choix des axes $M_1\xi_1$, $M_1\eta_1$, $M_1\zeta_1$ est arbitraire, et les variables que nous venons d'énumérer ne doivent entrer dans l'expression de G_1 que par des combinaisons indépendantes du choix de ces axes; donc, *dans le cas où la matière est isotrope au point* M_1, *l'état de la matière en ce point étant défini par certains paramètres analytiques et par certaines grandeurs géométriques*, G_1 *dépend seulement de la valeur de chacune de ces variables et des angles que les grandeurs géométriques font deux à deux.*

Pour déduire les conséquences de la deuxième hypothèse, prenons le volume V_1 comme nous venons de le faire, et formons le volume V_2, autour du point M_2, par un procédé semblable.

La fonction Ψ'_{12} relative au système des deux cubes homogènes V_1, V_2 ne doit pas dépendre de la position absolue dans l'espace du système formé par ces deux cubes; elle doit dépendre seulement des variables qui, jointes à cette position, achèvent de déterminer entièrement le système formé par ces deux cubes; encore les températures T_1, T_2 des deux cubes n'y doivent-elles pas figurer.

Les variables qui déterminent Ψ'_{12} sont donc :

1° Les volumes V_1, V_2 des deux cubes;

2° Trois paramètres θ, φ, ψ (par exemple, les trois angles d'Euler), permettant d'orienter les deux trièdres

$$(M_1\xi_1, M_1\eta_1, M_1\zeta_1) \quad \text{et} \quad (M_2\xi_2, M_2\eta_2, M_2\zeta_2)$$

l'un par rapport à l'autre;

3° La distance r des centres des deux cubes;

4° Les variables algébriques $\alpha_1, \ldots, \lambda_1$ (mais non pas la température T_1) dont dépend l'état de la matière au point M_1;

5° Les composantes $a_{1\xi}$, $a_{1\eta}$, $a_{1\zeta}$, $\ldots$, $l_{1\xi}$, $l_{1\eta}$, $l_{1\zeta}$, suivant $M_1\xi_1$, $M_1\eta_1$, $M_1\zeta_1$, des grandeurs géométriques $a_1, \ldots, l_1$, dont dépend l'état de la matière au point M_1;

6° Les variables algébriques $\alpha_2, \ldots, \lambda_2$ (mais non pas la température T_2) dont dépend l'état de la matière au point M_2;

7° Les composantes $a_{2\xi}$, $a_{2\eta}$, $a_{2\zeta}$, $\ldots$, $l_{2\xi}$, $l_{2\eta}$, $l_{2\zeta}$, suivant $M_2\xi_2$,

$M_2\eta_2$, $M_2\zeta_2$, des grandeurs géométriques $a_2, \ldots, l_2$, dont dépend l'état de la matière au point M_2.

Autour des points M_1, M_2, on peut toujours tracer deux volumes V_1, V_2, assez petits pour avoir

$$|\Psi_{12} - F_{12}V_1V_2| \leqq \varepsilon V_1 V_2. \tag{27}$$

Cette inégalité, jointe à l'inégalité (47), montre que nous pourrons toujours prendre nos deux cubes assez petits pour avoir

$$\left|\frac{\Psi'_{12}}{V_1V_2} - F_{12}\right| \leqq 2\varepsilon.$$

De cette inégalité, on déduit sans peine la proposition suivante.

La fonction F_{12} *dépend seulement :*

1° *De la distance r des deux points* M_1, M_2;

2° *Des trois paramètres* θ, φ, ψ, *qui fixent l'orientation mutuelle des deux trièdres* $(M_1\xi_1, M_1\eta_1, M_1\zeta_1)$ *et* $(M_1\xi_2, M_1\eta_2, M_1\zeta_2)$;

3° *Des variables algébriques* $\alpha_1, \ldots, \lambda_1$ (*mais non pas de la température* T_1) *dont dépend l'état de la matière au point* M_1;

4° *Des composantes* $a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}, \ldots, l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}$, *suivant* $M_1\xi_1$, $M_1\eta_1$, $M_1\zeta_1$, *des grandeurs géométriques* $a_1, \ldots, l_1$, *dont dépend l'état de la matière au point* M_1;

5° *Des variables algébriques* $\alpha_2, \ldots, \lambda_2$ (*mais non pas de la température* T_2) *dont dépend l'état de la matière au point* M_2;

6° *Des composantes* $a_{2\xi}, a_{2\eta}, a_{2\zeta}, \ldots, l_{2\xi}, l_{2\eta}, l_{2\zeta}$, *suivant* $M_2\xi_2$, $M_2\eta_2$, $M_2\zeta_2$, *des grandeurs géométriques* $a_2, \ldots, l_2$, *dont dépend l'état de la matière au point* M_2.

Le lecteur verra sans peine comment ces variables se réduisent dans le cas où la matière est isotrope soit autour de l'un des points M_1, M_2, soit autour de tous deux.

Supposons que la quantité $\frac{\partial G}{\partial T}$ soit une fonction de (x, y, z) finie dans toute l'étendue du système, et continue dans toute région où les propriétés du système varient d'une manière continue. L'intégrale $\int \frac{\partial G}{\partial T} dV$ aura un sens; de plus, si le système est partagé en parties 1,

2, ..., n, ayant chacune une température uniforme, nous aurons

$$(48)\qquad \int \frac{\partial G}{\partial T}\, dV = \frac{\partial}{\partial T_1}\int_1 G\, dV_1 + \frac{\partial}{\partial T_2}\int G\, dV_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial T_n}\int G\, dV_n.$$

Mais, d'autre part, en désignant par $\mathcal{F}_1$ le potentiel thermodynamique interne de la partie 1 considérée isolément, nous aurons [égalité (43 *bis*)]

$$\mathcal{F}_1 = \int_1 G\, dV_1 + \frac{E}{2}\int_1\int_1 F\, dV_1\, dV'_1.$$

La fonction F est indépendante de la température commune T_1 des deux éléments dV_1, dV'_1. Nous aurons donc

$$(49)\qquad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} = \frac{\partial}{\partial T_1}\int_1 G\, dV_1$$

ou bien, en vertu de l'égalité (2),

$$E\Sigma_1 = -\frac{\partial}{\partial T_1}\int_1 G\, dV_1.$$

On a, de même,

$$E\Sigma_2 = -\frac{\partial}{\partial T_2}\int_2 G\, dV_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$E\Sigma_n = -\frac{\partial}{\partial T_n}\int_n G\, dV_n.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (48) devient

$$\int \frac{\partial G}{\partial T}\, dV = -E(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_n)$$

ou bien, en vertu de l'égalité (5),

$$(50)\qquad ES = -\int \frac{\partial G}{\partial T}\, dV.$$

L'égalité (1) donne, en tenant compte de l'égalité (49),

$$EY_1 = \mathcal{F}_1 - T_1\frac{\partial}{\partial T_1}\int_1 G\, dV_1.$$

On a, de même,

$$E\Upsilon_2 = \mathfrak{F}_2 - T_2 \frac{\partial}{\partial T_2} \int_2 G\, dV_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$E\Upsilon_n = \mathfrak{F}_n - T_n \frac{\partial}{\partial T_n} \int_n G\, dV_n.$$

Ces égalités, ajoutées membre à membre, donnent

$$E(\Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \ldots + \Upsilon_n)$$
$$= \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n - \left(T_1 \frac{\partial}{\partial T_1} \int_1 G\, dV_1 + T_2 \frac{\partial}{\partial T_2} \int_2 G\, dV_2 + \ldots + T_n \frac{\partial}{\partial T_n} \int_n G\, dV_n\right)$$

ou bien

$$E(\Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \ldots + \Upsilon_n) = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n - \int T \frac{\partial G}{\partial T} dV.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (3) et (4), donne

$$E\mathfrak{V} = \mathfrak{F} - \int T \frac{\partial G}{\partial T} dV$$

ou bien, en vertu de l'égalité (43 *bis*),

$$E\mathfrak{V} = \int \left(G - T \frac{\partial G}{\partial T}\right) dV + \frac{E}{2} \int \int F\, dV\, dV'. \tag{51}$$

Les égalités (50) et (51) nous redonnent les résultats contenus dans les égalités (44) et (45); mais, de plus, elles nous enseignent que les fonctions K et H, qui figurent dans ces équations, sont liées à la fonction G par les relations

$$H = -\frac{\partial G}{\partial T}, \tag{52}$$

$$K = G - T \frac{\partial G}{\partial T}. \tag{53}$$

Ce que nous avons dit dans ce Chapitre et dans le précédent n'exige pas que la température du système soit uniforme; mais, du moins, cela exige que le système soit décomposable en un nombre limité de parties ayant chacune une température uniforme; c'est, en effet, seulement dans ce cas que sont définies les fonctions S et $\mathfrak{F}$ (*Commentaire aux principes de la Thermodynamique,* III[e] Partie, Chap. II, § 6 et

Chap. III, § 7). Mais, *si nous considérons maintenant un système dont la température varie d'un point à l'autre d'une manière continue, rien n'empêche de former, pour un tel système, les fonctions* $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$, *données par les égalités*

$$\mathcal{F} = \int G\, dV + \frac{E}{2}\int\int F\, dV\, dV', \tag{43 bis}$$

$$E\mathcal{S} = -\int \frac{\partial G}{\partial T} dV, \tag{50}$$

$$E\mathcal{U} = \int\left(G - T\frac{\partial G}{\partial T}\right) dV + \frac{E}{2}\int\int F\, dV\, dV', \tag{51}$$

et de leur étendre les propriétés des fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$, *relatives à un système que l'on peut diviser en parties de température uniforme.*

Cette extension, qui permet de traiter des systèmes dont la température varie d'un point à l'autre d'une manière continue, constitue une nouvelle *hypothèse;* mais cette hypothèse se présente si naturellement et les conséquences en sont si aisées à déduire que nous n'insisterons pas sur elle.

CHAPITRE III.

DE LA PRESSION DANS LES FLUIDES.

Les considérations précédentes sont très générales; nous allons maintenant nous occuper d'un cas plus restreint, qui aura l'avantage de nous fournir l'application à un exemple simple des théorèmes que nous venons d'établir.

Imaginons une substance isotrope, définie en chaque point par deux variables normales seulement, la température T et la densité ρ; celle-ci variera d'une manière continue à l'intérieur de certains espaces; mais ces espaces pourront confiner les uns aux autres par des surfaces de discontinuité; la matière remplissant chacun de ces espaces prend le nom de *fluide*.

Pour un fluide donné, la fonction G relative à un point (x, y, z) dépend seulement de la densité ρ et de la température T en ce point; nous pouvons poser

$$G = \zeta(\rho, T). \tag{54}$$

La forme de la fonction ζ dépend de la nature du fluide.

La fonction F relative à deux points (x, y, z) et (x', y', z') dépend de la densité ρ au point (x, y, z); de la densité ρ' au point (x', y', z'); enfin de la distance r des deux points (x, y, z) et (x', y', z'); nous pouvons poser

$$F = \frac{1}{E}\rho\rho'\,\psi(\rho, \rho', r). \tag{55}$$

La forme de la fonction ψ dépend de la nature du fluide auquel appartient le point (x, y, z) et de la nature du fluide auquel appartient le point (x', y', z').

Si nous désignons par $dm = \rho\, dV$ et par $dm' = \rho'\, dV'$ les masses des deux éléments de volume dV, dV', le potentiel thermodynamique interne d'un fluide pourra, en vertu des égalités (43 *bis*), (54) et (55), s'écrire

$$\mathcal{F} = \int \zeta(\rho, T)\, dm + \tfrac{1}{2}\int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'. \tag{56}$$

Considérons deux éléments de masses dm et dm', dont $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ sont deux points, situés à une distance finie r; l'ensemble de ces deux éléments forme un système dont le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ est donné par l'égalité

$$\mathcal{F} = \zeta(\rho, T)\, dm + \zeta'(\rho', T')\, dm' + \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'$$

et l'énergie interne $\mathcal{U}$ par l'égalité

$$\begin{aligned} E\mathcal{U} = & \left[\zeta(\rho, T) - T\,\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial T}\right] dm \\ & + \left[\zeta'(\rho', T') - T'\,\frac{\partial\zeta'(\rho', T')}{\partial T'}\right] dm' + \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'. \end{aligned}$$

Si le système des deux éléments éprouve une modification infiniment petite, le dernier terme de l'expression de $E\mathcal{U}$ éprouve une variation

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\delta y + \frac{\partial r}{dz}\delta z + \frac{\partial r}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial r}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial r}{\partial z'}\delta z'\right(+ \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\psi}{\partial\rho'}\delta\rho'\right] dm\, dm'.$$

Par définition [1], le travail des actions exercées par l'élément dm' sur l'élément dm a pour valeur

$$(57) \qquad d\mathfrak{T} = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\delta y + \frac{\partial r}{\partial z}\delta z\right) + \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\delta\rho\right] dm\, dm'.$$

Le travail des actions exercées par l'élément dm sur l'élément dm' a, de même, pour valeur

$$(57\ bis) \qquad d\mathfrak{T}' = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial r}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial r}{\partial z'}\delta z'\right) + \frac{\partial\psi}{\partial\rho'}\delta\rho'\right] dm\, dm'.$$

La formule (57) nous montre que les *actions* de l'élément dm' sur l'élément dm se composent :

1° D'une *force*, dirigée de M′ vers M, ayant pour grandeur

$$(58) \qquad F = -\frac{\partial}{\partial r}\psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm';$$

2° D'une *influence* [2], tendant à accroître la densité de l'élément dm,

$$(59) \qquad A = -\frac{\partial}{\partial r}\psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'.$$

Les *actions* de l'élément dm sur l'élément dm' se composent, d'après la formule (57 *bis*) :

1° D'une *force*, dirigée de M vers M′, ayant pour grandeur

$$(58\ bis) \qquad F' = -\frac{\partial}{\partial r}\psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm';$$

cette force est égale et directement opposée à la force F, donnée par l'égalité (58);

2° D'une *influence*, tendant à accroître la densité de l'élément dm',

$$(59\ bis) \qquad A' = -\frac{\partial}{\partial\rho'}\psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'.$$

---

[1] *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, Ire Partie, Chap. III, n° 2 (*Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 311; 1892).

[2] Sur la définition de ce mot, voir *Commentaire aux principes de la Thermodynamique, loc. cit.*

Les deux influences A et A′ ne sont pas nulles en général; elles ne disparaissent que dans le cas particulier où la fonction $\psi(\rho, \rho', r)$ devient indépendante de ρ et de ρ' et où, par conséquent, elle se réduit à une fonction de la seule variable r. Si l'on pose alors

$$f(r) = -\frac{d\psi(r)}{dr}, \tag{60}$$

la force répulsive qui s'exerce entre les deux masses élémentaires dm, dm' aura pour valeur, d'après les formules (58) et (58 *bis*),

$$F = dm\,dm' f(r), \tag{61}$$

f étant une fonction dont la forme dépend de la nature des deux fluides auxquels appartiennent les éléments dm, dm'. C'est dans ce cas particulier, très important, que se rangent, à titre de cas plus particuliers, les hypothèses faites par Newton tant sur *les forces qui déterminent la gravitation universelle* que sur *les actions moléculaires;* nous nommerons ce cas particulier le *cas de l'hypothèse newtonienne.*

Un cas plus particulier encore est celui où la fonction ψ devient indépendante non seulement des densités ρ et ρ', mais encore de la distance r; dans ce cas, comme la fonction ψ doit, par son origine même, être égale à zéro pour deux particules infiniment éloignées, elle sera identiquement nulle; le potentiel thermodynamique interne d'une masse fluide prendra non plus la forme générale (56), mais la forme

$$\mathfrak{F} = \int \zeta(\rho, T)\,dm; \tag{62}$$

deux éléments dm, dm' du fluide, n'exerceront plus l'un sur l'autre aucune action; c'est le cas que nous avons étudié en détail dans un autre Ouvrage [1].

Revenons maintenant au cas général auquel correspond l'égalité (56) et proposons-nous de chercher, dans ce cas général, les conditions d'équilibre du fluide.

La première condition sera que la température ait, en tous les points du système, une même valeur égale à la température des corps exté-

---

[1] P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique;* cours professé à la Faculté des Sciences de Lille en 1890-1891. Livre II : Les corps fluides.

rieurs. Cette première condition nous faisant connaître la température, nous pourrons ne plus faire figurer explicitement la lettre T dans l'expression de la fonction $\varphi(\rho, T)$.

Les conditions d'équilibre que nous cherchons s'obtiendront en exprimant que, dans toute modification isothermique virtuelle du système, on a

$$d\mathfrak{T}_e \leqq \delta\mathcal{F}, \tag{63}$$

$d\mathfrak{T}_e$ étant le travail des forces extérieures appliquées au système.

A l'égard de ce dernier travail, nous supposerons qu'il puisse être mis sous la forme

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_e = & \int (X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z)\, dm \\ & + \mathbf{S}\, P[\cos(P, x)\, \delta x + \cos(P, y)\, \delta y + \cos(P, z)\, \delta z]\, dS, \end{aligned} \tag{64}$$

la première intégrale s'étendant aux divers éléments de masse du fluide et la seconde aux divers éléments de la surface qui le limite; les fonctions X_e, Y_e, Z_e peuvent dépendre non seulement des coordonnées (x, y, z) de la particule dm, mais encore de sa nature, de son état, de sa densité.

Nous commencerons par donner au fluide toutes les modifications virtuelles qui laissent invariables le volume et, partant, la densité de ses divers éléments. Pour ces modifications, nous traiterons la condition (63) comme nous l'avons fait dans notre *Cours d'Hydrodynamique* (Livre II, Chap. I, n°s 1, 2 et 3). Mais, dans ce cours, le potentiel thermodynamique interne était donné par l'expression (62), en sorte que, dans les modifications dont il s'agit, on avait

$$\delta\mathcal{F} = 0.$$

Ici au contraire, où le potentiel thermodynamique interne est donné par l'égalité générale (56), on aura

$$\delta\mathcal{F} = \tfrac{1}{2}\delta \int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'. \tag{65}$$

Pour pousser plus avant la détermination de ce terme, nous nous appuierons sur trois hypothèses rendues nécessaires par ce fait que la

quantité $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ ne demeure pas en général dans un rapport fini avec la quantité $\psi(\rho, \rho', r)$, au voisinage du point $r = 0$.

Première hypothèse. — Soit $M(x, y, z)$ un point du fluide; soit r la distance du point (x', y', z') au point M; soit $\lambda(x', y', z')$ une fonction quelconque de (x', y', z') qui demeure finie dans le voisinage du point (x, y, z); *quelle que soit cette fonction, on peut toujours entourer le point* M *d'une surface* S *assez petite pour que l'on ait*

$$\left| \int \lambda(x', y', z') \frac{\partial \psi}{\partial r} dm' \right| \leqq \varepsilon;$$

l'intégrale s'étend à l'espace U *compris entre la surface* S *et une surface quelconque* S', *intérieure à* S *et enveloppant le point* M; ε *est une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.*

Faisons successivement

$$\lambda(x', y', z') = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z},$$

et appliquons le théorème fondamental de M. du Bois-Raymond; nous parviendrons au résultat suivant :

Les trois intégrales

$$(66) \quad \begin{cases} X_i = -\int \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) \frac{\partial r}{\partial x} dm', \\ Y_i = -\int \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) \frac{\partial r}{\partial y} dm', \\ Z_i = -\int \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) \frac{\partial r}{\partial z} dm' \end{cases}$$

ont un sens alors même que le point (x, y, z) *fait partie de la masse à laquelle s'étendent les intégrations.*

Entourons le point (x, y, z) d'une surface S et supposons que, dans les formules précédentes, les intégrations s'étendent seulement à la masse extérieure à cette surface; les intégrales prendront alors des valeurs X_i', Y_i', Z_i'; les composantes de la force exercée sur la particule dm par le fluide extérieur à la surface S auront pour valeurs,

d'après l'égalité (58),

$$X'_i\, dm, \quad Y'_i\, dm, \quad Z'_i\, dm.$$

Si l'on suppose que la surface S, se contractant, vienne s'évanouir au point (x, y, z), ces quantités tendront respectivement vers les limites

$$X_i\, dm, \quad Y_i\, dm, \quad Z_i\, dm.$$

C'est pourquoi nous donnerons aux quantités X_i, Y_i, Z_i, définies par les égalités (66), le nom de *composantes, au point* (x, y, z), *de la force intérieure.*

Deuxième hypothèse. — *On peut toujours entourer le point* M *d'une surface* S *assez petite pour que l'on ait*

$$\left| \int \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \rho', r)\, dm' \right| \leqq \varepsilon\,;$$

l'intégrale s'étend à l'espace U *compris entre la surface* S *et une surface quelconque* S', *intérieure à* S *et enveloppant le point* M; ε *est une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.*

Le théorème fondamental de M. E. du Bois-Reymond nous montre alors que l'*intégrale*

$$\mathcal{A} = -\int \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \rho', r)\, dm' \tag{67}$$

a un sens lors même que le point (x, y, z) *fait partie de la masse à laquelle s'étend l'intégration.*

Une raison analogue à celle qui nous a fait nommer les quantités X_i, Y_i, Z_i les composantes, au point (x, y, z) de la force intérieure, nous fera nommer la quantité $\mathcal{A}$ *l'influence qui tend à accroître la densité au point* $M(x, y, z)$.

Considérons la fonction

$$V(x, y, z) = \int \psi(\rho, \rho', r)\, dm', \tag{68}$$

l'intégration s'étendant à la masse entière du fluide; cette fonction existe assurément, car elle n'est autre chose que le produit par $\frac{E}{\rho}$ de

la fonction $W(x, y, z)$ définie en l'égalité (36). Au sujet de cette fonction, nous ferons l'hypothèse suivante :

TROISIÈME HYPOTHÈSE. — *Soit* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *un point situé dans une région où la densité* ρ *varie d'une manière continue; on peut toujours entourer le point* M *d'une surface* S *assez petite pour que l'on ait*

$$\frac{|V_1(x, y, z) - V_1(x_0, y_0, z_0)|}{\overline{MM_0}} \leq \varepsilon; \tag{69}$$

ε *est une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance;* V_1 *est défini par une égalité analogue à l'égalité* (68), *mais où l'intégration s'étend seulement à l'espace intérieur à la surface* S; (x, y, z) *est n'importe quel point de cet espace.*

Des trois hypothèses que nous venons d'énoncer, nous allons déduire la conséquence suivante :

Si, au voisinage du point (x, y, z), *la densité* ρ *admet des dérivées partielles du premier ordre* $\frac{\partial\rho}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial y}, \frac{\partial\rho}{\partial z}$, *la fonction* V *admet, elle aussi, des dérivées partielles du premier ordre, et l'on a*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -X_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -Y_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -Z_i - \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

Prenons un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et, autour de ce point, traçons une surface S assez petite pour que l'inégalité (69) soit satisfaite quel que soit le point $M(x, y, z)$ à l'intérieur de cette surface. Nous prendrons le point M sur une parallèle à l'axe des x menée par le point M_0, et nous poserons

$$x - x_0 = \Delta x,$$

en sorte que nous aurons

$$\overline{MM_0} = |\Delta x|.$$

Nous pouvons poser

$$V(x_0, y_0, z_0) = V_1(x_0, y_0, z_0) + V_2(x_0, y_0, z_0),$$
$$V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) = V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) + V_2(x_0 + \Delta x, y_0, z_0),$$

la fonction $V_2(x, y, z)$ étant définie par une égalité analogue à l'égalité (68), mais où l'intégration s'étende à l'espace 2, extérieur à la surface S.

Les égalités précédentes nous donnent

$$\begin{aligned}(71)\qquad \frac{V(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} &= \frac{V_1(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \\ &+ \frac{V_2(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V_2(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Or, nous avons, par hypothèse,

$$(69\ bis)\qquad \left|\frac{V_1(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}\right| \leqq \varepsilon.$$

La fonction $V_2(x_0, y_0, z_0)$ admet, par rapport à x_0, une dérivée partielle du premier ordre qui peut être obtenue par la règle de la différentiation sous le signe $\int$; on peut donc choisir Δx assez petit pour que l'on ait

$$\begin{aligned}(72)\qquad \Bigg| \frac{V_2(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V_2(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} &- \int_2 \frac{\partial}{\partial r}\psi(\rho_0, \rho', r)\frac{\partial r}{\partial x_0}dm' \\ &- \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0}\int_2 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\psi(\rho_0, \rho', r)\,dm' \Bigg| \leqq \varepsilon.\end{aligned}$$

Mais la définition même des quantités X_i et $\mathcal{A}$ montre que l'on peut toujours prendre la surface S assez petite pour que l'on ait

$$(73)\qquad \left| \int_2 \frac{\partial}{\partial r}\psi(\rho_0, \rho', r)\frac{\partial r}{\partial x_0}dm' + X_i(x_0, y_0, z_0) \right| \leqq \varepsilon,$$

$$(74)\qquad \left| \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0}\int_2 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\psi(\rho_0, \rho', r)\,dm' + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0}\mathcal{A}(x_0, y_0, z_0) \right| \leqq \varepsilon.$$

L'égalité (71), jointe aux égalités (69 *bis*), (72), (73), (74), montre que l'on peut toujours prendre Δx assez voisin de zéro et la surface S assez petite pour avoir

$$(75)\qquad \left| \frac{V(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} + X_i(x_0, y_0, z_0) + \mathcal{A}(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} \right| \leqq 4\varepsilon,$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Comme la valeur du premier membre de l'inégalité (75) ne dépend en aucune façon des dimensions attribuées à la surface S, on voit que cette inégalité entraîne l'égalité

$$\lim \left[\frac{V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \right]_{\Delta x = 0} = - \left[X_i(x_0, y_0, z_0) + \mathcal{A}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} \right].$$

Il suffit de supprimer l'indice zéro, désormais inutile, pour retrouver la première des égalités (70) : les deux autres s'établissent de même.

Calculons la quantité

$$(76) \qquad J = \int (X_i \, \delta x + Y_i \, \delta y + Z_i \, \delta z + \mathcal{A} \, \delta \rho) \, dm,$$

δx, δy, δz, $\delta \rho$ étant des fonctions continues de x, y, z, et l'intégrale s'étendant à la masse fluide tout entière.

Nous aurons évidemment

$$(77) \qquad \begin{aligned} J &= -\int dm \int \left[\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \delta x + \frac{\partial r}{\partial y} \delta y + \frac{\partial r}{\partial z} \delta z \right) + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} \delta \rho \right] dm' \\ &= - \int\int \left[\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \delta x + \frac{\partial r}{\partial y} \delta y + \frac{\partial r}{\partial z} \delta z \right) + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} \delta \rho \right] dm \, dm'. \end{aligned}$$

Mais l'égalité (76) peut aussi s'écrire

$$J = \int (X'_i \, \delta x' + Y'_i \, \delta y' + Z'_i \, \delta z' + \mathcal{A}' \, \delta \rho') \, dm',$$

en sorte que l'on a aussi

$$(78) \qquad J = - \int\int \left[\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial r}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial r}{\partial z'} \delta z' \right) + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho'} \delta \rho' \right] dm \, dm'.$$

Les égalités (76), (77), (78) montrent que l'on a

$$(79) \qquad \begin{aligned} & 2 \int (X_i \, \delta x + Y_i \, \delta y + Z_i \, \delta z + \mathcal{A} \, \delta \rho) \, dm \\ & = - \int\int \left[\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \delta x + \frac{\partial r}{\partial y} \delta y + \frac{\partial r}{\partial z} \delta z + \frac{\partial r}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial r}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial r}{\partial z'} \delta z' \right) \right. \\ & \qquad \left. + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho'} \delta \rho' \right] dm \, dm', \end{aligned}$$

quels que soient δx, δy, δz, $\delta \rho$.

Supposons maintenant ces quantités infiniment petites; nous aurons

$$\frac{\partial \psi(\rho,\rho',r)}{\partial\rho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\delta x+\frac{\partial r}{\partial y}\delta y+\frac{\partial r}{\partial z}\delta z+\frac{\partial r}{\partial x'}\delta x'+\frac{\partial r}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial r}{\partial z'}\delta z'\right)$$
$$+\frac{\partial \psi(\rho,\rho',r)}{\partial\rho}\delta\rho+\frac{\partial \psi(\rho,\rho',r)}{\partial\rho'}\delta\rho'=\delta\psi(\rho,\rho',r),$$

et l'égalité (79) deviendra

$$2\int(\mathrm{X}_i\,\delta x+\mathrm{Y}_i\,\delta y+\mathrm{Z}_i\,\delta z+\mathcal{A}\,\delta\rho)\,dm=-\int\!\!\int\delta\psi(\rho,\rho',r)\,dm\,dm',$$

ou encore, en remarquant que chacun des éléments de masse dm, dm', auquel s'étend l'intégration double, demeure nécessairement invariable,

$$(80)\qquad \int(\mathrm{X}_i\,\delta x+\mathrm{Y}_i\,\delta y+\mathrm{Z}_i\,\delta z+\mathcal{A}\,\delta\rho)\,dm=-\tfrac{1}{2}\delta\int\!\!\int\psi(\rho,\rho',r)\,dm\,dm'.$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (65), montre que, toutes les fois que l'on déplace les divers éléments du fluide sans faire varier la densité, on a

$$\delta\mathfrak{F}=-\int(\mathrm{X}_i\,\delta x+\mathrm{Y}_i\,\delta y+\mathrm{Z}_i\,\delta z)\,dm.$$

Les raisonnements exposés dans notre *Cours d'Hydrodynamique* (Livre II, Chap. I, n°s 1, 2 et 3) conduisent alors aux résultats suivants :

Il existe une fonction $\Pi(x, y, z)$, *uniforme, finie et continue en tous les points de la masse fluide, telle que l'on ait*

$$(81)\qquad \rho[(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e)\,dx+(\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e)\,dy+(\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e)\,dz]=d\Pi.$$

Cette fonction n'est négative en aucun point de la masse fluide. En tout point de la surface du fluide, on a

$$(82)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},x)=\Pi\cos(n_i,x),\\ \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},y)=\Pi\cos(n_i,y),\\ \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},z)=\Pi\cos(n_i,z),\end{cases}$$

n_i *étant la normale à la surface du fluide dirigée vers l'intérieur du fluide.*

Ces résultats obtenus, nous écrirons que l'inégalité (63) doit être également vérifiée par une modification virtuelle dans laquelle la

densité varie; dans ce cas nous aurons, en vertu des égalités (56) et (80),

$$\delta\mathcal{F} = \int \frac{d\zeta}{d\rho}\,\delta\rho\, dm - \int (X_i\,\delta x + Y_i\,\delta y + Z_i\,\delta z + \mathcal{A}\,\delta\rho)\, dm.$$

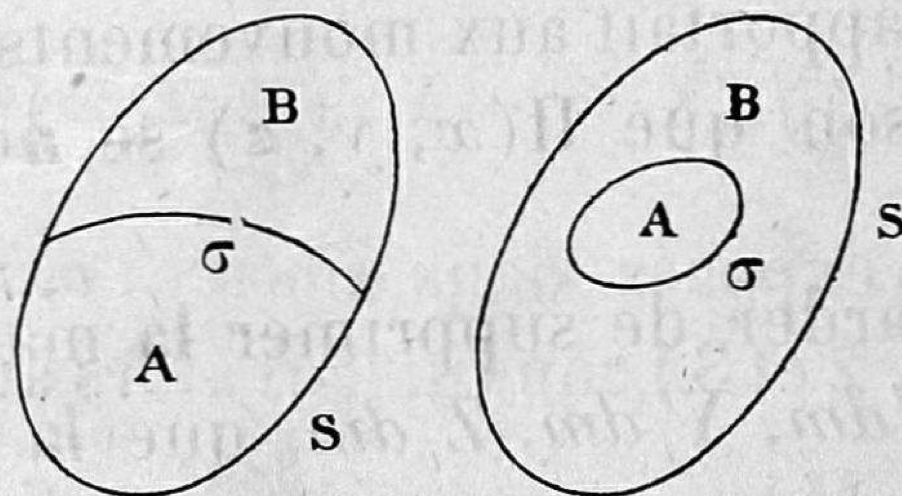
En raisonnant comme nous l'avons fait dans notre *Cours d'Hydrodynamique* (Livre II, Chap. I, n° 4) nous trouverons que *l'on doit avoir, en tous les points de la masse fluide,*

$$\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = \Pi + \rho^2 \mathcal{A}. \tag{83}$$

L'ensemble des conditions (81), (82), (83) *représente l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la masse fluide.*

Partageons le fluide en deux masses A et B; soit σ la surface nouvelle qui, soit seule (*fig.* 3), soit avec une partie de l'ancienne surface terminale du fluide, limite la masse A.

Fig. 3.



Supprimons l'obstacle que la présence de la masse B *apporte au déplacement de la masse* A, SANS SUPPRIMER AUCUNE DES ACTIONS (FORCES OU INFLUENCES) QUE LA MASSE B EXERCE SUR LA MASSE A. Pour parler d'une manière plus explicite, supprimons la masse B, de manière que la masse A puisse, sans déplacer aucune masse étrangère, franchir la surface σ; mais, aux corps étrangers qui exercent déjà :

1° Sur tout élément dm de la masse A, une force dont les composantes sont $X_e\,dm$, $Y_e\,dm$, $Z_e\,dm$;

2° Sur tout élément dS de la partie de la surface S qui peut confiner à A, une force dont les composantes sont

$$P\cos(P, x)\, dS, \quad P\cos(P, y)\, dS, \quad P\cos(P, z)\, dS,$$

adjoignons des corps étrangers qui, *sans toucher le corps* A, exercent

3° Sur tout élément dm de A, une force dont les composantes sont $X'_i\,dm$, $Y'_i\,dm$, $Z'_i\,dm$, X'_i, Y'_i, Z'_i étant définis par des égalités, analogues aux égalités (66), mais où les intégrations s'étendent à la masse B seulement;

4° Sur tout élément dm de A, une influence dont le travail élémentaire est $\mathcal{A}'\,\delta\rho\,dm$, $\mathcal{A}'$ étant défini par une égalité analogue à l'égalité (67), mais où l'intégration s'étend seulement à la masse B.

En général, la masse A ne sera plus en équilibre; mais on en rétablira certainement l'équilibre en adjoignant aux forces extérieures précédentes :

5° Une force, appliquée à chaque élément $d\sigma$ de la surface σ, et ayant pour composantes

$$\Pi\cos(\nu_i, x)\,d\sigma, \quad \Pi\cos(\nu_i, y)\,d\sigma, \quad \Pi\cos(\nu_i, z)\,d\sigma, \tag{84}$$

ν_i étant la normale à l'élément $d\sigma$ vers l'intérieur de la masse A.

Ces forces sont les *forces de liaison* équivalentes à l'obstacle que la présence de la masse B apportait aux mouvements de la masse A.

C'est pour cette raison que $\Pi(x, y, z)$ se nomme la *pression au point* (x, y, z).

Il faudrait bien se garder de supprimer la masse B en remplaçant seulement les forces $X'_i\,dm$, $Y'_i\,dm$, $Z'_i\,dm$, que la masse B exerce sur chacun des éléments dm de la masse A, sans remplacer en même temps l'influence $\mathcal{A}'\,dm$, tendant à augmenter la densité de l'élément dm, que cette même masse B exerce sur l'élément dm; les pressions (84) ne suffiraient plus alors à rétablir l'équilibre de la masse A.

Il ne sera permis, en général, d'opérer ainsi que dans le cas particulier où l'influence $\mathcal{A}'$ serait égale à zéro pour tout élément dm de la masse A. Cette condition ne sera pas généralement remplie, à moins que l'on n'ait

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\psi(\rho, \rho', r) = 0.$$

Si cette condition est réalisée, ψ est indépendant de ρ, et aussi de ρ', car ψ dépend symétriquement de ρ et de ρ'. C'est donc seulement dans le *cas de l'hypothèse newtonienne* que l'on peut opérer de la sorte.

A plus forte raison ne pourrait-on pas, en général, supprimer la

masse B sans remplacer ni les forces ni les influences qu'elle exerce sur les divers éléments *dm* de A; les pressions (84) ne rétabliraient pas l'équilibre de la masse; il n'est permis d'opérer ainsi que dans le cas où la masse B est sans action sur la masse A. Ce cas, où la fonction ψ est égale à zéro, et où, par conséquent, toutes les actions intérieures disparaissent, est celui que nous avons traité en détail dans notre *Cours d'Hydrodynamique.*

Dans un fluide dont les éléments n'exercent les uns sur les autres aucune action, ou bien encore dans un fluide dont les éléments exercent les uns sur les autres une action soumise à l'hypothèse newtonienne, on a $\mathcal{A} = 0$, et l'équation (83) devient

$$\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = \Pi,$$

en sorte que la densité en un point est, pour un fluide déterminé, une fonction de la seule pression au même point; mais ce théorème n'a pas lieu dans le cas général; *en dehors du cas de l'hypothèse newtonienne, la densité du fluide en un point ne dépend pas seulement de la pression en ce point.* Cette proposition, qui limite à un cas particulier une loi que presque tous les physiciens regardent comme universelle, nous paraît mériter l'attention [1].

Supposons que les forces extérieures X_e, Y_e, Z_e admettent une fonction potentielle U; nous aurons

$$X_e\, dx + Y_e\, dy + Z_e\, dz + dU = 0.$$

D'autre part, les égalités (70) donnent

$$X_i\, dx + Y_i\, dy + Z_i\, dz + dV + \mathcal{A}\, d\rho = 0.$$

Si l'on désigne par

$$\Omega = V + U$$

la fonction potentielle totale de toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, qui agissent sur les éléments fluides, les deux égalités précédentes donneront l'égalité

$$(X_e + X_i)\, dx + (Y_e + Y_i)\, dy + (Z_e + Z_i)\, dz + d\Omega + \mathcal{A}\, d\rho = 0.$$

---

[1] P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme,* t. I, p. 355, 359.

Cette égalité, jointe à l'égalité (81), devient

$$\rho\, d\Omega + \mathcal{A}\rho\, d\rho + d\Pi = 0. \tag{86}$$

Les surfaces d'égale pression auront pour équation différentielle

$$d\Omega + \mathcal{A}\, d\rho = 0,$$

ou bien

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z} + \mathcal{A}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) dz = 0.$$

En vertu des égalités (70) cette égalité devient

$$(X_i + X_e)\, dx + (Y_i + Y_e)\, dy + (Z_i + Z_e)\, dz = 0. \tag{85 bis}$$

Cette équation nous montre qu'*une surface d'égale pression est normale en chaque point à la force, tant intérieure qu'extérieure, qui agit en ce point.*

D'autre part, l'égalité (83), différentiée, donne

$$\rho\left[2\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho\frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}\right] d\rho - 2\mathcal{A}\rho\, d\rho - \rho^2\, d\mathcal{A} - d\Pi = 0$$

ou, en posant

$$\Theta(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho}\left[2\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho\frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}\right] d\rho, \tag{86}$$

$$\rho[d\,\Theta(\rho) - 2\mathcal{A}\, d\rho - \rho\, d\mathcal{A}] - d\Pi = 0. \tag{87}$$

Ajoutons membre à membre les égalités (85) et (87), et divisons par ρ les deux membres de l'égalité obtenue, nous trouverons

$$d\Omega - d(\rho\mathcal{A}) + d\,\Theta(\rho) = 0.$$

Cette égalité s'intègre immédiatement et donne

$$\Omega - \rho\mathcal{A} + \Theta(\rho) = \text{const.} \tag{88}$$

Dans le cas de l'hypothèse newtonienne, on a

$$\mathcal{A} = 0,$$

en sorte que l'équation précédente se réduit à

$$\Omega + \Theta(\rho) = \text{const.}$$

Il en résulte que les deux équations

$$\Omega = \text{const.}, \qquad \rho = \text{const.}$$

définissent la même famille de surfaces; mais cela n'a pas lieu, en général, lorsque l'hypothèse newtonienne n'est plus vérifiée.

Ainsi, *hors de l'hypothèse newtonienne, les surfaces équipotentielles ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale densité.*

Dans le cas de l'hypothèse newtonienne, l'équation (85) se réduit à

$$\rho\, d\Omega + d\Pi = 0.$$

Elle nous apprend que l'égalité $d\Pi = 0$ entraîne l'égalité $d\Omega = 0$ et inversement, en sorte que les surfaces équipotentielles sont en même temps surfaces d'égale pression. Mais, lorsque $\mathcal{A}$ est différent de zéro, il n'en peut être de même, car il faudrait que l'égalité $d\rho = 0$ eût lieu en même temps que les deux précédentes, ce que nous savons être impossible; ainsi, *hors le cas de l'hypothèse newtonienne, les surfaces équipotentielles ne sont pas surfaces d'égale pression.*

Donc *dans le problème général de l'Hydrostatique, les trois familles de surfaces*

$$\Omega = \text{const.}, \qquad \rho = \text{const.}, \qquad \Pi = \text{const.}$$

sont essentiellement distinctes; pour que deux de ces familles se confondent en une seule, il faut que l'hypothèse newtonienne soit vérifiée; mais, dans ce cas, elles se confondent toutes trois en une seule famille.

Ces divers résultats montrent quelles précautions minutieuses on devra prendre lorsqu'on voudra étudier l'équilibre d'une masse fluide dont les divers éléments exercent les uns sur les autres des actions non soumises à l'hypothèse newtonienne.

Il est un problème de Mécanique céleste auquel il y aurait lieu d'appliquer les remarques précédentes; M. Faye, pour expliquer la forme de la queue des comètes, a imaginé de remplacer la loi de la gravitation universelle par la loi suivante : Entre deux particules de masses dm, dm', de densités ρ et ρ', situées à la distance r, s'exercerait une force répulsive

$$F = \frac{dm\, dm'}{r^2}\left[\theta(\rho, \rho') - K\right], \tag{89}$$

K étant une constante positive, le coefficient de l'attraction universelle, et $\theta(\rho, \rho')$ une fonction toujours positive, sensiblement égale à zéro lorsque les densités ρ et ρ' ne sont pas très faibles, mais prenant une valeur notable lorsqu'une de ces densités devient comparable à la densité des gaz qui forment la queue d'une comète.

L'égalité

$$\frac{\partial\psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} = \frac{\mathrm{K} - \theta(\rho, \rho')}{r^2}$$

nous donne

$$\psi(\rho, \rho', r) = \frac{\theta(\rho, \rho') - \mathrm{K}}{r} + g(\rho, \rho').$$

D'ailleurs, comme la fonction ψ doit tendre vers zéro lorsque r croît au delà de toute limite, on aura

$$g(\rho, \rho') = 0$$

et, par conséquent,

$$\psi(\rho, \rho', r) = \frac{\theta(\rho, \rho') - \mathrm{K}}{r}. \tag{90}$$

Cette fonction vérifie bien les diverses hypothèses que nous avons admises au sujet de la fonction ψ et des diverses autres fonctions que l'on peut former avec celle-là.

L'influence que nous avons désignée par A [égalité (59)] aura pour valeur

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\rho}\theta(\rho, \rho')\,dm\,dm'. \tag{91}$$

La quantité $\mathcal{A}$ [égalité (67)] aura pour valeur

$$\mathcal{A} = -\int \frac{1}{r}\frac{\partial\theta(\rho, \rho')}{\partial\rho}dm'. \tag{92}$$

L'équation des *surfaces équipotentielles* s'obtiendra en écrivant que l'on a

$$\Omega = \int \frac{1}{r}[\theta(\rho, \rho') - \mathrm{K}]\,dm' = \text{const.} \tag{93}$$

L'équation des *surfaces d'égale densité* s'obtiendra, d'après l'éga-

lité (88), en écrivant que l'on a

$$(94)\qquad \Omega - \rho \mathcal{A} = \int \frac{1}{r}\left[\theta(\rho, \rho') + \rho \frac{\partial \theta(\rho, \rho')}{\partial \rho} - \mathrm{K}\right] dm' = \text{const.}$$

L'équation différentielle des *surfaces d'égale pression* sera, en vertu de l'égalité (85),

$$d\Omega + \mathcal{A}\, d\rho = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (85 *bis*) et des égalités (66),

$$(95)\qquad \begin{aligned} & dx \int [\theta(\rho, \rho') - \mathrm{K}] \frac{x' - x}{r^3} dm' \\ & + dy \int [\theta(\rho, \rho') - \mathrm{K}] \frac{y' - y}{r^3} dm' \\ & + dz \int [\theta(\rho, \rho') - \mathrm{K}] \frac{z' - z}{r^3} dm' = 0. \end{aligned}$$

On voit bien que ces trois familles de surfaces, définies par les égalités (93), (94) et (95), sont essentiellement distinctes.

Ces diverses remarques ne doivent pas être oubliées, si l'on veut, avec E. Roche et M. Resal [1], déduire de la considération de semblables forces la figure de la queue des comètes.

Ces considérations montrent l'intérêt qui s'attache à la conception nouvelle d'*influence*, qui doit prendre place à côté de la notion de *force*, dans l'étude des *actions* mutuelles des corps.

---

[1] E. Resal, *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, 2e édition (Chapitre VI, § 2).

[illegible]xiste des laboratoires de Photographie, ceux-ci devront recevoir l'installation radiographique nécessaire; dans les autres, où l'on sera amené à créer un service radiographique, on sera conduit par la force des choses à le compléter par un laboratoire de Photographie....

Il ne faut pas croire qu'une fois en possession de l'outillage convenable, il n'y aura qu'à amener le malade et à faire l'examen sur l'écran ou le cliché photographique, c'est une erreur complète; le maniement des ampoules radiographiques est chose fort délicate, comme il sera démontré par la suite. Il faut que l'opérateur, par une série de travaux préalables, d'opérations diverses faites suivant l'état de l'ampoule, suivant la température, suivant l'énergie du courant électrique, amène son matériel au point précis où il donnera le maximum d'effet : ce travail préliminaire et qui exige des soins constants ne peut guère être demandé au personnel médical, à moins que celui-ci ne consente à négliger en grande partie ses occupations professionnelles. Il faut d'autre part, pour le maniement des appareils, leur entretien, la charge des accumulateurs, certaines connaissances pratiques que l'opérateur devra acquérir par un apprentissage spécial, sinon les appareils ne seront jamais prêts à fonctionner au moment voulu, ou encore ils seront vite mis hors d'usage....

Il en résulte que tout laboratoire de Radiographie médicale doit être pourvu d'un personnel attitré pour en assurer le bon fonctionnement, ce personnel ayant toute com[illegible]ce au point de vue radiographique et photographique.

On voit que le projet de créer da[illegible] ch[illegible] que hôpital un laboratoire de ce genre, auquel serait attaché un personnel particulier, constituerait une charge très lourde pour l'Administration, mais au moins le service serait assuré d'une façon satisfaisante.

Une autre solution consisterait à n'établir [illegible] Paris qu'un service central, très bien outillé, possédant le matériel [illegible] portatif nécessaire, et un personnel assez nombreux pour satisfaire à toutes les demandes. La création d'un service de ce genre aurait l'avantage d'assurer l'unité de direction, de permettre une installation telle qu'on n'en pourrait faire de pareille dans chaque hôpital....

Par contre, cette solution aura[illegible] de graves inconvénients qu'on ne saurait passer sous silence : tous les malades transportables devront être radiographiés au service central; pour les autres, le personnel du service radiographique devra se déplacer. Sans parler des frais de transport considérables qui résulteront de ces déplacements, on peut se demander si le matériel portatif permettra d'obtenir les résultats donnés par l'installation fixe du laboratoire central....

En dernier lieu, nous croyons que la création d'un laboratoire unique de Radiographie ne satisferait aucunement les médecins et les chirurgiens qui arriveront, par la force des choses, à demander toujours l'examen dans leurs services et sous leurs yeux....

A notre avis, la solution la plus logique consisterait à installer, dans tous les hôpitaux, des services particuliers, convenablement outillés, pourvus d'un personnel capable, et dotés des crédits suffisants pour en assurer le bon fonctionnement. A l'un d'eux pourrait être adjoint un laboratoire de [illegible]cherches qui aurait pour objet de perfectionner la technique de la [illegible]graphie et d'en faire bénéficier tous les autres établissements : ce [illegible]oire devrait être chargé également de l'instruction technique et [illegible] des opérateurs. Ce sont là, évidemment, des dépenses assez [illegible] à faire. Mais, devant les résultats déjà obtenus par la Radio[illegible] ceux qu'elle est encore appelée à rendre, il est impossible [illegible]ngtemps....

Depuis près de trois années, nous nous sommes consacré à l'[illegible] pratique de la Radiographie dans le laboratoire de la Salpêtrière, [illegible] qui nous a absorbé presque complètement : les idées que nous avo[illegible] nous faire sur l'état de la question, nous les soumettons modestem[illegible] l'examen de l'Administration; l'expérience que nous avons acquise, [illegible] la mettons à la disposition de nos collègues qui voudront bien li[illegible] Ouvrage, dans le but de s'adonner à la mise en œuvre de la décou[illegible] du professeur Röntgen....

A. LONDE

Table des Matières.